算数数学教育における系統的指導に関する一考察

A study on systematic teaching in mathematics education

中　尾　正　広 *

Abstract

In this paper, we study systematic teaching in mathematics education. In the first section, we show the objectives of the mathematics curriculum of elementary schools that were completely carried out in 2020 and explain the importance of understanding the essential learning contents from the perspective of systematic teaching, especially in a system in which different teachers present different subjects. In the second section, we show an example exercise of an extreme value problem of functions that must be solved using the relationships of the arithmetic mean and the geometric mean. This exercise gives lessons to university students that include the interest and validity of mathematics. We also note that the definition of the sphere in elementary schools is different from that in high schools and that this fact causes students to recognize that it is important to systematically learn the mathematics curriculum. We describe another example exercise that can be used as a problem for elementary school students or for high school students depending on its set of numerical values. In the third section, we conclude that university students obtaining a teacher's license for elementary school should essentially understand the systematic teaching of the mathematics curriculum of elementary schools.

キーワード：算数数学教育、系統的指導、本質的理解

1．準備

令和２年度から全面実施された小学校学習指導要領の算数科の目標は次のようなものである。([1])

算数科の目標

「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。

(1) 数量や図形などについての基礎的・基本的な概念や性質などを理解するとともに、日常の事象を数理的に処理する技能を身に付けるようにする。
(2) 日常の事象を数理的に捉え見通しをもち筋道を立てて考察する力、基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表したり目的に応じて柔軟に表したりする力を養う。
(3) 数学的活動の楽しさや数学のよさに気付き、学習を振り返ってよりよく問題解決しようとする態度、算数で学んだことを生活や学習に活用しようとする態度を養う。」

この中で謳われている「数学的な見方」「数学的な考え方」はそれぞれ、「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、根拠を基に筋道を立てて考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能等を関連付けながら、統合的・発展的に考えること」と説明されている。

また、今後実施予定の小学校高学年における教科担任制について、算数の項目に以下の内容が記されている。([2])

「算数：統計教育の充実など社会や日常生活の事

* Masahiro NAKAO　教授

象に結び付ける活動の充実や、プログラミング的思考の重視など筋道を立てて考える力の育成の重要性、学年が上がるにつれて内容が抽象的になり躓きが生じやすい状況を踏まえ、数学的活動を充実させ数学のよさに気付かせるような指導、児童一人一人に応じた指導、中学校の内容も視野に入れ児童に算数・数学に興味を持たせながら系統的な指導を行うことのできる専門性が必要とされている。」

これらの中の「基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的に考察する力」、「概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」、「系統的な指導を行うことができる専門性が必要とされている」、「統合的・発展的に考えること」という箇所に着目し、小学校から中学校、場合によっては高等学校の学習内容も視野に入れた系統的指導として、小学校教諭教育職員免許状取得希望の大学生が学ぶべきである考えられる学習内容について本論文で考察する。

2．準備

教育職員免許状取得のための科目で、学生にこれまで算数・数学を楽しいと思った場合はどんなときか、また、楽しくないと思った場合はどんなときかについて質問した時があった。楽しい場合について、複数の答えを示した学生が多かったがその中で、大部分の学生が「答えが得られた場合」を含めていた。また、楽しくない場合について、大部分の学生が「答えが得られなかった場合」を含めていた。特に単純に公式が利用できると考えていたにも関わらず、利用できない場合にその理由がわからず戸惑ったというケースが散見された。

小学校の学習内容を指導するときに、当たり前のことであるが、算数の未履修事項は、小学生にとって初めての学習内容である。算数の学習内容は大学生にとっては既に学習して理解しており、問題そのものは解答できる内容であると考えられる。大学生として、指導するという視点で学ぶべき内容としては、例えば、高等学校までに学習していない内容、高等学校までに学習している内容であっても公式通りに解いて答えが出る形式の問題でないもの、高等学校までの視点とは異なる視点での学習内容などを題材することが考えられ、それらを通して数学の面白さや有用性を学ぶことが重要である。

3．本論

次の［例題］は１変数関数の最大値最小値問題として扱うことができる問題であるが、(相加平均）≧（相乗平均）を利用することにより、２次関数の平方完成や微分法を利用することなく解答できることになる。一見すると典型的な関数の極値問題であるので、(相加平均）≧（相乗平均）を利用することをコメントしなければ、関数の極値問題として解答する受講生も多いのであるが、視点を変えることよる解法を学習することで数学の面白さや有用性を学習することができると考えられる。

また、次の［練習問題］は、２変数関数の最大値最小値問題となり、その意味では、通常高等学校では扱う内容ではないが、(相加平均）≧（相乗平均）を利用することにより解答することができる。この［練習問題］を学習することは、［例題］の学習からの系統的な学習であると捉えることができる。

［例題］周の長さが一定の長方形の中で、面積が最大となるのは正方形の場合であることを証明せよ。ただし、２つの正の数に関して、(相加平均）≧（相乗平均）を利用してもよい。
［解答］長方形の縦の長さを x、横の長さを y として、周の長さを4L とする。(2x＋2y＝4L)
このとき長方形の面積は xy である。
xy ≦{(x＋y)/2}^2＝ L^2
である。等号が成立するのは、x ＝ y のとき即ち正方形の場合である。

［練習問題］すべての辺の長さの合計が一定の直方体の中で、体積が最大となるのは立方体のときであることを証明せよ。ただし、３つの正の数に関して、(相加平均）≧（相乗平均）を利用してもよい。

定義の重要性について考えてみる。例えば、「二等辺三角形」「直方体」の定義についての指導上の留意点については、［中尾　2007］（[3]）で考察したとおりであるが、系統的学習の視点からとらえるときに、例えば、球の定義が高等学校での定義と小学校の定義が異なることに注目したい。大学生に「球の定義」を質問すると、「空間内で一点からの距離が等しい点の集まり」（球を球面と解釈している場合)、「空間内で１点からの距離が等しい点の集ま

りの球面の内部」(球を球体と解釈している) 等と解答することが多い。大学の直近の教育課程としての高等学校での学習内容で解答しているものと考えられる。彼らに小学校での球の定義を質問しても、最初に「ボールのようにどこから見ても円に見える形を球という」のような解答が得られることが少ない。そのため、授業で次のような問題を出題している。

［問題］　球の定義を述べよ。
⑴　高等学校以降の数学における定義
⑵　小学校の算数における定義
［解答］
⑴　三次元空間で、一定点からの距離が等しい点の軌跡で囲まれた部分。
⑵　ボールのようにどこから見ても円に見える形を球という。

この問題をきっかけに小学校から高等学校までの算数・数学の学習内容の系統性を考える機会とする受講生が多いように思われる。

問題の数値設定により小学校から高等学校で扱える問題設定となるものとして、次のような問題を授業で扱っている。数値の設定により小学校で扱える問題となる場合、小学校では扱えないが中学校で扱える問題となる場合、中学校では扱えないが高等学校で扱える問題、高等学校でも問題となる場合などが想定される。ここでは、数値が小学校で扱える問題設定としている。

［問題］(母線：円すいの底面上の１点と頂点を結んだ線分)
底面の円の半径が５cm、母線の長さが30 cm の円すいが与えられている。
底面の円周上の一点Ａから、円すいの側面上を一周して点Ａに戻ってくる曲線を考える。
このような曲線の長さの最小値を求めよ。(ヒント：展開図を考えよ。)
［解答］
円すいの頂点を点Ｏとして、母線ＯＡで切り開いた展開図を考える。
展開図は半径５cm の円と半径30 cm のおうぎがたである。
おうぎがたの中心角を x とすると、
$5 \times 2 \times \pi = 30 \times 2 \times \pi \times x \div 360$
となり、$x = 60$　おうぎがた中心角は60度となる。
円すいの側面上を一周して点Ａに戻ってくる曲線の長さの最小値となるのは、おうぎがたの上で２つの点Ａを直線で結んだ場合である。このときおうぎがたの中心角が60度であるので２点を結ぶ線分の長さは30 cm となる。(ヒント：正三角形) したがって求める最小値は30 cm である。

底面の円の半径と母線の長さの比を設定することで、側面の展開図となる扇型の中心が決定する。
1．扇型の中心角が60度の場合は、正三角形の一辺となるので、小学校でも扱える問題設定になる。
2．扇型の中心角が90度、120度の場合は、直角二等辺三角形の長さの関係で解答できるので、小学校では扱えないが中学校で扱える問題設定となる。
3．30度の場合、半角の公式を利用することで中学校では扱えないが高等学校で扱える問題設定となる。

4．まとめ

小学校の学習内容では、限定された数学内容に対して限られた手法でその内容を扱う必要がある。例えば、数について負の数を扱わず正の数のみが対象となる、計算についても方程式を扱わない等である。そのような中で算数数学の楽しさ面白さを示すためには学習内容の本質的理解が必須のものとなる。同形式の問題であったとしても、その数値設定により小学生でも扱える内容の問題となったり、中学生でも扱いない問題となったりする場合がある。今後実施予定の小学校での教科担任制の対象教科として算数科が含まれている現状を鑑みると、小学校から中学校、場合によっては高等学校の学習内容も視野に入れた系統的指導の重要性はこれまで以上に増すこととなり、その修得が必須のものであると考えられる。本稿で示された学習内容を活用し、その趣旨を理解することが、小学校教諭教育職員免許状取得希望の大学生が修得すべき系統的指導の本質的理解に寄与することができると期待している。本論文での考察が、ある意味での「研究ノート」として活用されれば幸いである。

参考文献

[1] 文部科学省（2018）「小学校学習指導要領解説（平成29年告示）　算数編」日本文教出版
[2]「義務教育9年間を見通した教科担任制の在り方について（報告）」（令和3年7月 義務教育9年間を見通した指導体制の在り方等に関する検討会議）
[3] 中尾正広　2007　数学教育を意識した小学校教育課程における「三角形」の指導について 聖和大学論集-教育学系第35号 A、pp. 93-95