現代数学における領域横断的な理論の発展

——作用素環論を例に——

原　田　雅　樹

序

数学の哲学とは何であろうか。20 世紀の初めころから長い間，数学の哲学は，いわゆる数学基礎論に関わる哲学的思索に限られてしまっているように思われる。しかし，数学基礎論の誕生のはるか前から，数学は，プラトン，デカルト，ライプニッツ，カントをはじめ，多くの哲学者たちの思索に伴走してきた。I. ハッキングが 2014 年に出版した『数学はなぜ哲学の問題になるか』（Hacking，2014）では，実際の数学の営みが何であるかが様々な例が挙げられながら紹介されている。例えば，それは，デカルトの主張する代数学的な単純で明晰判明であることを求める証明と，ライプニッツの主張する解析学的な，ないし計算による証明の違いを紹介しつつ，それらがそれぞれ現代数学の中にも引き継がれていることを紹介している。また，数学の応用といった場合に，カントの言うような数学の数学外部，特に物理学への応用を意味する場合だけでなく，デカルトが実行したような数学内部での応用，すなわち代数学ないし算術の幾何学への応用もあり，それは現代の代数幾何学と数論の関係にも見出される，ということが述べられたりしている。

このような数学の営みや数学概念の生成をいかに理解するのか。フランスの哲学者 J. カヴァイエス（1903-1944）は，1940 年頃，ゲーデルの不完全性定理が証明された後の数理哲学を射程に収めつつ，カントの超越論哲学やフッサールの現象学と対決しながら，〈概念の哲学〉を導入し，数学概念の構造と

その歴史的生成に光を当てることの重要性を主張した。

本論文では，〈概念の哲学〉を継承しつつも，数学概念の構造分析をなすために，カントの純粋理性の構造にもう一度，立ち戻りたい。すなわち，カントのカテゴリーと直観の純粋形式における構想力による図式化との関係を，数学内部の問題として捉え直す。そこでは，数学の様々な領域が絡み合い，浸透しあっている。そして，その状況を現代数学の一分野である作用素環論を用いて記述することを本論文は目指すことにする。なぜ，作用素環論を用いるかと言うと，第一に，それが解析学に属するものでありながら，代数学的な構造を顕在化させているからである。第二に，それが，誕生当初から数理物理学，特に無限自由度の量子力学である場の量子論や統計量子力学の数理と結びつきながら発展してきたからである。第三に，作用素環論を出発点に幾何学的直観に導かれながら，非可換幾何学の構成というプロジェクトが遂行されているからである。第四に，その動きが非可換幾何学からさらに数論への広がりも見せているからである。

1. カントの数学哲学の拡張と現代数学の諸領域

カントは『純粋理性批判』の中で，純粋悟性の悟性のカテゴリーを量，質，関係，様相とし，これらが感性の直観に与えられる現象に総合を与える。そして，カテゴリーの直観への適用の媒介となるのが構想力によって産出される図式である。数学に関して言えば，構想力によって内的感官の純粋直観形式である時間において算術が生成され，その時間に基づきながら外的感官の直観の純粋形式である空間において幾何学が生成される。さらにそこにおいてア・プリオリな数理物理学も純粋直観形式の図式化によって生まれる。このようにして算術，幾何学，さらには数理物理学がア・プリオリで〈総合〉的な判断に基づく知として成立し，それを媒介に，自然科学特に物理学の基礎となる実体性や因果律などの概念が由来するカテゴリーが現象に適用され，ニュートン力学などが成立するというのがカントの考え方である。

ここで，一つの作業仮説としてカントのこのような純粋理性の体系が数学の概念体系自体に内在すると考えてみたい。まず，カントの四つのカテゴリー量，質，関係，様相を集合論，圏論，代数学，解析学（確率論を含む）によって置き換えることを考えてみよう[1]。そして，直観の純粋形式において算術と幾何学，さらには数理物理学が産出されるこというカントの考え方において，算術を現代の数論に置き換えてみよう。もちろんこのようなカントの純粋理性の体系における様々な概念を，数学の様々な領域で置き換えることには反論もあろうし，そのまま正当化することはおそらくできないであろう。また，ここに上げた数学の諸領域が数学のすべての領域を網羅しているわけでないし，本論文で扱う作用素環論の構造を分析するために多少なりとも恣意的になっていることも否めない。

数学の諸領域というものは，それぞれの領域の境界が明確に存在し，それぞれが独立して自律的な発展を遂げるわけではない。それぞれの領域独自の性格付けを保ちながらも，互いに浸透しあい，いわば弁証法を引き起こしながら，数学の諸概念が生成され，数学が発展していくように見受けられる。これらのことに哲学的分析を加えるためにカントの非歴史的で固定的な体系をそのまま用いることは不可能であるので，それを柔軟にし，歴史的にすることが必要である。集合論，圏論，代数学，解析学をカテゴリーの枠組みに入れ，数論と幾何学，そして数理物理学を構想力によって構成されるものと考えると述べたが，それは，カントがしたように歴史的生成の動的側面を排除するわけではない。それらの間の関係を歴史的生成に組み入れるために，カントの枠組みを拡張し，柔軟に解釈することを本論文は目指す。

歴史的には，古代ギリシャ以来，算術ないし数論と幾何学は区別されたもの

---

(1)　圏論において，〈圏〉は〈対象〉と〈射〉からなり，〈対象〉は他の〈対象〉に〈射〉によって移される。また，〈圏〉は他の〈圏〉に〈関手〉によって移される。ここで，〈対象〉の集合の元のようなものは一般に考えないので，「すべての集合」というような集合論に出現する厄介な問題を考える必要がない。したがって〈射〉は集合の元を他の集合の元に移すようなことを考えるものではない。集合の〈圏〉になって初めて〈対象〉が元を持つことになる。

として，ピタゴラスやユークリッドに代表されるような人々によって探究されていたと言ってもよい。音楽は算術と結びつけられ，多面体の対称性や天文学は幾何学と結びつけられながら研究されていた。どちらにおいても，有限性そして有限な対称性が重んじられ，無限は無際限として忌み嫌われていた。その視点から，幾何学的な長さとして生じてしまう自然数一般の冪根といったものは，算術的には排除されていた。

近代になり，代数学がアラビア世界からもたらされると，代数方程式を記号操作によって解くことが行われるようになり，冪根によって書かれる解も数の体系に組み入れられるようになった。また，幾何学的対象を代数方程式によって表現する代数幾何学もデカルトらによって始められるようになる。幾何学に関しては，ガリレオの運動学と結びつけられるような運動幾何学や作図に基づいた総合幾何学も，代数幾何学と並行するような形で存在していた。

さらに，無限小や連続性といった曖昧な概念を残しながら，ニュートンによって力学的・幾何学的観点から，ライプニッツによって，より関数論的な観点から（関数の概念が明確化されてはいないが）微分積分，すなわち解析学が創始される。この解析学は，無限小や無限大の概念も取り込むようになる。

19 世紀初頭のガロワ群の発見により，古代ギリシャ以来，非常に幾何学的な性格付けが強かった対称性が代数学的な群として把握されるようになり，それに対応して，有理数を出発点とした冪乗根の添加といった数概念の拡大もなされるようになった。その後，19 世紀を通して代数学や解析学が大きく発展し，それが数論や幾何学の発展に大きく寄与するようになる。その中で，数学の基礎となるような無限を取り込む集合論が生まれた。20 世紀に入るとさらに代数学は抽象化されるようになれるが，位相幾何学の代数的側面を抽象化したホモロジー代数が生まれ，そこから数学概念の構造を顕在化させる圏論というものも生み出された。数学の基礎付けをなすと考えられる集合論も圏論も，具体的な数学からの抽象として誕生したのである。そして，そのような抽象化の過程の中で数の概念や幾何学的空間の概念は再構成されてきた。

数学概念の生成は，多くの場合，その背景にある形而上学的ともいえる認識

論と結びついていた。プラトン主義者達にとって，数学的対象はイデアの世界に実在するものであり，人間は弁証法を経て，それを知性によって〈観る〉ことができるようになるのであった。デカルトは，代数学を幾何学に融合したが，確実な知の基礎に観念の明晰判明性をおいたがゆえに，代数的に表現できない形，例えば円の運動と結びついたサイクロイド曲線のようなものを幾何学的対象から排除した。それに対し，ホッブスやスピノザにとって数学的対象，特に幾何学的対象とは運動や作図によって構成される〈総合幾何学〉と呼ばれるものであり，彼らは，デカルトのように幾何学の対象を代数的に表現できるものに閉じ込めなかった。また，デカルトの精神を受け継いだ彼の後継者たちは，ライプニッツが微分積分のために導入した無限小の概念を明晰判明でないとして受け入れなかった。デカルトと彼の後継者達にとって，知的直観によって把握できる観念こそが明晰判明な観念なのであり，そこに入らない曖昧な概念は真理として受け入れない。他方，ライプニッツは無限小のような概念は明晰判明でないとしても，その記号（シンボル）操作によって得られる知のあり方を受け入れることで，それを正当化する。

カントは，直観から知的直観を排除し，受動的な感性的直観のみを考える。そして，その固定化した純粋形式において，算術と幾何学では根源的にはカント的な意味での〈時間〉に即して，さらに幾何学では〈空間〉に即して直示的に対象が構成されるのに対し，代数学では対象の構成なしに記号的構成によってその操作性が主題化されるとする。ここで，カントが考えている幾何学は運動幾何学や総合幾何学である。カントにとって，対象の構成が経験に不可欠なものであるということも付記しておこう。カント以後，ドイツ観念論といわれる哲学的立場をとるフィヒテは，カントの固定化した体系を崩そうとそうとする。彼は，直観を感性的なものに閉じ込めることなく能動的な知的直観に広げ，対象の構成を経験に必要なものとせず，操作性そのものを自我の構成要素とする。

デカルト，ライプニッツ，カントの伝統を引き継ぎつつ，20 世紀前半に活躍する **E.** フッサールや **E.** カッシーラーは，19 世紀の数学の抽象化，特に群

論や集合論の誕生を視野に入れながら，彼らの哲学的立場を鮮明にしていく。カッシーラーは，その著作『実体概念と関数概念』や『シンボル形式の哲学』の中で，近代以降の科学では，実体概念が関数概念に置き換えられ，その進歩は直観から純化されてきた記号的構成によるものであるとした。それに対し，フッサールは，特に『形式論理学と超越論的論理学』の中で，〈多様体〉の記号的構成の基礎にあるそれを充実させるものとしての直観というものを考えた。

本論文で，集合論，圏論，代数学，解析をカントの純粋理性の体系の中のカテゴリーに入れ，数論，幾何学，数理物理学を純粋直観の形式において構成されるものとして考えることを試みる。これは一方のカテゴリーの側に対して記号的操作としての性格付けを相対的に強く与え，もう一方の純粋直観の形式における図式化の側に対して対象とそれに対する直観の再構成としての性格付けを相対的に強く与えて考えることを意味している。そして，そのような性格付けに注意を払いつつ，それぞれの数学領域における概念の相互干渉・相互浸透を歴史的な概念生成の中で検討していく。これは，数学概念は，形式と内容，ないし操作と対象の双対性によって成立しているが，その間には一種のずれがあり，そのずれが概念の生成を引き起こすという哲学者 G.-G. グランジェの考え方をカントの枠組みの中で捉え直そうとする試みでもある（Granger, 1988）。

このような視点のもと，本論文では，作用素環論をケース・スタディとしてとりあげる。作用素環論は一般に解析の領域に属する数学の一分野で，関数解析から派生してきた分野である。19 世紀末から集合論，位相論，測度論が誕生する中で，無限に対する考察が深まり，無限をいかに制御して数学の体系に取り込むかが考えられ，積分論，微分方程式論や積分方程式論が厳密に扱われるようになった。そして，それらの中に線形代数的な構造が存在することを明らかにするのが関数解析である。確率論も，この厳密な積分論と共に発展し，関数解析の中に包含されるようになる。また，積分方程式論から，理論物理学ないし数理物理学上にも広い応用を持つヒルベルト空間論も生まれる。ヒルベ

ルト空間では，ユークリッド空間と類比的に直交性や内積も積分によって定義される。さらに，1920 年代には量子力学が誕生し，それがヒルベルト空間論によって数学的に基礎づけられる。

そのような数学的物理学的文脈の中で，量子力学の明らかにした作用素として表現される物理量の非可換性を顕わに取り込みつつ，その作用素の集合に代数的な環という構造を与える作用素環論が誕生した。作用素環論の一部であるフォン・ノイマン環に可換性という条件を課すと，それが確率空間を与える可測空間と等値なものであることが明らかになった。そこで，可換性という条件を外して一般化すれば，それが非可換積分論になり，非可換確率論が成立するという考え方が生まれる。量子力学が本質的に確率論的なものであることもあり，1960 年代からフォン・ノイマン環を量子力学特に無限自由度の量子力学である場の量子論や統計量子力学の基礎付けに用いようという機運も高まった。一方，解析学としての作用素環論に代数学の側面，特に群構造が融合されることにより，無限次元の解析も進む。1970 年代，フォン・ノイマン環に自己同型群の構造を添加し，その群の構造を分析することによってフォン・ノイマン環の分類理論が，A. コンヌらによって完成された。また，フォン・ノイマン環には群を拡張した亜群の構造も入っている。以上のようなフォン・ノイマン環は非可換可測空間論であるという考え方をフォン・ノイマン環以外の作用素環に対しても広げて，非可換位相幾何学や非可換微分幾何学を構成しようというのがコンヌによって 1980 年代に始められた非可換幾何学のプロジェクトである。さらに，この非可換幾何学を数論の大問題であるリーマン予想の解決のために用いようとする研究もコンヌを中心にして現在なされている。

2. 作用素環論の構造分析

それでは，具体的に作用素環論の歴史を記述しつつ，その構造がどうなっているのかを見ていこう。ただし，本論文では，非可換幾何学について詳述できないこと，また，その数論への応用，特にリーマン予想解決へ向けてのプロジ

ェクトについては触れることができないことを断っておく。

a. 作用素環論前史

19 世紀前半，線形代数が発達し，それが 3 次元を超える n 次元空間の線形変換の理論を与えたことから一般の n 次元空間の幾何学の可能性も開かれていく。さらに，解析の分野では振動という物理現象と結びつけられながら，周期関数は三角関数の無限級数によって表現されることが，J. B. J. フーリエ（1768-1830）によって示された（フーリエ級数)。そして，その無限級数和を作るそれぞれの三角関数を直交基底とした無限次元の線形な関数空間というものも考えられるようになる。これらのことが 3 次元以下の空間のみが幾何学的空間であるという考え方から数学者を解放し，任意の次元，さらには無限次元の幾何学への道が開かれた。

19 世紀半ば，J. W. R. デデキント（1831-1916）らによって，19 世紀初頭に見出されていたガロワ理論が数学界において日の目を見ることになる。ガロワ（1811-1832）の実行した代数方程式の解の入れ替えの操作は〈群〉という概念によって明確化される。ガロワ理論の本質は，デデキントが導入した加減乗除の四則演算によって閉じている〈体〉という概念を用いると次のようになる。置換を行う離散群を部分群とそれによる剰余群に分解していくことを繰り返すことで，もとの群から単位元のみからなる群に至る部分群の系列ができる。そして，それぞれの部分群が，ある体をそれ自身に加減乗除を保存しながら移す写像（環準同型）として作用した際に（自己同型群)，固定される部分体が見つかる。部分群が小さくなるほどその固定体は大きくなる。このようにして，部分群の系列と固定体の拡大体としての系列が，包含関係を逆にして対応させられる。このガロワの発想は，それ以後の数学史の様々なところで現れる。

1854 年,「幾何学の基礎をなす仮説について」というタイトルの教授資格取得講演の中で，B. リーマン（1826-1866）は空間概念のために〈多様体〉という概念（現代数学における多様体の概念とは異なり，現代の集合や位相に連なる概念）を導入した。そして，K. ワイエルシュトラス（1815-1897）やデ

デキントらを中心とした数学的証明の厳密化や，解析学の代数学化・算術化という流れの中で，集合論が主としてデデキントと G. カントール（1845-1918）によって誕生せられる。デデキントは，一つ一つの関数を考えるのではなく，加法や乗法といった代数演算によって閉じた集合を考えた。すなわち，代数関数の集合に体（有理数や実数のように加減乗除の四則演算で閉じた集合）や環（整数のように加減乗の演算で閉じた集合），イデアル（整数における偶数や 3 の倍数のように加減によって閉じた環の部分で，かつ環を乗ずることによっても閉じた集合），加群（環上の線形空間）といった代数構造を入れ，代数関数体や代数関数環などの概念を定義したのである。彼はまた，著作『数とは何か』（1972-1982）という著作の中で，集合論によりながら整数を基礎づけようとする。「デデキントが代数学や整数論の問題を解くため，また整数の概念に基礎をおくために集合論的な概念を導入したのに対し，カントールの集合論的思想は三角関数の無限級数の研究から起こる」（デュガク，1985，p.433）。カントールはデデキントよりも解析的な手法をとりながら，無限集合について考える。

無限集合は有限集合と同じように扱うことはできない。集合のサイズを比較する基準には一般に二種類あるが，この二つの基準は，有限集合に適用される場合は一致するが，無限集合に適応される場合には一致しない。その一つは，ある集合の要素を他の集合の要素と対にすることができるか否かと問う「対応づけ（写像変換 correlation）」基準である。もう一つは，ある集合の要素が全て他の集合に属するか否かを問う「部分集合」基準である（ムーア，2012, p.266）。

「対応づけ」基準によって測られた無限集合のサイズは，濃度と呼ばれるようになり，現在まで通常の数学では無限のサイズを測るためにこれが採用されている。1891 年に，カントールは，いわゆる「対角線論法」によって，実数の濃度は自然数の濃度よりも大きいことを証明した。自然数，整数，有理数それぞれの集合の濃度はみな等しく，それらは可算無限の濃度を持っていると言われる。それに対し，実数の濃度は非可算無限の濃度を持っていると言われ

る。そして，また，同様に集合の冪集合，すなわち部分集合の集合全体は元の集合よりもサイズが大きくなるが，可算無限の濃度を持つ集合の冪集合は非可算無限の濃度を持つ集合になることも明らかになった。

微分積分の計算が実行される中で，ライプニッツによって導入された曖昧な無限小という概念が，19 世紀初頭，A. L. コーシー（1789-1857）によって極限という概念を用いて明確に表現されるようになった。そして，上述したような形で，無限集合の概念が明確にされていく。さらに無限集合の冪集合には位相（トポロジー）や測度といった構造が入れられていく。20 世紀の解析学において，位相空間の概念の上に関数の連続性の概念が，測度をもつ位相空間すなわち可測空間の概念の上に積分論そして確率論が厳密に基礎づけられていくのである。

解析学に見出される線形代数的構造を顕わにするのが関数解析である。換言すると，関数解析は無限次元の線形代数ということができるであろう。関数解析の重要な分野であるフーリエ解析は無限次元の線形の関数空間の理論であり，関数解析のスペクトル理論は，無限次元の線形代数における固有値問題であると言える(2)。また，積分は連続無限次元の行列の対角成分の和，すなわちトレースと理解される。そして積分論における測度の変換についてのラドン=ニコディムの定理は，連続無限次元の線形空間の座標変換についての定理であると言える。関数解析の基礎付けとその発展のためには，集合論的な一般位相の理論の発展や測度論の発展が不可欠であった。また，線形代数や幾何学的空間との類比によりながら，その解の関数空間に距離空間としてのノルムや内積が積分計算によって入るヒルベルト空間論が，積分方程式論を出発点に D. ヒルベルト（1862-1943）によって導入された。このヒルベルト空間は，関数解析において非常に重要な具体的な関数空間となる（Michel，1992，Chap. XIII）。

---

(2) A を作用素，I を単位作用素とした際，$A-\lambda I$ が可逆となるような複素数 λ の集合をレゾルベント集合という。複素数全体の集合からレゾルベント集合を除いたものをスペクトルの集合という。

他方，物理学においては，1926年にW．ハイゼンベルク（1901-1976）が線形代数的な数学を用いた行列力学を，翌年にE．シュレーディンガー（1987-1961）が微分方程式論を駆使した波動力学を生み出し，P．ディラック（1902-1984）がその二つの定式が座標変換による違いにしか過ぎないことを変換理論で示すことで，量子力学の基本的な理論が完成させられた。そして，1932年，数学者J．フォン・ノイマン（1903-1957）がヒルベルト空間論によって，量子力学に数学的な基礎づけを与える。しかし，フォン・ノイマンはその数学的基礎づけには満足せず，F．J．マレー（1911-1996）と共に量子論理の構築へと向かう。量子論理は量子力学と整合的な論理学の構築のためには射影作用素が重要であることを顕わにする。しばらく後，1934年頃から，フォン・ノイマンは，量子論理の研究を離れて，マレーと共に作用素環論の創始へと向かい，それによって量子力学を数学的基礎づける。特に，射影作用素の集合が非常に良い性質，すなわち完備束という性質をもつ，ノルム位相よりも弱い位相で完備な作用素環にフォン・ノイマンは目を付け，それが量子力学の数学的基礎づけに役立つであろうと考える(3)。そのような作用素環は後にフォン・ノイマン環と呼ばれるようになる。

b. 作用素環論の歴史

作用素環論とは，ヒルベルト空間上の作用素から作用素そのものを主題化し，その作用素の集合に位相を入れ，環の構造を入れる関数解析の一分野である。作用素環は，線形代数における行列を無限次元に拡張したものとして考えることもできる。この理論の構築において，証明の方法はまさしく解析的なものであるが，得られる結果は代数構造が顕在化されるものになっている。量子物理学において，位置や運動量，あるいは方向の異なるスピンといった物理量は一般的に非可換であり，ヒルベルト空間論上の作用素として表現される。また，一般的に観測値は連続的な実数値を取らずに，離散的な実数値をとる。作

(3)　完備束とは，部分集合が常に上限と下限を持つ半順序集合のことである。

用素環論は，一般的な作用素の持つ非可換性という性質，また，そのスペクトルの離散性に着目して，それまで可換な関数環として捉えられていたものを非可換な作用素環に置き換えるのである。特にそこでの積分論は非可換積分論になる。作用素に位相や環といった構造を入れ，さらにはガロワ理論に連なる自己同型群によってその作用素環の構造解析をすることで，単なる無限集合からは出てこない新たな無限次元の性質も明らかになったという側面も存在する。20 世紀の半ば過ぎからは，無限自由度の系の量子力学である場の量子論（量子力学と特殊相対性理論を統合した物理学の理論）を，この作用素環論によって基礎づけることを目指した代数的場の量子論が誕生し，作用素環論の発展を促してきた。ただし，代数的場の量子論自体は，今日に至るまで，自由粒子しか扱うことができず，今日に至るまで物理学理論としての進展はあまり見せていない。

作用素環の一般的なものとしてバナッハ環というものを考えることができるが，それに含まれる代表的なものとして，C*環やそれに含まれるフォン・ノイマン環というものがある。バナッハ環とは，共役をとる作用によって閉じた有界な線形作用素（ベクトル空間の元に作用させた際，得られたベクトルの大きさが有限倍にとどまるような作用素）が生成する環で，作用素のノルム位相（最も強い位相）で完備な環である[(4)]。C*環とは，バナッハ環で，ノルムの二乗が複素数と同じよい性質（x をバナッハ環の元として，$\|x^*x\| = \|x\|^2$ が成立する）をもった環である。フォン・ノイマン環とは，C*環で，ノルム位相よりも弱い位相（強位相など）で完備な環である。また，フォン・ノイマン環には，自身と可換となる有界な作用素環に対して可換となる有界な作用素環は自身と一致するという著しい性質がある。また，1943 年にゲルファントとナイマルクは，C*環はヒルベルト空間上の作用素として表現できることを示した。

---

(4)　ベクトル x と y の内積 $\langle x, y\rangle$ を考え，作用素 H を作用させた際，$\langle x, Hy\rangle = \langle H^*x, y\rangle$ が成立するとき，H^* を H の共役作用素であると言う。有限次元の線形代数における行列では転置行列を取って，さらにそれぞれの成分で複素共役を取ったものがそれに相当する。

このような作用素環論，特に C*環は幾何学的空間を再構成する契機を与えることにもなる。与えられた可換な C*環の極大イデアルを考え，C*環の極大イデアルによる剰余を取る環準同型写像（環の性質を保存する写像）をとると，それは C*環のスペクトル集合（線形代数における行列の固有値の無限次元バージョン）を複素数の集合として与える。この C*環から極大イデアルによる剰余環への環準同型写像の集合を指標空間（スペクトル空間）と呼ぶ。そして，極大イデアルの集合と環準同型写像の集合としての指標空間は一対一に対応しており，その集合は指標空間を構成する〈点〉の集合として見ることができる。さらにイデアルの集合に位相を入れることもできる。そして，可換な C*環はこの指標空間上の複素数値連続関数の集合の生成する環として同型であることが，1943 年にゲルファントとナイマルクによって示された。この C*環から指標空間上の複素数値連続関数の集合への変換はゲルファント変換と呼ばれる。ゲルファント変換は，この後に誕生する圏論の立場からすると，〈関手〉の〈射〉である〈自然変換〉の典型的な例となっている。このような極大イデアルを，幾何学的空間を構成する点，環を幾何学的空間として見る見方は，素イデアルを〈点もどき〉として見，圏論の概念を駆使して代数幾何学を再構成した A. グロタンディークにも大きな影響を与えることになる。

可換な C*環はこの指標空間上の連続関数の集合の生成する環として表現され，この指標空間のなす位相空間と同値であるというゲルファント=ナイマルクの定理に加えて，可換な C*環上の有限生成される射影加群は位相空間上のベクトル束と同値であるというセール=スワンの定理がある。圏論の言葉を使えば，位相空間上のベクトル束の〈圏〉から可換な C*環上の有限生成される射影加群の〈圏〉への〈関手〉は，二つの同値な〈圏〉の間の〈関手〉となっている。これらのことを勘案すると，可換な C*環は位相空間と同型であることが分かり，可換な C*環の理論は位相幾何学と等価なものであることが分かる。同様にして，可換なフォン・ノイマン環は，可測空間と同型であり，その理論は実解析における確率空間と等価なものになる。

A. コンヌは，このような可換な作用素環が幾何学的空間と等価なものであ

るという事実から出発して，その可換性という条件を取り除いて，非可換空間というものを仮想的に措定し，非可換幾何学を創始する。C*環の理論は非可換位相幾何学として解釈されるが，ここでは通常の古典的位相幾何学で用いられる K 群が主な導き手となる。位相幾何学的空間は K 群をその構造として持っているが，それと双対的な代数的な K 群も存在する。C*環にも位相そして無限次元を考慮するという意味で解析的に代数的な K 群を入れることができるので，それをもって，非可換位相位相幾何学の K 群と考えるのである[5]。また，フォン・ノイマン環（C*環に含まれる）の理論を非可換可測空間における非可換積分論ないし非可換確率論として解釈するのである。そして，通常の確率空間上のエルゴード理論を拡張して，非可換エルゴード理論も考える[6]。さらにコンヌは，微分演算を作用素との交換関係で入れ，微分位相幾何学において重要なド・ラム de Rham コホモロジーの代わりに，サイクリック・コホモロジーを導入し，また，無限小距離の逆を一般化されたディラック作用素（もともとのディラック作用素は，物理学者ディラックによって 1930 年頃に生み出された相対論的量子力学の中で導入された）によって入れることで，非可換微分幾何学を構成する。ここでは，通常の古典的な微分位相幾何学において非常に重要なアティヤ=シンガーの指数定理の非可換バージョンを見出すこともできる[7]。このようなコンヌによる非可換幾何学は，作用素環論

---

(5) 位相幾何学的 K 群が位相空間からアーベル圏への反変関手であるのに対し，代数的な K 群は可換環ないし C*環からアーベル圏への共変関手となっている。位相空間の K 群とその上の環としての連続関数の集合の代数的な K 群とは双対的に同値となる。

(6) エルゴード理論とは 1-パラメータ群（時間）による〈力学系〉が，確率空間の同じ点を通らず（交叉したり接したりせず），その空間内を一様に動いていくような状態についての理論である。

(7) アティヤ=シンガーの指数定理とは，微分位相幾何学において，その一般には曲がった幾何学的空間の持つ局所的な微分幾何学的性質と，その幾何学的空間上の連続関数の無限次元の線形の関数空間に適切な作用素（フレドホルム作用素）を作用させて取り出す有限次元の関数空間の次元数という大域的性質とを関係づける非常に重要な定理である。代数幾何学において重要なリーマン=ロッホの定理の一般化とも言える。指数定理は，位相幾何学的 K 群と深い関係を持つ。コンヌは，C*環に入れた K 群とその双対である K ホモロジーや，サイクリック・コホモロジーを用いながら，このアティヤ=シンガーの指数定理の非可換バージョンを構成した。

の幾何学的側面を顕わにするものとして，現代数学の一分野になっている（Connes, 1994）。

c. フォン・ノイマン環の構造

フォン・ノイマン環について詳しく見ることにする。関数解析における積分における基本的なリース=マルコフの定理を見よう。この定理は次のようなものである。Γ を空でない集合，μ を Γ の集合族の測度，$L^{\infty}(\Gamma, \mu)$ を有限可測空間 $\{\Gamma, \mu\}$ $(\mu(\Gamma) < \infty)$ 上の有界な関数の集合とする。この時，すべての有界な線形汎関数は積分の形で与えられる。すなわち，ϕ を $L^{\infty}(\Gamma, \mu)$ に対する有界な線形汎関数とすれば，それは

$$\phi(f) = \int_{\Gamma} f(\gamma) d\,\mu(\gamma)$$

という複素数値を与える積分の形で書ける。ただし γ は集合 Γ の元，f は $L^{\infty}(\Gamma, \mu)$ の元である。またすべての有限可測空間上で有界な関数は，その上で可積分関数 $L^{1}(\Gamma, \mu)$ であることに注意しておこう。全空間の測度を 1 とする $(\mu(\Gamma) = 1)$ ならば，この可測空間は確率空間となり，$\phi(f)$ は関数 $f(\gamma)$ の期待値を与える。

非可換積分論ないし，非可換可測空間上でもこれと同様なことが成立する。M をフォン・ノイマン環とすると，M を双対空間とする集合 M_{*}（前双対空間）の元 ϕ が〈ウェイト weight〉として次のように与えられ，$\phi(x)$ が正の有限の値

$$\phi(x) = \tau(h_{\phi} x)$$

を与える。ここで，x はフォン・ノイマン環 M の元，τ はトレース trace である。また，h_{ϕ} はトレースを有限とする ϕ に伴うエルミート作用素（スペクトルが実数になるような作用素）であり，関数解析における可測空間の測度 μ

に対応するものである。h_ϕ のトレースが 1 ならば，$\phi(x)$ は非可換確率論での期待値を与える定式となる。このように，非可換積分論において関数解析におけるリース=マルコフの定理に対応するものは，トレースを用いた代数的な形式を持つものである。また，この期待値の定式は，量子統計力学で用いられるものでもある。h_ϕ は量子統計力学におけるグランドカノニカル分布の確率密度

$$w = \frac{\exp\left(-\frac{H}{kT}\right)}{trace\left(\exp\left(-\frac{H}{kT}\right)\right)}$$

に対応する。ここで，k はボルツマン定数，T は絶対温度，H はハミルトニアンを表現する作用素である。

フォン・ノイマン環には群の構造が入る。その最も基本的なものが 1-パラメータ自己同型群であり，それを作用させても，ウェイトが不変になるようなものことをモジュラー自己同型群と呼ぶ。すなわち，t を実数として

$$\phi = \phi \circ {\sigma_t}^{\phi}$$

を満たす ${\sigma_t}^{\phi}$ のことをモジュラー自己同型群という(8)。ハイゼンベルク描像をとる量子統計力学において，物理量の初期状態 $A(0)$ の時間発展 $A(t)$ は，

$$A(t) = \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right)A(0)\exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right)$$

として与えられる。ここで，$\hbar$ はプランク定数，t は時間である。モジュラー自己同型群によるフォン・ノイマン環の変換 ${\sigma_t}^{\phi}(x)$ は，この $A(t)$ に対応する。したがって，非可換確率論における期待値 $\phi(x) = \phi({\sigma_t}^{\phi}(x))$ は，量子統計力学における物理量 A の期待値

⑻　作用素環論に自己同型群や自己同型写像が頻繁に出てくるが，無限次元であるので，全体が真の部分に一対一に写像される場合があることを忘れてはならない。

$$\widehat{A(t)} = trace(wA(t)) = trace(wA(0))$$

に対応する。

ここで，A と B を二つの物理量として $A(t)B(0)$ の期待値

$$\widehat{A(t)B(0)} = \frac{trace\left(\exp\left(-\frac{H}{kT}\right)\exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right)A(0)\exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right)B(0)\right)}{trace\left(\exp\left(-\frac{H}{kT}\right)\right)}$$

を見てみよう。見やすくするために，プランク定数 $\hbar$ を 1 とし，$\beta = \dfrac{1}{kT}$ とすると，

$$\widehat{A(t)B(0)} = \frac{trace(\exp(-\beta H)\exp(itH)A(0)\exp(-itH)B(0)}{trace(\exp(-\beta H))}$$

となる。ここで，t を複素変数 z の実軸と考え，その z に $t - i\beta$ を代入すると考える。すなわち形式的に t を新たに $t - i\beta$ とおくと，この分子は，

$$\begin{aligned}&trace(\exp(itH)A(0)\exp(-itH)\exp(-\beta H)B(0))\\&\qquad = trace(\exp(-\beta H)B(0)\exp(itH)A(0)\exp(-itH))\end{aligned}$$

となる[9]。すなわち $trace(wA(t)B(0))$ は $trace(wB(0)A(t))$ となる。これに対応して，

$$0 \leq \beta \leq 1$$

を考えると，多少の符号の入れ替えは必要とするが，次のようなモジュラー条

---

(9) 形式的には，β すなわち温度の逆数は，虚数時間として考えられる。

件，ないし KMS（Kubo-Martin-Shwinger）境界条件が要請される[(10)]。x と y をスペクトルを非負とするフォン・ノイマン環 M_+ の元で，適当な条件を満たすものとする[(11)]。また，複素平面内で実軸$\mathbb{R}$と$\mathbb{R}+i$ に挟まれた開領域 $\bar{D}$とする。この領域の閉包 $\overline{D}$ で定義され，D で正則な有界な連続関数 F で，境界条件

$$F(t) = \phi(\sigma_t{}^{\phi}(x)y)$$
$$F(t+i) = \phi(y\,\sigma_t{}^{\phi}(x))$$

を満たすものが存在する（ただし，$t \in \mathbb{R}$）[(12)]。

次に，コンヌによって導入された非可換ラドン=ニコディムの定理について述べる。積分論における測度の変換について，ラドン=ニコディムの定理という重要な定理がある。非可換積分においては，ウェイト ϕ をウェイト ψ に変換することを考える。この変換は，コサイクル微分ないしコンヌのコサイクルと呼ばれる 1-パラメータの作用素で，

$$u_t = (D\psi : D\phi)_t$$

モジュラー自己同型群との関係について

$$u_{t+s} = u_t\,\sigma_t{}^{\phi}(u_s)$$
$$\sigma_t{}^{\psi}(x) = u_t\,\sigma_t{}^{\phi}(x)\,u_t{}^*$$

三つのウェイト χ, ϕ, ψ について

(10) 上の式で，ハミルトニアン H に負の符号をつければ，符号の部分も KMS 条件の通常の定式化と整合性が取れるようになる。
(11) $x, y \in n_\phi \cap n_\phi{}^*$。ここで，$n_\phi = \{x \in M_+ : \phi(xx^*) < \infty\}$ とする。
(12) 作用素環論と量子統計力学の関係については Bratteli and Robinson（2013）に詳しい。

$$(D\psi : D\chi)_t = (D\psi : D\phi)_t (D\phi : D\chi)_t$$

といった関係を満たす。また，ϕ に伴い，非可換積分の測度であるエルミート作用素 h_ϕ は，ψ に伴うエルミート作用素 h_ψ に

$$h_\psi = u_{it} h_\phi$$

と変換される。ここで，x はフォン・ノイマン環の元，t，s は実数を値にとるパラメータである。このコサイクル微分は亜群を生成し，その意味で外部的ユニタリー作用素となっている。亜群とは群を一般化した概念である。群はある対象の集合の元に作用して同一の対象の集合内の元に変換させるが，亜群はある対象の集合の元に作用して異なる対象の集合の元に変換させる。作用を受ける対象の集合と作用によって生成される対象の集合が異なるのである。圏論的な言い方をすると，群において〈対象〉は一つであるが，亜群においてそれは複数あり，〈射〉としての作用によって一つの〈対象〉は別の〈対象〉に移るのである。ここでの場合，どういうことであろうか。あるウェイトを不変とするフォン・ノイマン環が，あるモジュラー自己同型群によって生成される。それを，別のウェイトを不変とするフォン・ノイマン環が別のモジュラー自己同型群によって時間発展的に（一つの実数のパラメータによって）生成されるように変換する作用がコサイクル微分である。

そして，このコサイクル微分によるウェイトの変換は，量子統計力学において，ハミルトニアンの変化によって引き起こされる確率密度の変換と，ハイゼンベルク描像の物理量状態の時間発展の仕方の変換に対応する。したがって，このコサイクル微分を，

$$(D\psi : D\phi)_t = e^{itH_\psi} e^{-itH_\phi}$$

のように書くこともできるであろう。ただし，H_ϕ と H_ψ はそれぞれ，モジュ

ラー自己同型群 $\sigma_t{}^{\phi}$ と $\sigma_t{}^{\psi}$ を生み出すハミルトニアンである。

フォン・ノイマン環には，接合積によって局所コンパクト群 G（例えば実数体$\mathbb{R}$）の構造も入れることができる。局所コンパクト群 G をフォン・ノイマン環 M に自己同型群 α で作用させることを考えよう。G の元 g によってパラメータづけされ，M に作用するこの 1-パラメータ自己同型群を α_g と書く。ヒルベルト空間 ξ も $\xi(g)$ と G の元によってパラメータづけし，この空間の上で M の表現 π_α と G のユニタリー表現 λ_g を，x を M の元として

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(g) := \alpha_g^{-1}(x)\xi(g)$$
$$(\lambda_g\xi)(h) := \xi(g^{-1}h)$$

と定義する。そこで，接合積 $M \rtimes_\alpha G$ は π_α と λ_g を用いて

$$M \rtimes_\alpha G := (\pi_\alpha(M) \vee \{\lambda_g\}_{g\in G})''$$ (13)

と定義される。接合積は，フォン・ノイマン環に入れる重要な群構造であり，その構造解析に非常に重要な役割を果たす。

最後に，フォン・ノイマン環の分類について述べることにする。これを考えることによって，われわれは無限の持つ構造，単なる集合論では出てこない無限の構造に向き合わされることになる。ところで，射影作用素 p とは，

$$p = p^*$$
$$p^2 = p$$

を満たすような作用素のことである(14)。フォン・ノイマン環はこの射影作用

(13)　$(\cdots\cdots)''$ は強位相で完備化して，フォン・ノイマン環を生成することを意味する。

(14)　ヒルベルト空間上の射影作用素は，有限次元の実ユークリッド空間での直交射影作用素の複素無限次元バージョンに相当する。有限次元の実ユークリッド空間での↗

素が完備束になるという非常に良い性質をもっており，この射影作用素の次元によってフォン・ノイマン環はI型，II型，III型と大きく三つに分類され，さらにそれぞれの型が二つないしそれ以上に分類される。

I型のフォン・ノイマン環は，その射影作用素の次元が離散的なものであり，あるヒルベルト空間上の有界作用素全体のなす環と同型である。I型はI_n型とI_∞型とに分類される。I_n型において射影作用素の次元は$\{0, 1, 2, ..., n\}$というように離散的かつ有限であり，成分を複素数とする$n \times n$の正方行列$M_n(\mathbb{C})$と同型である。それに対し，I_∞型においてはそれが$\{0, 1, 2, ..., \infty\}$というように離散的かつ無限であり，$M_\infty(\mathbb{C})$と同型である。また，I_∞型フォン・ノイマン環をあるヒルベルト空間上の作用素として表現するならば，それは，そのヒルベルト空間上の有界作用素全体と同型になる(15)。

II型は，その射影作用素の次元が連続的なものであり，次元が0から1までの実数値を取るII_1型と，0から無限大までの実数値を取るII_∞型とに分類される。なお，II_∞型は，I_∞型とII_1型のテンソル積を取ったものに等しい。

III型は，0以外の有限次元の射影作用素を持たないフォン・ノイマン環で，射影作用素は0と次元が無限の単位Iのみである。換言すると，0でないすべての射影作用素は，単位に同値となる。この時，射影作用素pとqが同値であるとは，$p = u^*u$と$q = uu^*$を満たすような部分等長作用素uが存在することである(16)。III型はIII_0型，III_λ型（$0 < \lambda < 1$），III_1型に分類されるが，これについては後述する。

このようにフォン・ノイマン環を分類したうえで，その有限性と無限性との間に境界を設けるのに二通りある。I型とII型は半有限と言われるのに対し，III型は純無限と言われる。射影作用素の次元が必ず有限となるI_n型とII_1型

↘ 直交射影作用素とは，行列として空間内のベクトルに作用することで，それを，次元を低くした平面に直交射影するものである。

(15) I型の記述で，簡単のために行列形式で書いたものは，AF環という有限近似できる性質の良いものについての表現であり，最も一般的なものではない。

(16) 部分等長作用素とは，その共役作用素との積が射影作用素となるような作用素のことである。

は有限と言われ，無限次元の射影作用素を持つ I_∞ 型，II_∞ 型，III 型は固有無限と言われる。III 型のフォン・ノイマン環がわれわれに示す無限はいかなる有限部分も持たないといった，通常の集合論からは出てこないような無限である。

III 型フォン・ノイマン環の分類はコンヌによって完成されたが，そこでは上述した接合積が用いられている。III 型フォン・ノイマン環は，局所コンパクト群である実数体$\mathbb{R}$を加法群として II_∞ 型フォン・ノイマン環に接合積によって入れることによって構成されている。すなわち，N を II_∞ 型フォン・ノイマン環とし，θ を N に加法群$\mathbb{R}$を作用させる自己同型群とすると，III 型フォン・ノイマン環 M は，接合積によって

$$M = N \rtimes_\theta \mathbb{R}$$

と分解できる。ここで，自己同芸群 θ は実数 s でパラメータづけされた θ_s として，

$$\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$$

と与えられる。ただし，τ はトレースである。

N の部分環で，N の全体と可換であるもの（N の中心）を C_N と書き，それに実数体$\mathbb{R}$を θ で$\mathbb{R}^\theta \curvearrowright C_N$ と作用させて接合積 $C_N \rtimes_\theta \mathbb{R}$を作ることを考える。これを M の随伴流と呼ぶ。III 型フォン・ノイマン環は，この随伴流の持つ周期の性質によって分類される。$C_N \rtimes_\theta \mathbb{R}$が周期を持ち，その周期が $-\log\lambda$ である時，M は III_λ $(0 < \lambda < 1)$ であると言う。$C_N \rtimes_\theta \mathbb{R}$が複素数 C の時，M は III_1 であると言う。$C_N \rtimes_\theta \mathbb{R}$が周期的でなく，エルゴード的である時，$M$ は III_0 であると言う。

随伴流の周期性について説明しておこう。R をフォン・ノイマン環，$\mathrm{Aut}(R)$ を R から R への自己同型群の全体とする。そして，$U(R)$ を R に含まれているユニタリー作用素，x をフォン・ノイマン環 R の元，u を $U(R)$ の元

として作用素 $\mathrm{Ad}(u)$ を $\mathrm{Ad}(u)x = uxu^*$ と定義して，内部的自己同型群 $\mathrm{Int}(R)$ を

$$\mathrm{Int}(R) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(R) :^{\exists} u \in U(R) \text{ s.t. } \alpha = \mathrm{Ad}(u)\}$$

と定義する。要するに，フォン・ノイマン環から同じフォン・ノイマン環に移す自己同型群のうち，そのフォン・ノイマン環に含まれているユニタリー作用素によってユニタリー変換できるものを内部的自己同型群とするのである。因みに，I 型，II 型のフォン・ノイマン環における自己同型群はすべて内部的である。

II_∞ 型フォン・ノイマン環 N に自己同型群 θ によって$\mathbb{R}$を作用させて接合積を入れて III 型フォン・ノイマン環 M を構成することを考える。この接合積に双対的にもう一度接合積を入れると，N と同型のフォン・ノイマン環が得られることが知られている。N のトレースを τ として θ によって接合積を入れるわけだが，それで得られた M に対して τ の双対ウェイト $\hat{\tau} = \phi$ を考え，θ の双対の自己同型群 $\hat{\theta} = \sigma_t{}^{\phi}$ によって$\mathbb{R}$を作用させて接合積をとる。つまり，

$$M \rtimes_{\sigma^\phi} \mathbb{R} = (N \rtimes_\theta \mathbb{R}) \rtimes_{\sigma^\phi} \mathbb{R} \cong N$$

というように双対になっている $N \rtimes_\theta \mathbb{R}$と $M \rtimes_{\sigma^\phi} \mathbb{R}$という二つの接合積を N にほどこすことで，もとの N と同型な II_∞ 型フォン・ノイマン環が得られる。

M に作用させるモジュラー自己同型群 $\sigma_t{}^{\phi}$ が，M の内部的自己同型群になるようなパラメータ t の集合モジュラー周期群 $\mathrm{T}(M)$ を

$$\mathrm{T}(M) = \{t \in \mathbb{R} : \sigma_t{}^{\phi} \in \mathrm{Int}(M)\}$$

と定義する。このモジュラー周期群は，随伴流の性格づけと関係している。すなわち，p が $\mathrm{T}(M)$ に含まれることは，随伴流を $C_N \rtimes_\theta \mathbb{R}$として $\theta_s(u) = e^{ips}u$ を満たすような C_N の元 u が存在するということの必要十分条件である。この

事実によりながら，III 型フォン・ノイマン環 M は $\mathrm{T}(M)$ に即して分類される。M は $\mathrm{T}(M) = (2\pi/\log\lambda)\mathbb{Z}$の時には III_λ 型 $(0 < \lambda < 1)$，$\mathrm{T}(M) = \{0\}$ の時には III_1 型，その他の時には III_0 型となる。モジュラー自己同型群の内部的自己同型群による剰余群が，その対応物としてすべての自己同型群が内部的である II_∞ 型フォン・ノイマン環から III 型フォン・ノイマン環を生成し，その剰余群が III 型フォン・ノイマン環の分類の原理になっているということに注意を払っておきたい。そこには，群の部分群への分解と体の拡大とを対応づけたガロワ的な考え方が見られるのである（竹崎，1983)。因みに無限自由度の量子力学，すなわち場の量子論に現れる場の作用素は III_1 型フォン・ノイマン環であることが知られている。

d．集合論，圏論，代数学，解析学と作用素環の構造

第 1 節で，カントのカテゴリーを集合論，圏論，代数学，解析学に置き換えることを提案した。作用素環論で，それぞれがどうなっているかをここでまとめよう。

集合論。作用素環論は，一つ一つの作用素を個別に扱うのではなく，それの集合を対象として考える。また，作用素環論にとっては無限次元の構造解析をすることによるその分類が非常に重要な問題である。フォン・ノイマン環は大きく三つに分類され，それぞれはさらに細かく分類される。そして，半有限／純無限，有限／固有無限というように，有限と無限の間には二種類の異なった境界が存在する。このような無限次元の構造解析は無限集合論にも新たな光を投ずる。

圏論。作用素環論のゲルファントとナイマルクによる基本的定理に基づき，非可換幾何学構築を促すことになったゲルファント変換は，〈関手〉の〈射〉である〈自然変換〉の典型的な例となっている。そして，その見方が，圏論を駆使したグロタンディークによる代数幾何学の再構築を促したと言ってもよい。また，このゲルファント=ナイマルクの定理やセール=スワンの定理のようなものは，幾何学的な〈圏〉と代数的な〈圏〉とを〈関手〉で結んでいる。さ

らに，フォン・ノイマン環に入れる構造であるコサイクル微分は，モジュラー自己同型群との関係の中で群を一般化した亜群としての性格を顕在化させる。亜群は圏論の〈対象〉と〈射〉の概念によってその構造が明確に理解される。群は亜群の〈対象〉が一つである特別な場合である。

代数学。作用素環という名前からも分かるように，環の構造を持つ作用素の集合を扱うものが作用素環論である。そして，そこに様々な群の構造を入れることで，作用素環の構造が明らかになった。ウェイトを不変にするモジュラー自己同型群とコサイクル微分とが，フォン・ノイマン環の **1**-パラメータ群による発展－〈時間〉発展－を表現する。また，接合積によってフォン・ノイマン環に自己同型群の構造を入れ，それが群の構造が入った作用素環に見出される双対性を顕在化した。さらには，その自己同型群に見出されるガロア理論と類似した構造によってフォン・ノイマン環の分類が可能になった。

解析学。作用素環論は関数解析という解析学から派生した数学の一分野である。その一つのフォン・ノイマン環は基本的に非可換積分論であり，非可換確率論である。また，ウェイトをフォン・ノイマン環に作用させることは，期待値を取ることである。

カントによれば，直観の純粋形式において，算術と幾何学，さらにはア・プリオリな数理物理学が構成されるが，その考え方と類比的に，本論文第 **1** 節で現代数学の文脈の中で，数論と幾何学さらには数理物理学の構成を考えることを提案した。作用素環論ではどのようになっているか。可換な作用素環の極大イデアルによる剰余をとるという作用は，〈点〉を与え，その集合はスペクトル空間として幾何学的空間を生成する。代数構造のいわば双対的なものとして幾何学的空間が生成されるのである。そして，その可換性という条件を取り除くことにより，非可換幾何学がいわば仮想的に構成される。数論と作用素環そして非可換幾何学との関係については，本論文では，言及できなかった。

また，作用素環論，特にフォン・ノイマン環は，量子統計力学や場の量子論と非常に相性が良く，それらの物理理論の数理的側面と手を取り合うようにして発展してきた。量子力学に見出される様々な性格，すなわち，作用素の非可

換性，本質的に確率論であること，群論として表現される対称性，物理量の時間発展の様子などが，フォン・ノイマン環の理論の構造と相性が良い。そして，無限自由度の量子力学としての場の量子論における場の作用素は，III_1 型フォン・ノイマン環における無限次元の構造を持っている。

結　　　　語

数学概念は，操作と対象の関係性の中で構成される。操作が対象化されることもあれば，操作の対象に対する余剰が新たな対象を生み出したり，対象の操作に対する余剰が新たな操作を生み出したりすることもある。この操作と対象の関係性の中で，一方で，集合論，圏論，代数学，解析学，もう一方で，数論と幾何学，さらには数理物理学との間の関係性を考えるとどうなるかを，作用素環論を例にとりながら本論文では見てきた。もちろん，それぞれの数学の領域において操作と対象の関係の中で数学概念が生成される。そこで，カント哲学の体系を参照項として考えた。そこでは，悟性のカテゴリーと直観の純粋形式における構想力による図式化との間の差異に修正を加えつつ，その差異を考慮する必要がある。諸カテゴリーに対応する集合論，圏論，代数学，解析学の側では，操作性が対象性よりも顕在化し，操作が対象に対して余剰を持つ傾向が強い。そして，代数学は理論の構造，特に対称性を持つ構造を明らかにし，解析学は無限を含む量の評価，関数や汎関数の連続性の評価，確率論的な評価などを行う。それに対し，純粋直観における構成物に対応する数論，幾何学，そして数理物理学においては，対象性が操作性よりも顕在化し，対象が操作に対して余剰を持つ傾向が強い。数論的，幾何学的，数理物理学的対象に対する直観が，解析学や代数学の新たな操作性を生み出し，それからの抽象が集合論や圏論を生み出した。そして，それ自体としては空虚な理論になりがちな集合論や圏論に対して豊かな例を解析学や代数学は与え続ける。逆に，集合論や圏論は解析学や代数学に対して記号操作としての性格付けの強い証明の道具立てを与え，解析学と代数学が媒介となって数論，幾何学，数理物理学における新

たな対象を生み出す。以上のようなことを，たとえ一部にせよ，作用素環論の歴史とその構造分析は指し示すことができたであろうと思われる。

参考文献

哲学

Jean CAVAILLES（1946），*Sur la Logique et la théorie des science,* Paris, J. Vrin；邦訳『論理学と学知について』，近藤和敬訳，月曜社，2013。

Gilles-Gaston GRANGER（1988），*Pour la Connaissance philosophique,* Paris, Editions Odile Jacob；邦訳『哲学的認識のために』，植木哲也訳，法政大学出版局，叢書・ウニヴェルタス　523, 1996.

Ian HACKING（2014），*Why is there Philosophy of Mathematics,* Cambridge, 2014；邦訳『数学はなぜ哲学の問題になるのか』金子洋之，大西琢朗訳，森北出版，2017.

Alain MICHEL（1992），*Constitution de la théorie moderne de l'intégration,* «Mathesis», Vrin.

A. W. MOORE（2018), *The Infinite,* Routledge, 3rd edition；ムーア（2012）『無限－その哲学と数学』，石村多門訳，講談社学術文庫。

数学史

Jean DIEUDONNE（ed.）（1978/1996），*Abrégé d'histoire des mathématiques : 1700-1900,* Paris, Hermann；デュドネ編（1985）『数学史：1700-1900』I, II, III，上野健爾他訳，岩波書店。

Pierre DUGAC（1978/1996），*Fondements de l'analyse,* in DIEUDONNE（ed.）（1996), pp.237-289；デュガク（1985）「解析学の基礎」，J. デュドネ編（1985)，II 所収，pp.385-456。

作用素環論

竹崎正道（1983）『作用素環の構造』，岩波書店。

梅垣寿春・日合文雄（2003）『作用素代数入門』，共立出版。

荒木不二洋・中神祥臣（1974）『作用素環論の最近の進展』
https : //www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/26/4/26_4_330/_pdf/-char/ja

O. BRATTELI, D. W. ROBINSON（2013), *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* 1, Springer.

Alain CONNES（1994), *Noncommutative Geometry,* Academic Press.

――文学部教授――