２０１８年度　修士論文要旨

直交多項式の有限フーリエ変換と超幾何多項式の漸近挙動

関西学院大学大学院理工学研究科

数理科学専攻　山根研究室　中井翔太郎

先行研究と主結果

定義 1. 超幾何多項式 ${}_3F_1$ は次の式で定義される．

$$ {}_3F_1\left[\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ & \delta & \end{array} ; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha]_n [\beta]_n [\gamma]_n}{[\delta]_n\, n!} z^n, \quad \delta \neq 0, -1, -2, \ldots $$

ここで $[x]_0 = 1$, $[x]_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ $(n \geq 1)$ である．${}_3F_1$ は一般には発散するが， α, β, γ の少なくとも 1 つが 0 以下の整数ならば有限和（多項式）になる．

曲線 C: $\left|\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) e^{-\frac{1}{z}-\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}}\right| = 1$ は $-i$ と i を結ぶ線分を含む．

[2] によれば, α が正整数のとき, C の外部のコンパクト部分集合上で $n \to \infty$ のとき

$$ \begin{aligned} {}_3F_1\left[\begin{array}{ccc} n & -n & \alpha \\ & \frac{1}{2} & \end{array} ; \frac{z}{2n}\right] &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) e^{-\frac{1}{z}-\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}}\right\}^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned} $$

C の内部のコンパクト部分集合上で $n \to \infty$ のとき

$$ {}_3F_1\left[\begin{array}{ccc} n & -n & \alpha \\ & \frac{1}{2} & \end{array} ; \frac{z}{2n}\right] = \left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha} \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). $$

C を境目として漸近展開が切り替わるのだから，C 上での漸近展開を求めるのは難しい問題だと思われる．実際，[2] では C 上での展開には触れていない．我々は，いくつかの制約をつければ C 上での展開がある程度分かることを発見した．すなわち，

- C の一部（$-i$ と i を結ぶ線分から原点を除いた部分）で調べる
- $\alpha = 1$ とする
- ${}_3F_1$ そのものではなく，$e^{-i\frac{n}{y}} {}_3F_1\left[\begin{array}{ccc} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{array} ; \frac{iy}{2n}\right]$ $(-1 \leq y < 0, 0 < y \leq 1)$ の実部あるいは虚部 (n の偶奇によって場合分けする) を調べる

という設定で漸近展開を求めることが出来た．

定理 2. (中井) n が偶数の場合に限って $n \to \infty$ とすると

$$ \begin{aligned} & 2i\Im\left\{e^{-i\frac{n}{y}} {}_3F_1\left[\begin{array}{ccc} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{array} ; \frac{iy}{2n}\right]\right\} \\ &= \begin{cases} -in^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2y\pi}}{\sqrt[4]{1-y^2}} \cos\left[n\left(-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} - \arcsin y\right) + \frac{\pi}{4}\right] + o\left(n^{\frac{1}{2}}\right) & 0 < y < 1, \\ in^{\frac{2}{3}} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} \sqrt[3]{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{y2\sqrt{3}} + o\left(n^{\frac{2}{3}}\right) & y = 1. \end{cases} \end{aligned} $$

なお，$-1 \leq y < 0$ の場合，あるいは n が奇数の場合についても類似の結果が得られる．

直交多項式の有限フーリエ変換

定義 3. ヤコビ多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ とチェビシェフ多項式 $T_n(x)$ はそれぞれ

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+n}{k}\binom{\beta+n}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k,$$
$$T_n(x) = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)$$

で定義される．チェビシェフ多項式は $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ と定義しても上の定義と一致する．

$S := (-1)^{n+1}e^{-i\lambda}{}_3F_1\left[\begin{matrix} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};-\frac{1}{2i\lambda}\right] + e^{i\lambda}{}_3F_1\left[\begin{matrix} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{1}{2i\lambda}\right]$ とおく．$\lambda\in\mathbb{R}$ のとき

$$\begin{cases} S = 2i\Im\left\{e^{i\lambda}{}_3F_1\left[\begin{matrix} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{1}{2i\lambda}\right]\right\} & (n\text{ が偶数のとき}), \\ S = 2\Re\left\{e^{i\lambda}{}_3F_1\left[\begin{matrix} n & -n & 1 \\ & \frac{1}{2} & \end{matrix};\frac{1}{2i\lambda}\right]\right\} & (n\text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

したがって, n が偶数のとき，$S|_{\lambda=-n/y}$ が定理 2 の左辺である．

定理 4. （[1], S のフーリエ積分表示）$S = i\lambda\int_{-1}^{1}e^{i\lambda x}T_n(x)\,dx$.

この定理 4 の式に $\lambda = -n/y$ を代入し，$x = \cos\theta$ と置換すると

$$S|_{\lambda=-n/y} = \frac{n}{iy}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{\exp\left[in\left(-\frac{\cos\theta}{y}+\theta\right)\right] + \exp\left[in\left(-\frac{\cos\theta}{y}-\theta\right)\right]\right\}\sin\theta\,d\theta$$

を得る．下の補題 5 により定理 2 は直ちにしたがう．

補題 5. (停留位相の方法) $\phi'(a) = \cdots = \phi^{(p-1)}(a) = 0$, $\phi^{(p)}(a) \neq 0$ とする. また半開区間 $(a,b]$ 上の任意の点 t で $\phi'(t)\neq 0$, $f(t)$ は十分なめらかとする. $\mu = \mathrm{sgn}\phi^{(p)}(a)$ とおくと, $n\to\infty$ のとき

$$\int_a^b f(t)e^{in\phi(t)}dt \sim f(a)e^{in\phi(a)}\left(\frac{p!}{n|\phi^{(p)}(a)|}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{p}e^{\frac{i\pi}{2p}\mu} = \mathrm{const.}n^{-\frac{1}{p}}e^{in\phi(a)}.$$

References

[1] Atul Dixit, Lin Jiu, Victor H. Moll and Christophe Vignat, *The finite Fourier transform of classical polynomials*, *J. Aust. Math. Soc.* **98** (2015), 145-160

[2] Thorsten Neuschel, *Asymptotics for Menage polynomials and certain hypergeometric polynomials of type ${}_3F_1$*, *Journal of Approximation Theory* **164** (2012), 981-1006