現代幾何学における操作－対象の双対

――Riemann-Roch の定理から Atiyah-Singer の指数定理への概念拡張――

原　田　雅　樹

序

数学において，その概念のネットワークはどうなっているのであろうか。筆者は原田（2020）において，数学の構成に関わる Kant の純粋理性の構造に対して大幅な変更を加えつつも，そこにヒントを得ながら，数学の様々な領域で誕生した概念が干渉し，それを通して拡大されながら数学理論が発展していくことを示した。そして，そのことを示すケース・スタディとして，関数解析の一分野である作用素環論の構造に対して分析を加え，それを記述した。本論文でも同様に，数学の領域間での概念の干渉が数学概念の拡張にとって本質的であることを示していきたい。そこで用いられるケース・スタディは Atiyah-Singer の指数定理である。原田（2020）において，作用素環論を取り上げ，本論文で Atiyah-Singer の指数定理を取り上げる理由を述べておきたい。現代の数学者 A. Connes が 1970 年代後半に創始した非可換幾何学という様々な通常の幾何学を〈非可換化〉するという大きなプログラムがある。Connes は，作用素環論の一つである von Neumann 環の分類で大きな業績を上げ，それによってフィールズ賞を受賞した数学者であるが，彼の計画は作用素環論全体を非可換化された幾何学的空間として見るということに基づいている。非可換微分幾何学という分野を切り開いたのも彼の業績の一つであるが，それは，現代幾何学の大定理の一つである Atiyah-Singer の指数定理の非可換化を示したことに始まったと言っても過言ではない。筆者の関心は，非可換幾何

学の概念構造に哲学的な鍬をほどこすというところにもあり，そのために，本論文では Atiyah-Singer の指数定理を数学概念の干渉を観察するためのケース・スタディとして取り上げた次第である。

本論文の第 1 章では，最初に数学者 M. Atiyah の数学観を取り上げる。特に幾何学と代数学を人間の異なった認知能力として見る Atiyah の見解を紹介する。次に，哲学者 I. Hacking の著書『数学はなぜ哲学の問題となるのか』（Hacking, 2014）における数学内部における応用について紹介する。Hacking は，数学の応用は，抽象的形式体系に対する解釈にすぎないという大方の数理哲学の見解に対して批判を加える。その次に，フランスの哲学者 G.-G. Granger の操作－対象双対という考えを紹介しながら，それが数学の概念生成にどう機能しているかを見る。そして，その考え方と，幾何学における脱空間化と再空間化という彼の考え方のとの間の関連性について吟味する。最後に，以上の数学者と哲学者の議論を通じて，Kant の純粋理性のシステムを，現代数学における概念のネットワークを理解するための数学領域間の関係性に置き換えることを試みる。

第 2 章では，具体的に Rimann-Roch の定理から Atiyah-Singer の指数定理に至るまでの歴史的歩みをたどりながら，そこにおいて，解析関数論，代数関数論，位相幾何学，複素幾何学，楕円微分作用素の理論などが，いかに干渉し合いながら，様々な概念が拡張されてきたかを記述する。そして，そこに展開される概念のネットワークに，第 1 章の最後で提案した Kant の純粋理性のシステムを改変して得られる現代数学における領域間の関係性がいかに観察されるかに注意を払っていきたい。

1. 数学の諸領域の干渉と概念の拡張

a. 幾何学と代数学－M. Atiyah

数学とは何か。20 世紀初頭，数学の数学たるゆえん，いわゆる数学基礎論において様々な議論がなされた。数学は論理学の単なる延長であるのか。数学

は単なる無矛盾体系であるのか。数学から具体的に構成不可能なあらゆる手段を取り除くべきなのか。しかしながら，実際になされている数学活動，実際に生み出されている数学理論はそのようなものとは遠く隔たっており，数学を単なる演繹体系とみることも許されない。

20 世紀最大の幾何学者であり，K 理論の導入や Atiyah-Singer の指数定理の発見に偉大な足跡を残した M. Atiyah は，一つの数学の領域から他の領域へと概念が移される中でその抽象化が生じ，数学が発展すると考えている。

> 数学の存在理由は，アイデアをひとつの分野から他の分野へと，抽象化のプロセスによって移しかえていくことにある。さらに数学をすることについての究極の正当化とでもいうべきものは，数学がどこまでも一つのものとして緊密に結びついていることである。もし私たちが，純粋に実用主義者の立場に立って，数学はその応用を通して自らを正当化しているのだということを，たとえ認めたとしても，そのときには数学の総体は，それでもなお数学が一体として結びつけられているのはなぜか，その合理的な理由を要求してくることになるであろう（Atiyah, 1985, p.31；邦訳 p.78）。

ここで言われている数学の分野ないし領域として，空間的図形をその原初的対象とする幾何学や，自然数をその対象とする算術と，その操作の構造を抽象化した代数学とが代表的なものとして考えられる。Atiyah は，数学を論理学はもちろんのこと，一つの記号的体系に還元することを拒否しつつ，その領域である幾何学と代数学の起源の違い，そして思考の在り方の違いを考慮する（Atiyah, 2001, pp.657-659；邦訳 pp.109-114）。解析学も広い意味で代数学的思考に連なるものとして，Atiyah は微積分を導入した Newton と Leibniz の思考法の違いを次のように述べる。Newton の微積分は，幾何学，そして運動論に結びついた時間による微積分であった。

> Newton は基本的には幾何学者であり，Leibniz は基本的には代数学者であった。……Newton にとっては，幾何学，すなわち彼が展開した微積分（解析 calculus）は，自然の法則を記述するための数学的な企てであっ

> た。彼は広い意味での物理学に関わっていたが，物理学は幾何学の世界から見られていた。物体がどのように動くのかを知りたいと思ったら，物理的世界の言葉で考え，それを幾何学描像で捉える。Newton は微積分を発展させていくとき，その後にある物理的な状況にできるだけ密着するような形で展開し，進めていった。Newton はそのため幾何学的な議論を用いた（Atiyah, 2001, p.657；邦訳　pp.109-110）。

他方，Leibniz にとっての微積分は彼の目指す普遍数学・普遍学 mathesis universalis に連なるものであると同時に，Descartes 的な明証性に基盤を置く思考と対照をなす人間のシンボリックで機械的な思考に深くかかわるものであった。

> Leibniz の方は，目的，それも野心的な目的を持っていた。それは数学の全体系を形式化して，大きな代数的な機械に変えてしまおうということであった。それは Newton のアプローチとは全く正反対なものであった（p.657；邦訳　p.110）。

この Newton と Leibniz の数学に対する向き合い方の違いは 19 世紀末から 20 世紀初頭に活躍した Poincaré と Hilbert に引き継がれる。

> 19 世紀が終わろうとするころに，二人の巨人，Poincaré と Hilbert が現れた。……Poincaré の考え方は幾何学とトポロジー（位相幾何学）の精神によって立ち，それを基礎的な洞察を与えるものとして用いた。それに対して，Hilbert はより形式主義者であり，公理化し，形式化し，厳密で形式的な表現を与えることを欲した（同上）。

それでは，Atiyah は幾何学と代数学についてどのように考えているのであろうか。その違いを見てみよう。彼は，幾何学を視覚，そして脳神経科学，さらに意味とも関連付けて，次のように述べる。

> 私たちが見ている世界を理解し，またその意味を把握することは，私たちの進化にとって非常に重要な部分をしめている。空間的な直観，あるいは空間的な知覚は驚くほど強力なものであって，そしてそのことこそ，幾何学が実際，数学において，これほどに重要な部分をしめている理由である。

> 空間的な直観や知覚が単に幾何学的なものにとって重要なだけでなく，そうでないものにとっても重要である。私たちは，それらを幾何学的な形におきなおしてみようとする。それはそうすることで，私たちの直観をはたらかせることができるようになるからである（p.658；邦訳 p.111）。

幾何学は，対象の諸性質についての情報を同時に把握する知性の能力と深くつながっていると，Atiyah は述べる。

> 私は，人間の精神が，視覚の一瞬のはたらきで大量の情報を吸収するという，この驚くべき受容力によって進化をとげてきたことは，非常に基本的なことであると考えている。数学はこのはたらきをもち，それを完成させる（同上）。

このような空間に関わる幾何学に対し，代数学は時間に関わると Atiyah は述べる。

> 一方，代数学は時間と本質的なかかわりをもっている。どんな代数学をおこなうときも，そこに現れる一連の演算・作用は逐次に実行される。「逐次に」ということは，そこに時間が入り込んでいることを意味している。静的な宇宙では，代数学を想像することなどできない。幾何学は本質的に静的なものである。じっと座って，ものを見ることはできるし，何も変わらなくとも，見ることはできる。しかし，代数学は時間とかかわりをもっている。なぜなら代数学は，順次に行われる演算・作用を扱うからである（p.658；邦訳 p.112）。

Atiyah にとって，幾何学と代数学は人間の異なった認知能力に関係したものなのである。

> 代数学は時間の中における演算操作とかかわり，幾何学は空間とかかわっている。これらは世界の二つの直交する側面であり，数学の二つの異なる視点を表現している（同上）。

以上のように，Atiyah にとって，数学はその全体を代数学とか数概念といった絶対的基盤となる特定の数学概念に基礎づけることができるようなものではなく，人間の異なった認知能力がハイブリッドしているところに成立している

学問なのである。

b. 数学の領域間での応用－I. Hacking

Atiyah が語るような，実際になされている数学の認知活動，数学の概念の生成について，哲学の側からはどう捉えるべきなのであろうか。数学の哲学と言えば，大半は，19 世紀の後半から 20 世紀前半の数学の基礎づけについての問題意識と深く結びついており，論理学，集合論，証明論，そして最近では圏論をめぐって議論が戦わせることがほとんどであり，具体的な数学者の問題意識とかけ離れてしまっている感を否めない。最近では，この事態を憂慮して，実際になされている数学と関わりをもった数学の哲学の試みが少しずつなされているが，それは少数派である。その少数派の哲学者の一人が I. Hacking である。

M. Foucault をはじめとしたフランス・エピステモロジーの影響も強く受けた哲学者 I. Hacking は，その著作『数学はなぜ哲学の問題になるのか』（Hacking, 2014）において，現在の数学の哲学の主流は唯名論的であり，それが具体的な数学の現場を離れてしまっていることを指摘している。彼は，この著作の第一章「哲学的序論」の中で，数学内部での応用について論じている。すなわち，そこでは Descartes によってなされた算術に連なるものとしての代数学の幾何学への応用，そして，Minkowski によってなされたその逆，すなわち幾何学の算術への応用，数論的問題を幾何学的に考える Gauss による「平方剰余の定理」，さらに Langlands program などについての言及がなされている。

ここで，Hacking は，数学の哲学の側からの考察として，数学の領域の拡張について論じている K. Manders による論文「領域の拡張と数学の哲学」（Manders, 1989）を取り上げている。この論文はあまり知られていないが，Hacking によれば，とても重要なものである。この論文について Hacking に即しながら紹介しておこう。Manders は数学内部でのある一つの領域から他の領域への応用は数学にとって重要であるにもかかわらず，それに対する哲学

的無関心があると考えた。典型的な例として，C. G. Hempel はどんな分野への数学の応用も，公理の集まりを新たな文脈で解釈する問題であると信じており，これを Manders は数学の応用についての「解釈的」捉え方と呼びつつ，そのような考え方は実際の数学でなされていることからかけ離れていると考えた。Hacking はこの批判をさらに進めて，次のように述べる。

> Gödel と Tarski 以降，論理学者たちと哲学者たちは，……数学への意味論的アプローチにとりつかれてきた。そのことが，数学のある領域が別の領域に応用されるとき実際になされていることから，注意をそらせてきたのである。Manders を言い換えると，それが応用をモデルにつぐモデルにすぎないように思わせてきた（Hacking, 2014, p.10；邦訳 p.12）。

Hacking は，Manders のこれまでの数学の哲学のアプローチに対する批判に同意を与えながら続ける。

> Manders が確認し，われわれを誤解させてきたと彼が言うところの理念，そして私が意味論的アプローチに結びつけた理念は，抽象的形式体系という理念である。そうした理念によれば，われわれはその体系の中で妥当な演繹を行うが，その体系には様々な解釈が存在する。ひとかたまりの数学がある主題に応用されるのは，その主題がその数学に対して一つの解釈を与えるときである。一方において妥当なすべての演繹は，その解釈のもとで，他方における健全な結論へと導く。これこそが，ある分野の数学を他の分野の数学に応用することの全てである。ところが Manders は，ものごとが全くそのようでないことを見て取ったのだ。……Manders は，公理から解釈へという一方向だけの物語は，「数学から数学」への応用の際に起こるダイナミズムを完全に無視している，と論じている（p.10；邦訳 p.12：一部翻訳に変更を加える）。

このように，数学においては，意味を持たない抽象的形式体系が何かあって，それに対して様々な解釈としてモデルを与えることが数学における応用に他ならないという考え方に対して，Manders と共に Hacking は批判を加える。

　数学内部の領域間の応用を考えることで，数学概念の意味のダイナミズムな

生成ということに対する大切な示唆を，Hacking の考え方は与えてくれる。そして，この数学内部での応用は，Kant が自然科学への応用を考えたことに先んじて考える必要があると，彼は言うのである。このような Hacking の考え方は，Atiyah が幾何学と代数学の違いを強調しつつ，その上で，数学概念がある領域から他の領域へと移行する際に抽象化が起こると考えたことと深く関連しているように思われる。

c. 操作－対象双対－G.-G. Granger

前節において，抽象的形式体系に与えられる解釈ということによって数学の応用を捉えようとする考え方，並びにそれに対する Hacking による批判を紹介した。J. Cavaillès は，Gödel の不完全性定理の発見以後の数学基礎論論争との対話を基に 1940 年代に〈概念の哲学〉を導入した。それを継承したフランスの哲学者 J. Vuillemin が 1962 年に著した未完の大著『代数学の哲学』（Vuillemin, 1962）では，フランスの数学者グループの Bourbaki の大きな影響のもと，数学概念において重要なのはその操作性が対象性から純化されることである，ということが強調された。結果，そこでは，Galois の方法論における代数学的概念の純粋性が大きく評価され，Gauss や Riemmann の数学の方法論に対しては，幾何学的直観が混在しており，その操作性が対象性から十分に純化されていないという評価が下された（原田，2013）。

この節では，やはり〈概念の哲学〉を継承し，Vuillemin の『代数学の哲学』を意識しつつも，彼とは異なる数学概念についての考え方にたどり着いた G.-G. Granger の考え，特に数学内部の応用に関わるであろうと思われる考えについて紹介することにする。Granger は，科学におけるシンボル（記号）の重要性を強調しつつ，抽象的形式体系という見方に対して，Gödel の不完全性定理を視野に入れた〈形式的内容 contenu formel〉という考え方をその著書『形式，操作，対象』（Granger, 1994）において打ち出す。ただし，この〈形式的内容〉は Granger の言うように Gödel の不完全性定理まで持ち出す必要はなく，広く数学概念に内包されるものであるように思われる（近藤，

2013)。それは，抽象的形式体系と言った際に，Hilbert 流の形式主義にまで引き戻す必要がないのと同様である。

この〈形式的内容〉という考え方に導かれつつ，Granger は，この著書の中で，数学の圏論から援用された双対圏と導来圏の考え方を用いながら，その哲学的思索を進める（Granger, 1994, Chapitre 3)。圏は対象とその対象同士を関係づける射によって構成される。導入された対象は，他の対象から（特別な場合に自身から）向けられる，あるいは他の対象に（特別な場合に自身に）向かう矢印としての射という対象に働く作用のシステムによっていわば外部から定義づけられる。すなわち，対象については，射の形式的諸特性なしには何であるかを言うことは出来ない。対象の内的構造も射によって決まり，圏はそれを構成する対象と射によってその内的構造が決まるのである。

一般の圏においては，その対象の要素を取り出すことができないということを注意しておく。一般の圏ではそれは不可能で，集合圏となって初めて，その圏の対象は集合となってその要素を取り出すことができる。集合圏の対象は，ある対象から他の対象への写像という射によって，対象が要素の集まりによって構成されているという構造が規定されるのである。

さらに，圏は，関手によって他の圏に移されるが，その際，二つの圏における射の向きが同じならば，それは共変関手と呼ばれ，射の向きが逆になるならば，それは反変関手と呼ばれる。もとの圏に対して，対象が同型でその射の向きが逆になるような圏のことを双対圏と呼ぶ。

Granger は，数学内部におけるこの双対圏という考え方と呼応させるようにして，哲学に双対性の考え方を移植する。それは，思考の対象のシステムと思考の操作ないし作用のシステムが相互規定し合っているという考え方であり，対象と操作は置換が可能であるということから，そのような思考の形態を Granger は操作－対象双対性ととらえるのである。この操作－対象双対は，著書『形式，操作，対象』より以前に著わされていた『哲学的知のために』（Granger, 1988）において，Cantor, Dedekind, Hilbert, Brouwer, Gödel らの数学基礎論的な議論に基づきながら，すでに導入されていた（Granger, 1988, Chapitre 3；原田，2008)。『形式，操作，対象』ではそれが圏論に関わる概念が用いられながら深められる。ただし，この哲学的な対象－操作双対性が圏論における圏を構成する対象と射の関係に対応するのか，あるいはある圏とそれが反変関手によって移された先の双対圏との関係に対応するのかは明確でない。すなわち，対象と射というのが，圏の内部での構造であるのに対し，双対性は圏と圏との間の関係である。このように Granger の哲学的な操作－対象双対と数学の圏論の対応関係は必ずしも明確でないが，本論文においては，操作－対象双対を対象的な圏と操作的な圏という反変関手で結ばれた二つの圏が双対的になっていると解釈したいと思う。

Granger がアナロジカルに哲学に転用するもう一つの圏論の概念は導来圏であるが，これをここで説明するのはいささか困難であるので，それは割愛する。Granger は，導来圏というアイデアを哲学に転用し，それを歴史的に操作－対象の双対圏を措定するような圏として考える。操作と対象が完全には双対的になっておらず，そのどちらか一方の余剰が〈形式的内容〉を生み出す。操作の対象に対する余剰が新たな対象を生み出し，対象の操作に対する余剰が新たな操作を生み出し，新たな操作－対象の双対圏を措定するものが導来圏である。Cavaillès が考えた〈概念の哲学〉においては，概念の内的構造と歴史的生成に注意が払われるが，Granger は，それをシンボルのシステムないし思考の操作の圏と対象の圏との双対性，並びに導来圏によってとらえようとするのである。

著作『空間の思考』（Granger, 1999）で，Granger は空間概念の代数による脱空間的抽象化と抽象的構造の再空間化が弁証法に入れられながら，数学概念が進展していく様子をベクトル空間，Lie 群，位相幾何学などを用いながら記述している。ここでは，それらの数学概念ないし理論が，先ほど述べた操作－対象双対圏と〈導来圏〉の現れる数学の場として理解されている。

『空間の思考』の「空間性の形と変換群による不変量」という章で，Granger は幾何学を群によって基礎づけようとした Erlangen program を扱っている。そこでは，幾何学は直観的な形を対象としたものではなく，その不

変な代数的特性を取り出し，それを対象とする。それと同時に，群という操作のシステムを出発点として幾何学的な〈形〉が再構成される。

また，この著作の最終章では，Lie 群の構造を内包している可微分多様体が扱われるが，Lie 群の無限小の生成元としての Lie 環を考えることで，可微分多様体が線形的に捉えられるようになる。すなわち，幾何学的・解析学的・代数学的対象としての可微分多様体には，一方で，局所座標や微分可能な関数が定義でき，さらに，その各点において接ベクトルによって生成される接平面が定義され，もう一方で，n 次元多様体には，各点におけるファイバーの変換を表現する接空間の構造群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ が定義される。このように，幾何学的空間上で，解析学的構造と代数学的構造の間には同型性がある。すなわち，多様体は Lie 群と考えられ，その接平面は Lie 環と考えられるのである。

> 抽象化と代数化の過程は，空間の特性の再統合の過程と同時に生じているように見える。なぜなら，ファイバーを特徴づけるのは，同型群 G という代数的概念だからである。一層はっきりと言うならば，もともと代数的な対象，すなわち Lie 群それ自身が多様体であると考えられる場合に，そのことは明確になる（Granger, 1999, p.219）。

一方で，代数的対象は空間の新たな形を獲得し，解析的に扱われる可微分多様体を通して顕わになる空間的特性によって豊かにされる。もう一方で，多様体に結びついた Lie 群によって，多様体は再代数化されるのである。この二つは同時進行する。このように「Lie 環の概念は多様体の『幾何学的』特性を代数的特性へと導いていくのである」（p.220）。このように，Granger は，群の概念の中に，幾何学，解析学，代数学の干渉を見ている。

源流を Leibniz の位置解析まで遡ることができ，Poincaré が 19 世紀末から 20 世紀への世紀の境目に大域的な幾何学（切ったり貼ったりすることなく，連続的に変形する形を同じものとして見る幾何学）として導入した位相幾何学においても，幾何学，代数学，解析学が干渉し合っている。Granger は，位相幾何学についても『空間の思考』の中で，哲学的な分析を加えている。この質の幾何学ともいえる，空間の大域的構造に関わる位相幾何学において，境

界，連続性，変形，道，紐といった幾何学につながる自然な概念は代数学的に明確にされる。直観的形状の自然な概念と構造の明確化の関係は，代数学と幾何学の間の一種の往復運動に深くつながっている。ここに生じる具体と抽象の往復運動について，Granger は次のように述べている。

> 空間についての数学的思考は，代数学的シンボルのシステムにおける対象と操作についての豊饒な，しかしながら奇妙なほど抽象的な思考へと繋がっている。それと同時に，理論の第一の動機は，最も頻繁には，より具体的な理論における問題の解決であったこと，そしてそれと相関的に，抽象的理論が，もともとの対象からしばしば非常に遠く離れたところにあるように見えるモデルに対して新たな応用が生み出されることを忘れてはならないであろう（p.104）。

位相幾何学は，大域的変形の下での不変を明るみに出すが，この幾何学の質的性格はこの大域性に由来するものである。

この位相幾何学では，幾何学における大域性と局所性の関係が双対性として顕わになっていることにも注意を払っておきたい。代数的位相幾何学におけるホモロジー群は，空間の大域的性格の代数学的性格を顕わにしたものである。それに対して双対的にコホモロジー群を構成することができるが，このコホモロジー群にはカップ積の構造を導入することができて，コホモロジー環とすることができる。他方，微分位相幾何学において，可微分多様体上に de Rham コホモロジーを作ることができるが，これは，多様体の局所的構造と言える。この可微分多様体の de Rham コホモロジーと，その空間の大域的構造のホモロジーとは双対的なっており，その二つの間にカップリングをとることができる。すなわちホモロジーを積分領域として，de Rham コホモロジーの積分をとることができて，これがこの空間の連続変形によって不変量を与えることが知られているのである。

d. 改変した Kant 哲学による数学概念の分析

現代数学の構造はどう理解できるであろうか。Kant は『純粋理性批判』の中で，純粋悟性のカテゴリーを量，質，関係，様相とし，これらが感性の直観に与えられる現象に総合を与える。そして，カテゴリーの直観への適用の媒介となるのが構想力によって産出される図式である。数学に関して言えば，構想力によって内的感官の純粋直観形式である時間において算術が生成され，その時間に基づきながら外的感官の直観の純粋形式である空間において幾何学が生成される。さらにそこにおいてア・プリオリな数理物理学も純粋直観形式の図式化によって生まれる。このようにして算術，幾何学，さらには数理物理学がア・プリオリで〈総合〉的な判断に基づく知として成立し，それを媒介に，自然科学特に物理学の基礎となる実体性や因果律などの概念が由来するカテゴリーが現象に適用され，Newton 力学などが成立するというのが Kant の考え方である。

この Kant 哲学の考えをそのまま現代数学の構造を理解するために使うことは出来ないであろう。まず，Kant の直観を感性的なものに限定するする狭さから解放しなければならない。さらに，ここまでに述べた数学者 M. Atiyah や哲学者 I. Hacking や G.-G. Granger らの見解を視野に入れつつ，現代の分析哲学系の数学の哲学からも距離をとることにする。そこで，本論文では，上述の Granger の考え方に触発されつつ，Kant における悟性を，操作性を顕わにする概念と考え，悟性を構成する量，質，関係，様相をそれぞれ解析学，代数学，関数論，確率論と置き換えることにする。また，純粋な直観形式を，対象性を顕わにする概念と考え，そこでは幾何学，数論，数理物理学，情報などが構成される考えることにする。さらに，操作性を顕わにする数学概念の奥に原理的な概念として集合論や圏論を措定することにする[1]。これらの数学領域が複雑に絡み合い，新たな数学概念を生成していくと考えることにする。

さらに，ここで対象性を顕わにする数学概念（幾何学的空間概念や数概念）

---

(1) Kant の純粋理性のシステムから，数学概念のネットワークへの移行に関して，本論文においては，原田（2020）で提案したものに対して修正をほどこした。

と操作性を顕わにする数学概念（特に代数や関数）の間に双対性があると考える。この双対性は，Granger の言う操作－対象双対にあたり，具体的には，現代数学において，層やコホモロジー環，K 理論といった反変関手によって可能となっている。

空間を何か実体そのものとして直接的に把握するのではなく，その上の代数を通して把握しようとするのは，現代数学にとって本質的なことである。空間と代数の間には，双対的な関係があるのである。例えば，19 世紀半ば以後の代数幾何学においてはコンパクトな Riemann 面から代数関数体へ，Grothendieck 以後の代数幾何学においては affine schemes から可換環へと，反変関手によって同型に移されるのである。

本論文の第 2 章では，以上のような観点から，20 世紀の幾何学の華ともいえる Atiyah-Singer の指数定理がどのような道筋をたどって見出されることになったかを概観することで，数学の営みが何であるか，その歴史的な概念生成がいかにして生じるかを見ていくことにする。この定理は幾何学的空間における局所性と大域性の双対性を顕わにした現代幾何学の大定理である。そして，幾何学的空間（曲がった有限次元の空間）が，関数空間（無限次元の線形空間）によって把握されるということを示した定理であり，それはまさに K 理論という反変関手よって実現された代数的操作－幾何学的対象双対としての位相幾何学的空間と解析的関数空間の双対性についての定理と言ってもよい。そして，Granger の意味での〈導来圏〉によって，この操作－対象双対圏が Riemann-Roch の定理を出発点として，Kähler 多様体という複素多様体上に措定されたのが，この Atiyah-Singer の指数定理なのである。

2. Riemann-Roch の定理から Atiyah-Singer の指数定理への概念の拡張と明確化

a. Riemann-Roch の定理

Atiyah-Singer の指数定理の故郷は Riemann-Roch の定理である。そのた

め，Riemann 面と Riemann-Roch の定理をおさらいしておくことにする。

Riemann 面における幾何学的空間と関数ないし代数構造の関係は，現代における幾何学的空間についての考え方の源泉になっている。19 世紀半ばに Riemann は今日 Riemann 面と呼ばれる曲面を導入することで，多価関数を一価の解析関数にするアイデアを提案する。特に，楕円積分を考えるためにこの Riemann 面が大きな役割を果たす。$R(z,s)$ を二つの変数 z と s の有理関数（分子と分母がそれぞれ多項式で書かれている関数），$\phi(z)$ を z の 3 次，または 4 次の多項式で，平方因子を含まないものとする時，$\int R(z,\sqrt{\phi(z)})dz$ の形の積分を楕円積分と呼ぶ。$\phi(z)$ が 5 次以上の多項式の時には，これを超楕円積分と呼ぶ。$\phi(z)$ が 5 次以上の多項式の時には，これを超楕円積分と呼ぶ。また，Riemann 面 $R=\{(z,w)|w^2=\phi(z)\}$ に無限遠をつけ加えたものを，$\phi(z)$ が 3 次または 4 次の時には楕円曲線，それより高次の時には超楕円曲線と呼ぶ。z が複素数の時には，（超）楕円曲線は曲線といっても通常の意味での 2 次元曲面になる。楕円曲線は穴が 1 つ（種数 1）のトーラス面（ドーナツ状の形の表面），超楕円曲線は穴が複数 n 個（種数 n）のトーラス面となる。（超）楕円積分は，この（超）楕円曲線すなわちトーラス面上の経路に沿った積分となる。始点と終点を固定した経路に沿った積分の値の多価性は経路のトポロジカルな性質にのみ依存するのである。これは，楕円積分や楕円関数を局所的・定量的ではなく大域的・定性的に扱うことを意味しており，さらにそれは微分方程式論や幾何学における大域的で定性的な研究の道を開いていくことになるのである。このような Riemann 面との関連の中で，複素曲線の理論として Riemann-Roch の定理が生み出されるのである。

そこで，*The Princeton Companion to Mathematics*（Gowers, Green, Leader, 2008）の T. Gowers による Riemann-Roch の定理についての記述の引用をすることで，この定理の本質をつかんでおくことにしよう。

> Riemann 面は多様体であって，普通「局所的に複素数体 $\mathbb{C}$ のように見える」という言い方をされるものである。言い換えると，各点が $\mathbb{C}$ のある開集合に全単射で移せる近傍を持ち，そのような二つの近傍が重なると

ころでは「変換関数」が正則である空間である。Riemann 面は，1 変数の正則関数（すなわち複素微分可能な関数）の概念が意味を持つ最も一般的な種類の集合と考えることができる。……

コンパクト Riemann 面 S をとり，そこから有限個の点 $z_1, \cdots, z_r$ の集合を選んだとしよう。正整数の列 $d_1, \cdots, d_r$ が与えられた時，S 上で定義された有理関数 f であって，極が $z_1, \cdots, z_r$ であり各 i に対して z_i における極の位数が高々 d_i であるものを見つけることはできるであろうか？……

興味を持っている関数の集合はベクトル空間をなし，よって，この空間の次元を調べることで「どれくらい」関数があるかを定量化できると期待できよう。いまやわれわれの期待どおり，この次元は有限であることが分かる。Riemann は，もし極が単純（つまり $d_i = 1$, $i = 1, 2, \cdots, r$）であることを要求すれば，次元 l は $r - g + 1$ 以上であることを証明した。ここで g は曲面の種数であり，大雑把に言えば，その意味は開いている穴の個数である。この結果は Riemann の不等式と呼ばれる。Roch の貢献は，l と $r - g + 1$ の差を別の関数空間の次元として翻訳したことである。このおかげで，次元 l を正確に計算することがしばしば可能になる。たとえば，ある状況下では，Roch により同定された関数空間の次元は 0 であることが示せて，その場合 $l = r - g + 1$ である。……

もともと立てた問いはもっと一般であり，極が単純であることは要求しなかった。単に z_i における極の位数は高々 d_i であることを求めた。しかし，結果はそのまま一般化される。l は今度は $d_1 + \cdots + d_r - g + 1$ 以上であり，差はまたもや定義可能なある関数空間の次元に等しくなる。d_i には負のものがあってもよく，「位数が高々 d_i の極」とは，重複度が少なくとも $-d_i$ の零を意味すると解釈する（*The Princeton Companion to Mathematics,* V.31，邦訳 pp.804-805）。

ここからも読み取れるように，幾何学と関数論が深く関わるところに Riemann-Roch の定理は成立し，その定理は幾何学的な〈面〉の定性的性質を線形な関数空間の次元で把握しようとするものであると言える。

b. 位相幾何学

20 世紀初頭，複素変数の楕円曲線の Riemann 面に，群の考え方を取り入れながら，Poimcaré は，計量を入れない，切り貼りせずに連続的に変形できる形を同じ形とみる大域的な代数的位相幾何学（位置解析）を生み出した。これは，すべての連続変換のもとでの離散的な不変量に基づく幾何学である。そして，Poincaré は大域的な代数的位相幾何学と局所的な微分幾何学の間にある双対関係も示した。この大域性と局所性の間にある双対性というのは 20 世紀幾何学を特徴づける一つの重要な要素となっている。代数的位相幾何学の概略は次のようなものである。

> Poincaré は微分方程式の解の質的研究や天体力学の問題との関連において，曲面の一般化である多様体の位相的研究に着手し，今日の位相幾何学の端緒を開いたが，そのときに導入された重要な概念にホモロジー群と基本群がある。これらの概念の発展により今日の代数的位相幾何学が形成されたのであり，それらは前者につながるホモロジー論と後者につながるホモトピー論に大別される。……
>
> 一般に，代数的位相幾何学では，幾何学的対象に代数的対象を対応させ，幾何学的性質を代数的性質に反映させて位相的性質を研究するという方法がとられる。ホモロジー論においてはこの代数的対象としてホモロジー群，コホモロジー環などとよばれるものが用いられるのである。
>
> 多面体とは単体をその面に沿って連接させたときにできる図形であるが，Poincaré は多様体を多面体として取り扱うのが便利であるとし，多面体のホモロジー群を定義して多様体の位相を研究したのである。この方法は Alexander, Lefschetz, Veblen らに受け継がれて，1920 年代には多様体のホモロジー関するかずかずのすぐれた成果が得られた。一般の位相空間に対してホモロジー群を定義するという仕事は，1930 年代に Alexander, Čech, Kolomogoroff, Lefschetz らによってはじめられたが，このころホモロジー群と双対的に定義されるコホモロジー群は環の構造を有していることが見いだされた。これらの仕事は 1940 年代に Dowker,

> Eilenberg, Spanier らによって整備されて，今日では Čech 理論，Alexander-Spanier 理論および特異理論とよばれているホモロジー論やコホモロジー論が確立された。その後 Cartan, Eilenberg, MacLane, Milnor, Serre, Steenrod, J. H. C. Whitehead らによる努力は（コ）ホモロジー論の内容を充実させるとともに使いやすい形にした。（中岡，1999，前書き，pp.1-2）

n 次元多様体における i 次元ホモロジー群とは，連続的な変形によって同じものになるものを同一して，i 次元閉曲面が生成する群を代数的に精密に表現したもののことである。換言すると，それは n 次元多様体における i 次元の〈穴〉ないし〈空洞〉によって生成される群のことである。i 次元ホモロジー群の双対をとると，$(n-i)$ 次元のコホモロジー群を得ることができる。そして，コホモロジー群には，カップ積を入れることができて，コホモロジー環とすることができるのである。代数的位相幾何学において，そこにある代数構造を抽象した（コ）ホモロジー論が生み出される中で，圏論も誕生する。

さらにまた，特性類という連続的な変形による不変量も見いだされることになる。特性類とは，その空間がどれだけ自明な空間から離れているかを示す指標となるようなコホモロジー群の元である。特性類についての Milnor と Stasheff の代表的な教科書の序文にその歴史が書いてあるので，引用しておく。

> 特性類の理論は，1935 年にアメリカの H. Whitney とスイスの E. Stiefel による仕事により，ほぼ同時に始められた。Stiefel の学位論文は…可微分多様体の接束から決まるある種の「特性的」ホモロジー類を導入し研究したものである。そのころ，…Whitney は任意の球面束の場合を扱っていた。その後彼はコホモロジー理論の叙述を発見し，つまりは特性的コホモロジー類の概念に到達し，基本的な積公式を証明した。
>
> 1942 年，モスクワ大学の L. Pontryagin は，C. Ehresmann による胞体分割を用いて Grassman 多様体のホモロジー群を研究し始めていた。この研究により，彼は重要で新しい特性類を構成することができた。……

> 1946 年，陳省身（S.-S. Chern）は，…複素ベクトル束に対して特性類を定義した。実際，陳は複素 Grassman 多様体が実 Grassman 多様体に比べてずっと理解しやすいコホモロジー構造をもつことを示した。（Milnor, Stasheff, 1974，邦訳，序文）

位相幾何学において最も重要な概念の一つが，上にも述べられているベクトル束である。空間 X 上のベクトル束とは，X の各点でパラメータ付けられた（各点に張り付いた）ベクトル空間の連続的な族のことである。点 $x \in X$ でパラメータ付けられたベクトル空間 E_x は x 上のファイバーと呼ばれ，x から E_x に関数値をとる連続関数のことを切断と言う。

代数的位相幾何学において，コホモロジー環が定義され，特性類も定義されてきた。他方で，微分幾何学と位相幾何学が融合した微分位相幾何学においても，可微分多様体上の de Rham コホモロジー環が定義され，その曲率を用いて計算される Chern 類などの特性類も定義される。それらのコホモロジー環や特性類は，代数的位相幾何学と微分位相幾何学の間で翻訳可能である。

c．Thom 同型と Chern 指数

ここで，いささかテクニカルになるが，Atiyah-Singer の指数定理において重要になる Thom 同型と特性類のいくつかについて述べておく。

まず，Thom 同型の定理について述べる。$\pi : E \to B$ を射影とした $\eta = \{E, B, \pi\}$ を n 次元ベクトル束（ファイバーの次元が n のベクトル束）とする。低空間 B と零切断とを同一視して，$E \supset B$ であるとし，$E_0 = E \setminus B$ とおく。また，$E_b = \pi^{-1}(b)$ を B の点 b 上のファイバーとし，$E_{b,0} = E_b \cap E_0$ とおく。そして，相対ベクトル束 (E, E_0) の整係数コホモロジー群 $H^*(E, E_0; \mathbb{Z})$，およびコホモロジー群に環の構造を入れるカップ積

$$\smile : H^*(E; \mathbb{Z}) \otimes H^*(E, E_0; \mathbb{Z}) \to H^*(E, E_0; \mathbb{Z})$$

に関して，次の（i），（ii），（iii）が成り立つ。

（i）　$H^i(E, E_0; \mathbb{Z}) = 0\ (i < n)$

（ii）　このベクトル束を向き付けられたものとし，任意の $b \in B$ における包含写像 $j_b : (E_b, E_{b,0}) \to (E, E_0)$ を考えると，任意の $U_b(E) \in H^n(E_b, E_{b,0}; \mathbb{Z})$ に対して，

$$j_b^*(U(E)) = U_b(E)$$

を満たす $U(E) \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ が一意的に存在する。

（iii）$\alpha \in H^i(B; \mathbb{Z})$ に対して，$\phi(\alpha) = \pi^*(\alpha) \smile U(E) \in H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z})$ を対応させることにより，同型

$$\phi : H^i(B; \mathbb{Z}) \to H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z})$$

が得られる。これを Thom 同型という（中岡，1999, 4.4）。

ベクトル束の全空間 E が B とベクトル空間の直積で書けるとき，そのようなベクトル束のことを自明束という。特性類は，あるベクトル束が自明束からどれだけ異なっているかをコホモロジー類で測るための指標である。そこで，Atiyah-Singer の指数定理について重要になるいくつかの特性類について述べておく。

まず，最も基本的な特性類として，向きづけ可能な n 次元実ベクトル束 $\eta = \{E, B, \pi\}$ についての Euler 類 $e(E) \in H^n(B; \mathbb{Z})$ がある。これは，包含写像 $\iota : E \to (E, E_0)$ として，

$$e(E) = (\pi^*)^{-1} \circ \iota^*(U(E))$$

と定義される。ここで，

$$\iota^* : H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) \to H^n(E; \mathbb{Z})$$

$$(\pi^*)^{-1} : H^n(E;\mathbb{Z}) \to H^n(B;\mathbb{Z})$$

となっている。すなわち，$H^n(E, E_0;\mathbb{Z})$ の元 $H^n(E;\mathbb{Z})$ に射影してから，底空間 B 上のコホモロジー類に引き戻すことによって Euler 類が得られる（Milnor, Stasheff, 1974, Chapter 9）。

次に，Chern 類とは，B の各点 b 上のファイバー $E_b = \pi^{-1}(b)$ に n 次元複素ベクトル空間の構造が与えられたベクトル束に関する特性類のことであるが，複素ベクトル束 $\eta = \{E, B, \pi\}$ に対して，コホモロジー類の列

$$c_i(E) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z}),\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

が対応する。ただし，$c_0(E) = 1 \in H^0(B;\mathbb{Z})$ であり，η の複素次元が n ならば，$i > n$ の時，$c_i(E) = 0$ である。また，ベクトル束 $\eta' = \{E', B', \pi'\}$ を考え，バンドル写像を $f : E \to E'$，対応する底空間の写像を $\bar{f} : B \to B'$ とすると，自然性

$$c_i(E) = \bar{f}^* c_i(E')$$

が成立する。ここで，自明束の Chern 類は $i > 0$ で全て 0 になっている。また，η と η' を同じ底空間を持つ複素ベクトル束とすると，カップ積の入ったコホモロジー環 $H^*(B;\mathbb{Z})$ において

$$c_k(E \oplus E') = \sum_{i=0}^{k} c_i(E) c_{k-i}(E'),\ (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成立する（Whitney 積）[(2)]。また，最高次の Chern 類は，n 次元の複素ベ

---

(2) コホモロジーの元の間の積 $c_i(\eta)c_{k-i}(\eta')$ などはカップ積 $c_i(\eta) \smile c_{k-i}(\eta')$ を意味している。以下同様。この代数的位相幾何学のカップ積は，微分位相幾何学におけるコホモロジーの元の外積と等価なものになる。

クトル束を $2n$ 次元の実ベクトル束と考えた基礎ベクトル束の Euler 類に等しくなっている。

さらに，

$$c = \sum_{i=0}^{n} c_i$$

のことを全 Chern 類と言い，

$$c(E \oplus E') = c(E)c(E')$$

が成立している（Milnor, Stasheff, 1974, Chpter 14）。

ところで，n 次元複素ベクトル束 E は，十分に大きな次元の空間の中の n 次元複素平面の集合によって構成される Grassmann 多様体上の n 次元複素ベクトル束に同型に移される（射影化）が，$E \cong L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n$ と n 個の複素直線束 L_i に直和分解（Whitney 和）できる。複素直線束の Chern 類は 0 次と 1 次のみであるから，これから

$$c(E) = c(L_1)c(L_2)\cdots c(L_n) = (1 + c_1(L_1))(1 + c_1(L_2))\cdots(1 + c_1(L_n))$$

となることが示せる。$x_i = c_1(L_i)$ とすると，

$$c(E) = (1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n)$$

となり，

$$c_0(E) = 1$$
$$c_1(E) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$c_2(E) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

$$\cdots$$

$$c_n(E) = x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} x_n$$

などが成り立ち，それぞれが対称多項式になっていることが分かる。また，Chern 指数

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$$

が定義され，これは指数定理で重要な働きを演ずることになる。

さらに，指数定理において重要な役を演ずる Todd 類が

$$\mathrm{Td}(E) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}$$

として定義される。

微分位相幾何学においても同様に Chern 類や Todd 類が定義できる。多様体 X 上の Lie 群の構造をもつベクトル束 $\eta = \{E, X, \pi\}$ を考える。X 上の関数に対する外微分を d, Lie 環に値を持つ E 上の 1 形式（ゲージ・ポテンシャル）を A とすると接続 1 形式は $\nabla = d + A$ となり，曲率 2 形式は

$$F = \nabla^2 = dA + A \wedge A$$

となる。$\dfrac{i}{2\pi}F$ を対角化した成分を x_i とすると，

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{trace}\ \exp\left(\frac{iF}{2\pi}\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$$

といったように，先ほどの代数的位相幾何学と同様にして，Chern 類，Chern 指数や Todd 類などが求まる（中原，2001，第 11 章)。

d. 複素幾何学と代数幾何学

位相幾何学が発展するのと同時期の 20 世紀前半，一変数複素関数論とともに，Weyl らの仕事もあり，Riemann 面の概念も数学的に整えられる。しかし，それと同時に多変数複素関数論の困難さも明らかになる。20 世紀半ばに岡潔らの大きな仕事を通して，層の概念が導入されながら多変数複素関数論にあった大きな問題が乗り越えられ，そのことが複素多様体論，そして複素幾何学の進展を促していく。この複素幾何学の代表的なものが Kähler 多様体上の複素幾何学である。そこでは，Dolbeauld 複体が定義され，そのコホモロジーをとることができ，その多様体の曲率から特性類が得られる。このように，位相幾何学の概念が複素幾何学にも取り込まれる。

1950 年頃から，位相幾何学の方法は，A. Weil や F. Hirzeburch らによって代数幾何学に移入されるようになる。J. P. Serre は，複素射影代数多様体の代数幾何学と，解析的な多変数複素関数を考える複素代数幾何学が本質的に同じものであることを示す 1956 年の GAGA 論文（Serre, 1956）に向かう中で，1954 年に層のコホモロジーを用いながら重要な Serre の双対性を証明し，Riemann-Roch の定理の証明を革新する。なお，この時に用いられるコホモロジーは抽象的な Čech コホモロジーで，それは微分位相幾何学で用いられる重要な de Rham コホモロジーと同型である。それは，層のコホモロジーを用いて表現される（Dieudonné, 1988, 3.VII. §2；小木曽，2003, 6 章）。

さらに，1957 年，A. Grothendieck は Riemann-Roch-Hirzebuch の定理を Grothendieck の K 群と呼ばれる群の構造を代数多様体上の連接層としてのベクトル束に導入することで証明し，さらに拡張する。すなわち，代数多様体上のベクトル束には直和の演算が存在するが，その演算の逆演算はとることはできないので，ベクトル束自身は群の構造を持っていない。そこで，Grothendieck はベクトル束の同値類に直和による加法の逆演算としての減法を入れて，群の構造を入れるのである。さらにベクトル束のテンソル積をとることで，その同値類に積の構造も入れ，ベクトル束の同値類に可換環の構造を入れる。このことによって，彼は一般化された Riemann-Roch の定理を証明

した。

また，1960 年代，可換環の素イデアルの集合に Zariski 位相を入れた位相空間の上に可換環の層や加群層を考え，それに対してコホモロジー群や圏論を用いるスキーム理論によって Grothendieck が代数幾何学に革命を起こす。このように圏論的見地からは，代数構造を持つ関数の集合が位相空間の反変関手として双対的に捉えられる中で，代数的位相幾何学，微分位相幾何学，複素幾何学や代数幾何学等の幾何学が合流していく。

e. K 理論

これまで述べてきたように，層やコホモロジーといった概念を用いながら，Riemann-Roch の定理は意味が明確化され，拡張される。さらに Grothendieck によって見出された K 群に触発されて，Atiyah と Hirzeburch によって K 理論という理論が生み出される（Atiyah, 2018）。数学者 Burt Totaro は，*The Princeton Companion to Mathematics* の「代数的位相幾何学」の項の中で，K 理論について次のように述べる。

> 幾何学におけるベクトル束の有効性から，位相空間の〈穴〉を測る新しい方法が得られるに至った。X 上にどれくらい異なるベクトル束があるのかを見るのである。この考え方は，任意の位相空間にコホモロジーに類似の環を対応付ける簡単なやり方を与える。この理論は K 理論とよばれる（IV. 6. 6，邦訳 p.439）。

位相幾何学的 K 理論とは，基本的には二つのベクトル束の〈差〉である。そして，K 理論は，20 世紀半ばから現代にいたるまでの数学に広範な影響を与えた代数的・解析的・幾何学的理論である。数学者荒木捷朗は K 理論について次のように述べる。

> Grothendieck の Riemann-Roch 型定理において重要な役割を演じた代数的ベクトル束の K 群は，Atiyah-Hirzeburch によってその位相幾何学的類似－位相的ベクトル束の K 群－の重要性を見いだされ，ここに位相的 K 理論がはじまった。以来 10 年（1958-1968）の位相的 K 理論の

> 歴史は，微分可能 Riemann-Roch 定理とその応用，……微分位相幾何学への種々の応用，Atiyah-Singer の指数定理とその応用，などの多くの応用を生み出し，多くの位相幾何学者を魅了した。
>
> その理論面での重要事項は，i）ホモトピー群についての Bott の周期性の K 理論的解釈－‘Bott の周期性’または‘周期性定理’と呼ばれる，ii）微分可能 Riemann-Roch 定理，iii）コホモロジーの形成，などであろう。その後，微分可能 Riemann-Roch 定理での理論的キー・ポイントは K 理論での Thom 同型定理であると認識されてきた。（荒木，**1970, p.60**）

K 理論について説明しておこう。コンパクトな位相空間 X 上の二つのベクトル束 U, V を考える。もし，$U \oplus W = V \oplus W$ を満たすようなベクトル束 W が存在するとき U と V を安定同値であると言い，$[U]=[V]$ と書く（$U \oplus W = V \oplus W$ が成立しても $U = V$ が成立するとは限らない）。X 上のベクトル束に直和によって加法の構造を入れた可換半群 $A(X)$ を安定同値類で割った $F(X) = A(X)/\sim$ を考え，さらにその部分群

$$E(X) = \{a + b - (a \oplus b); a + b \in F(X)\}$$

による商をとって $K(X) = F(X)/E(X)$ を考える。この $[U \oplus V] = [U] + [V]$ という（可換な）加法群の入った $K(X)$ が K 理論を構成する。

高次の K 群についてはこの 0 次の K 群から定義できる。0 次の K 群を $K^0(X)$ とすると，n 次の K 群を

$$K^{-n}(X) := K^0(X \times \mathbb{R}^n)$$

として構成することができる。この K 群は閉部分空間 Y⊂X として完全列

$$K^{-n}(X \setminus Y) \to K^{-n}(X) \to K^{-n}(Y)$$

と

$$\delta : K^{-n}(Y) \to K^{-n+1}(X \setminus Y)$$

から

$$\cdots \to K^{-n}(X \setminus Y) \to K^{-n}(X) \to K^{-n}(Y) \to$$
$$K^{-n+1}(X \setminus Y) \to K^{-n+1}(X) \to K^{-n+1}(Y) \to \cdots$$

という長完全列が得られる。さらに，

$$K^{-n}(X) = K^{-n+2}(X)$$

が成立することが示され，次の図が完全列をなすような Bott の周期性定理が成立する。

$$\begin{array}{ccc} K^0(X \setminus Y) \to K^0(X) \to K^0(Y) \\ \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ K^1(Y) \leftarrow K^1(X) \leftarrow K^1(X \setminus Y) \end{array}$$

なお，この $K = K^0 \oplus K^1$ はコンパクトな位相空間 X の反変関手となっている（Atiyah, 2018）。Totaro は，K 理論の Bott の周期性定理についての重要性について，コホモロジーとの関係性と違いを明確にしながら，次のように述べる。

> したがって，任意の位相空間 X に対応付けられる異なる K 群は，実際には二つしかない。$K^0(X)$ と $K^1(X)$ である。
>
> このことから，K 理論は通常のコホモロジーより少ない情報しか持っていないと思われるかもしれないが，そうではない。K 理論と通常のコホモロジーは，その間に強い関係性があるが，どちらも他方を決定するものではない。それぞれが，空間の形についての異なった様相を前面に押し出す。通常のコホモロジーは，その次数付けによって，空間が異なる次元

の部品によって作り上げた方法を，かなり直接的に示す。K 理論は二つの異なる群しか持たず，最初はより粗雑に見える（そして，その結果として，しばしば計算がより容易である）。しかし，ベクトル束に関わる幾何的な問題は，K 理論によって理解の表面に引き上げられる情報でありながら，通常のコホモロジーから抽出することが難しく，かつ鋭い情報をしばしば包含している。

K 理論と通常のコホモロジーの基本的な関係は，X 上のベクトル束から作られる群 $K^0(X)$ は，X の偶数次元コホモロジー群全体に関する何かを「知っている」ということである。正確に言うと，Abel 群 $K^0(X)$ の階数は X の全ての偶数次元コホモロジー群 $H^{2i}(X)$ の階数の和と等しい。この繋がりは，X 上の与えられたベクトル束に対して，その Chern 類を対応付けることから来る。同じやり方で，奇の K 群 $K^1(X)$ は，奇数次元の通常のコホモロジーと関連している（*The Princeton Companion to Mathematics,* IV.6. 6，邦訳 p.440）。

K 理論とは，ベクトル束の〈差〉によって偶数次元全体ないし奇数次元全体の〈穴〉ないし〈空洞〉によって生成される代数構造を求め，それによって多様体の大域的構造を調べる理論と言ってよいであろう。そして，Bott の周期性から K 理論の Thom 同型定理を証明できるが，このことが，Atiyah-Singer の指数定理にとって重要となるのである。

f. 楕円微分作用素

指数定理において，n 次元多様体 X 上の楕円微分作用素が重要な役割を果たすが，それについての説明から始める。まず，記号についての約束をしておく。n を自然数として，

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \text{ として } |\alpha| = \sum_k \alpha_k$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots\cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

と約束をする。また，X の局所座標系 $(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ において，微分作用素 D^{α} を

$$i^{|\alpha|}D^{\alpha} \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

と定義する。

また，$\pi : E \to X$ を射影としたベクトル束 $\{E, X, \pi\}$ について，X の各点 x からそのファイバー $E_x = \pi^{-1}(x)$ 上の点への滑らかな写像 s で $\pi \circ s = id_X$ となるものを切断と呼び，E に値を持つ切断の集合全体を $\Gamma(E)$ と書く。X 上の無限回微分可能な（滑らかな）関数の集合全体を C^{∞} とすると，これは無限次元の関数空間をなし，切断の集合 $\Gamma(E)$ は C^{∞} 上加群となる。

ここで，E と F を X 上のそれぞれの複素次元を p と q とするベクトル束とする。X の各点に対して，局所座標系を $(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ とする近傍 U が属し，局所自明化 $E|_U \to U \times \mathbb{C}^p$, $F|_U \to U \times \mathbb{C}^q$ が存在する。E に値を持つ滑らかな切断の集合 $\Gamma(E)$ に作用し，

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} A^{\alpha}(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}$$

と書ける線形写像 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ を X 上の位数 m の微分作用素という。ここで，$A^{\alpha}(x)$ は滑らかな複素数値関数の $p \times q$ 行列であり，$|\alpha| = m$ において $A^{\alpha} \neq 0$ である。

ここで，

$$\sigma_{\xi}(P) \equiv i^m \sum_{|\alpha| = m} A^{\alpha}(x)\xi^{\alpha}$$

と定義する。ξ は x における余接束のファイバー $\xi \in T_x^*X$ で，$\sigma_{\xi}(P) : E_x \to F_x$ という変換を与える。そして，余接束 T^*X の射影 $\pi : T^*X \to X$ についての引き戻しについて，

$$\sigma(P) : \pi^*E \to \pi^*F$$

という変換を与える。この $\sigma(P)$ のことを P の主表象（principal symbol）という。この写像が全ての X の点について，$\xi \neq 0$ で可逆であるとき，この微分作用素のことを楕円微分作用素と言う（Lawson, Michelsohn, 1989, Chapter III；Shanahan, 1978）。

g. Atiyah-Singer の指数定理

K 理論や微分作用素の理論が駆使されながら，Atiyah-Singer の指数定理が誕生した。この定理は楕円微分方程式論に由来する解析的指数と微分位相幾何学の特性類に由来する位相幾何学的指数が等しいことを示し，それを通して幾何学的空間の大域的構造と局所的構造の双対性を明らかにする。

もう少し具体的に言うと，次のようなことである。多様体上の無限次元の関数の線形空間から，それに作用する楕円微分作用素を用いて有限次元の大域的な情報を取り出し，それが線形となっていない有限次元の多様体の局所的な幾何学的特性と対応付けられるという結果を示すのが，Atiyah-Singer の指数定理である。この定理は，Riemann-Roch の定理を複素微分位相幾何学における Kähler 多様体へ拡大したものとして，1960 年代前半に Atiyah らによって示された。そこでは微分的位相幾何学的なベクトル束の概念が一般化された Riemann-Roch の定理へと統合されていく。上述した K 理論を用いて代数多様体上の Rimann-Roch の定理が拡張され，一般の Kähler 多様体において Atiyah-Singer の指数定理が証明されたのである（Dieudonné, 1988, 3.VII. §3）。このように，位相幾何学と複素幾何学が合流するところに，Atiyah-Shinger の指数定理が見出されるのである。

Atiyah-Singer の指数定理がどういうものかを簡単に説明しておくことにする。ただし，簡単のために，この節では X をコンパクトで境界のない多様体とする。余接束 T^*X 上のベクトル束に作用して，π^*E から π^*F への変換を与える楕円微分作用素 P の主表象が

$$\boldsymbol{\sigma}(P) \equiv [\pi^* E, \pi^* F; \sigma(P)] \in K(TX)$$

といったような接束 TX 上のベクトル束の同値類の〈差〉である K 群を与える。微分作用素はベクトル束上の切断の集合に対して変換をほどこすのであるが，その主表象はベクトル束に対して変換をほどこす。そして，このことが Atiyah-Singer の指数定理において解析的指数と位相幾何学指数を等しくする本質であるといってよい。すなわち，それは次のようなことである。埋め込み $f: X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ に対する引き戻しを

$$f_! : K(TX) \to K(T\mathbb{R}^N)$$

また，一点 pt へと連続的に縮める写像 $q: T\mathbb{R}^N \to \mathrm{pt}$ に対して

$$q_! : K(T\mathbb{R}^N) \to K(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$$

とする。すなわち $q_! f_!$ は TX 上のベクトル束の〈差〉を一点上のベクトル束の〈差〉へと移す。そして一点上のベクトル束の〈差〉はベクトル束の次元の〈差〉で与えられる。

そして，$P: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ の共役作用素を $P^*: \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ として，それぞれの核を $\ker P := \{s \in \Gamma(E); Ps = 0\}$，$\ker P^* := \{s \in \Gamma(F); P^* s = 0\}$，像を $imP := \{Ps \in \Gamma(F); s \in \Gamma(E)\}$，余核を $\mathrm{coker} P := \{s \in \Gamma(F) \backslash imP\}$ と定義する。ここで，$\ker P^* = \mathrm{coker} P$ となることに注意しておく。また，核と余核が有限次元となる作用素を Fredholm 作用素と呼ぶ。

この定義のもとに，解析的指数を Fredholm 作用素である楕円微分作用素の核と余核の次元の差によって

$$\mathrm{ind} P := \dim(\ker P) - \dim(\ker P^*) = \dim(\ker P) - \dim(\mathrm{coker} P)$$

と定義する。また，位相幾何学的指数を

$$\text{top-ind}P := q_! f_! \sigma(P)$$

と定義する。このような定義の下で，解析的指数と位相幾何学的指数が等しくなる，すなわち

$$\operatorname{ind} P = \text{top-ind}\, P$$

が成立するという定理が Atiyah-Singer の指数定理である。

Chern 指数 ch は，0 次の K 群を偶数次のコホモロジーへと移すが，特に $\mathbb{C}^N$ 上の 0 次の K 群を 0 次のコホモロジー群へと移すので，

$$f_! \boldsymbol{\sigma}(P) \in K^0(T\,\mathbb{R}^N) = K^0(\mathbb{C}^N)$$

より

$$q_! f_! \boldsymbol{\sigma}(P) = q_! \mathrm{ch}(f_! \boldsymbol{\sigma}(P))$$

となる。ここで，$q_!$ は一点上のファイバー $T\,\mathbb{R}^N$ 上の積分である。$f_!$ は，ベクトル束 $p : T\,\mathbb{R}^N \to TX$ のファイバー上の積分をほどこして $T\,\mathbb{R}^N$ 上の積分を TX 上の積分にする項であるが，Chern 指数をとる作用との順序の交換によって K 理論の Thom 同型とコホモロジーの Thom 同型のずれの項を生み出す。これらのことを用いて，コンパクトで境界がなく，向きづけられた n 次元の多様体 X 上の楕円微分作用素 P について，

$$q_! f_! \boldsymbol{\sigma}(P) = (-1)^n \int_{TX} \mathrm{ch}\boldsymbol{\sigma}(P)\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TX^{\mathbb{C}})$$

が得られる。そして，$(-1)^n \int_{TX} \mathrm{ch}\boldsymbol{\sigma}(P)\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TX^{\mathbb{C}})$ に対してファイバー上の積分をほどこすことにより，$\pi: TX \to X$ として

$$(-1)^n \int_{TX} \mathrm{ch}\boldsymbol{\sigma}(P)\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TX^{\mathbb{C}}) = (-1)^{n(n+1)/2} \int_{X} \pi_! \mathrm{ch}\boldsymbol{\sigma}(P)\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TX^{\mathbb{C}})$$

となる。ただし，$\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TX^{\mathbb{C}})$ は，TX を複素化したものの Todd 類であるが，Todd 類は，コホモロジーの Thom 同型と K 理論の Thom 同型のずれから出てくる項で，Atiyah-Singer の指数定理の証明において重要な役割をはたしている。

複素ベクトル束の Todd 類について一言述べておく。接束 TX の曲率に $\dfrac{i}{2\pi}$ をかけたものを対角化したものの成分 x_i を考える。ないしそれと同値であるが，一般にどんなベクトル束も無限次元ユークリッド空間内の原点を通る平面の集合として構成される Grassman 多様体上の平面束に同型に埋め込むことができることが知られている（射影化）。そのため，TX をこのように射影化し，それを直線束 L_i に直和分解することができる。その直線束の 1 次の Chern 類 $x_i = c_1(L_i)$ を考える。複素化された $TX^{\mathbb{C}} = TX \otimes \mathbb{C}$ は，二つの互いに複素共役な（双対な）ベクトル束に直和分解でき，それぞれが複素直線束 L_i とその双対束となっている複素共役の直線束 $\overline{L_i}$ に直和分解される。ここで，$\overline{L_i}$ の 1 次の Chern 類 $x_i' = c_1(\overline{L_i})$ について，$x_i' = -x_i$ となることが知られている。また，一般にベクトル束 E と E' の直和に対して

$$\mathrm{Td}(E \oplus E') = \mathrm{Td}(E)\mathrm{Td}(E')$$

となる。したがって，$TX \otimes \mathbb{C}$ は

$$\mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TX^{\mathbb{C}}) = \mathrm{Td}_{\mathbb{C}}(TX \otimes \mathbb{C}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-e^{-x_i}} \frac{(-x_i)}{1-e^{x_i}} = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)} \right]^2$$

となる（Lawson, Michelsohn, 1989, Chapter III；Shanahan, 1978）。

結　語

Atiyah-Singer の指数定理は幾何学の定理である。すなわち，本論文の第 1 章で提案した，Kant の純粋理性のシステムからヒントを得た数学概念のネットワークでは対象性を顕わにする概念の領域に，それは属することになる。この幾何学の定理は，操作性を顕わにする概念の領域に属する代数学と解析学とが出会うところに成立すると言ってもよい。古くは Descartes の解析幾何学（現代の代数幾何学）に遡ることができるかもしれないが，直接的には，Riemann が Riemann 面という概念を導入することによって，面という幾何学的空間を解析関数や代数関数によって捉えるという見方を徹底化したところに Atiyah-Singer の指数定理が見出されたと言ってもよい。一方で，コホモロジー環や K 理論といった幾何学的空間に対する代数学的な反変関手，もう一方で，微分可能な無限次元の関数空間を考えてそこへの微分作用素の作用を考える。また，一方で，可換環ないし可換群の代数構造を取り出して扱いやすくする操作を見出し，もう一方で，Fredholm 作用素の核や余核をとるということによって，無限次元から有限次元を取り出す操作を見出した。さらに，歴史を振り返れば，一方で，20 世紀前半，（コ）ホモロジー論からその代数構造を明確化するために，圏論が誕生し，もう一方で，無限次元の関数空間は 19 世紀後半に無限集合論を生み出し，空間概念を位相の概念によって厳密化しつつ，関数解析の分野を発展させたということもある。Atiyah-Singer の指数定理では，微分作用素の主表象をとるということによって，微分作用素の解析的世界を K 理論の代数的世界へとつなげたのである。そして，そのことが幾何学的空間の局所的性質と大域的性質の間の一種の双対性を明確化したのである。以上のようなことを Riemann-Roch の定理から Atiyah-Singer の指数定理に至る歴史の中に見出せるのであるが，そこには Granger の言う操作－対象双対が大きく機能していることが見て取れるのである。そして，このような

ことからも，第 1 章で述べたような Kant の純粋理性のシステムから数学概念のネットワークへの移行のようなことを考えることは，数学の哲学にとって大切なことのように思われる。

参考文献

哲学

G.-G. Granger（1988）, *Pour la Connaissance philosophique,* Editions Odile Jacob；邦訳『哲学的認識のために』，植木哲也訳，法政大学出版局，1996。

G.-G. Granger（1994）, *Formes, opérations, objets,* J. Vrin.

G.-G. Granger（1999）, *La Pensé de l'espace,* Odile Jacob.

I. Hacking（2014）, *Why is there Philosophy of Mathematics,* Cambridge, 2014；邦訳『数学はなぜ哲学の問題になるのか』金子洋之，大西琢朗訳，森北出版，2017.

K. Manders（1989），"Domain extension and the philosophy of mathematics", *Journal of Philosophy* 86, pp.553-62.

J. Vuillemin（1962）, *La Philosophie de l'Algèbre I : Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'Algèbre moderne,* PUF.

近藤和敬（2013）「グランジェの科学認識論」金森修編『エピステモロジー－20 世紀フランスの科学思想史』，慶應大学出版会，第 1 章。

原田雅樹（2008）「現代数学における自然的概念および質的概念－作用素代数と非可換幾何学のグランジェの哲学による概念構成の分析－」，『仙台白百合女子大学紀要』，第 13 号，pp.55-77。

原田雅樹（2013）「ヴュイユマンにおける〈代数の哲学〉」，金森修編『エピステモロジー－20 世紀フランスの科学思想史』，慶應大学出版会，第 2 章，pp.107-181。

原田雅樹（2020）「現代数学における領域横断的な理論の発展－作用素環論を例に－」，『人文論究』，第 70 巻　第 3 号，関西学院大学，pp.19-45。

数学

M. F. Atiyah（1985），"Identifying Progress in Mathematics", in *ESF Conference in Colmar,* pp.24-41；（邦訳）「数学の進歩の確認」，『数学とは何か－アティヤの科学・数学論集－』，志賀浩二編訳，朝倉書店，2010, pp.67-87。

M. F. Atiyah（2001），"Mathematics in the 20th Century", *The American Mathematical Monthly,* vol.108, pp.654-666；（邦訳）「20 世紀における数学」，『数学とは何か－アティヤの科学・数学論集－』，志賀浩二編訳，朝倉書店，2010, pp.102-129。

M. F. Atiyah（2018）, *K-Theory,* Advanced Book Classics, CRC Press.

T. Gowers, J. -B. Green, I. Leader（ed.）（2008）, *The Princeton Companion to Mathematics,* Princeton University Press, Princeton；（邦訳）『プリンストン数学大全』，砂田利一，石井仁司他訳，朝倉書店，2015。

J. Dieudonné（1988）, *A History of Algebraic and Differential Topology : 1900-1960,* Birkhäuser, Boston/Basel.

H. M. Lawson, JR, M.-L. Michelsohn（1989）, *Spin Geometry,* Princton University Press, Princeton/New Jersey.

J. W. Milnor, J. D. Stasheff（1974）, *Characteristic Classes,* Princton University Press, Princeton/New Jersey；（邦訳）『特性類講義』，シュプリンガー数学クラシクス，2001。

J. P. Serre（1956）, «Géomtrie algébrique et géomtrie analytique», *Anales de l'Institut Fourier,* 6 : 1-42.

P. Shanahan（1978）, *The Atiyah-Singer Index Theorem,* Springer, Berlin/New York.

荒木捷朗（1970）「位相的 K-理論」，『数学』，1970 年 22 巻 1 号，pp.60-76。

小木曽啓示（2003）『代数曲線論』，朝倉書店。

中岡稔（1999）『位相幾何学－ホモロジー論』（復刊），共立出版。

中原幹夫（2001）『理論物理学のための幾何学とトポロジー II』，ピアソン・エデュケーション。

――文学部教授――