図形領域における学習内容の本質的理解に関する一考察

A study on understanding learning contents of Geometric Figures in an essential manner

中　尾　正　広 *

Abstract

In this paper, we focus on understanding the importance of learning geometric figures. In the first section, we discuss the overall objectives of the new mathematics curriculum for elementary schools, which will be implemented in 2020, and emphasize the importance of understanding the learning contents. In the second section, we remark that some university students do not understand the contents and concepts of mathematics curricula they have previously studied. They have their own reasons for being unable to understand the contents and concepts. For instance, they do not know the meanings of mathematical terms, nor do they understand necessary or sufficient conditions and inductive or deductive problems. We show a typical question on geometric figures they can easily answer by using mathematical formulae. We then remark that they cannot explain a solution method by using the definitions. We also emphasize the importance of understanding the learning contents.

In the third section, we conclude that university students seeking to obtain an elementary school teacher's license should essentially understand the learning contents of the new mathematics curriculum for elementary schools.

キーワード：新学習指導要領、本質的理解、数学的な見方・考え方

１．準備

現在は移行期間であるが、平成32年度全面実施の新学習指導要領の「算数科の目標」は次の内容である（[1]）

【算数科の目標】

数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。

⑴　数量や図形などについての基礎的・基本的な概念や性質などを理解するとともに、日常の事象を数理的に処理する技能を身に付けるようにする。

⑵　日常の事象を数理的に捉え見通しをもち筋道を立てて考察する力、基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表したり目的に応じて柔軟に表したりする力を養う。

⑶　数学的活動の楽しさや数学のよさに気付き、学習を振り返ってよりよく問題解決しようとする態度、算数で学んだことを生活や学習に活用しようとする態度を養う。

これまで現行の学習指導要領において算数科の目標は「算数的活動を通して」という文言で始まっていたが、新学習指導要領では、「数学的な見方・考え方を働かせ」という文言で始まっており、これまで以上に数学的な見方・考え方が重要視されていることがうかがえる。「数学的な見方」「数学的な考え方」はそれぞれ、「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、根拠を基に筋道を立てて考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能等を関連付けながら、統合的・発展的に考えること」と説明されており、教師の「本質的理解」に

* Masahiro NAKAO　教育学部教授

基づく指導が必須のものであるといえる。また、総則において、「児童や学校、地域の実態を適切に把握し、教育の目的や目標の実現に必要な教育の内容等を教科等横断的な視点で組み立てていくこと、教育課程の実施状況を評価してその改善を図っていくこと、教育課程の実施に必要な人的又は物的な体制を確保するとともにその改善を図っていくことなどを通して、教育課程に基づき組織的かつ計画的に各学校の教育活動の質の向上を図っていくこと（以下「カリキュラム・マネジメント」という。）に努める」ことについて新たに示された。このことは、各学校でのカリキュラム・マネージメントのために教科内容についても、これまで以上に本質的な理解が求められることを強く示している。そこで、本論文では、大学生が修得すべきである考えられる数学的な見方・考え方を働かせるのに必要なものとして考えられる「本質的な理解」について、小学校教育職員免許状取得のための算数科における教科に関する科目、教職に関する科目を担当している授業における指導に基づいて考察を行う。

2．図形領域における本質的理解に関する一考察

まず、大学の授業中に学生に対して、解説を行うときに、既習の内容を確認した後に未習の内容を説明するのが典型的な方法であるが、その結果学生が理解できていない状況になることが多くある。授業終了後に、理解できなかったという学生の状況を聞いてみると、様々なケースがあるようである。例えば、問題文に出てくる数学の術語が理解できていない場合、数式の変形が理解できていない場合、必要条件なのか十分条件なのか理解できていない場合、帰納的な論理なのか演繹的な論理なのか理解できていない場合等、状況は学生それぞれであり、多くの場合、すべて理解できていないということではなく、理解できていない少数の個所がクリアになると全体として理解できることも多いようである。総合的な理解が求められる内容であるほど理解できていない箇所が多く存在する可能性が高い。これは数学に限ったことではないが、数学の場合特にその傾向が強いと考えられる。学生に数学の内容で、不得意な分野を質問すると、「関数」が不得意であるという返答が多い。これは数学的な総合した見方・考え方が必要であるからといわれている。例えば、次のようなものが考えられる。（[2]）

①２つの数量の依存関係を考える。（関係づけ）
②１つの値が決まれば、もう一方の値も決まる。（対応の考え）
③集合の考え。（入力の集合＝定義域、出力の集合＝値域、という捉え方）
④入力の数値を変化させる。（変数の考え方）
⑤対応の決まりや変化の特徴を見つける。（そのためには帰納的考え、一般化の考えが必要）

この状況は、大学生に限らず、小学校における児童、中学校、高等学校における生徒についても同様の現状が想定される。

大学における授業内容として、大学生が算数科の教科内容を学習する場合に、算数科の学習内容そのものを扱うのは勿論のことである。算数科の学習内容について、本質的理解が完了しているべきであるが、現状では修得済みであるべき学習内容を本質的に理解しているとは限らない場合がある。例えば、次の様な練習問題（問題の〇は授業回数）を授業中に出題した。

【第〇回授業中課題】

次の例題１について、なぜそのように計算するか、小学生に理由を説明せよ。

［例題１］ たて３cm、横４cm の長方形の面積はいくらか。

ヒント：面積はどのように定義しているか。

この問題に対して、長方形の面積は（たて）×（よこ）で計算できるからという公式そのものが定義であるかのような内容を小学生に対する説明として解答している答案が散見される。勿論、公式化の後、計算問題として説明する場合はそのように指導するケースもあると考えられるが、ここでは面積の定義から公式化までの説明を求めている。現在の大学生が小学生の時に面積の定義から公式化までの指導を簡略化し公式のみを強調して行われた可能性もあり、彼らが教育実習の実習期間や卒業後に教員になった時にそのような簡略化した指導を行うのではなく定義に基づく本質的な理解を伴った指導が必須であると考えられる。（なお、図形の面積は旧学習指導要領では、「量と測定」領域の項目であるが、新学習指導要領では、「図形」領域の項目である。）

3．まとめ

本来、大学入学時までの学習内容をそのまま学習するということのみでは、簡易な内容となり不充分なことも多い。そこで、大学入学時までに学習した既出の内容ではなく、大学生として身につけておくべき内容でありかつ数学的にも本質的理解の養成に貢献すると考えられる内容を選択すべきである。例えば、「最大値」「最小値」の概念と関連して、「上限」「下限」の概念を導入することが考えられる。「最大値」「最小値」は大学入学までに学習している内容であるが、「上限」「下限」は学習していないと考えられる。（数学にける「上限」「下限」の定義は、日常生活におけるそれらの定義とは異なることに注意が必要となる。）

以下に「上限」「下限」の定義を示す。（[3]）

実数の集合 R の部分集合 A に対して、A のどの要素も越えられないような実数 r が存在するとき、A を上に有界という。またそのような実数 r を A の上界という。いいかえれば、r が A の上界であるとは、集合 A の任意の元 a に対して、$a \leqq r$ が成立することである。同様に、集合 A の任意の元 a に対して、$s \leqq a$ となるような実数 s が存在するとき、A を下に有界といい、s を A の下界という。r が A の上界であるならば、r より大きい実数は A の上界である。

s が A の下界であるならば、s より小さい実数は A の下界である。

定理　A が R の空でない部分集合とする。
（1）A が上に有界ならば、最小の上界が存在する。
（2）A が下に有界ならば、最大の下界が存在する。
（最小の上界を上限といい、supA と表す。最大の下界を下限といい、infA と表す。

「上限」「下限」の定義の定義を説明するときに、上記のような数学的に厳密な定義を示して理解できる学生も存在するが、数学の厳密な定義を苦手とする小学校教員希望の学生も少なからず存在するようである。数学については厳密な定義を用いて説明することが多いが、イメージなしで文字のみで理解しようとしても困難を伴うことが多い。そのため、A の元の最大値を maxA、最小値を minA で表すこととし、以下の例を示すことにより本質的な理解の助けとすることが考えられる（R：実数全体の集合）

【例】
$\sup\{x \in R \mid 1 \leqq x \leqq 10\} = 10$
$\sup\{x \in R \mid 1 < x < 10\} = 10$
$\inf\{x \in R \mid 1 \leqq x \leqq 10\} = 1$
$\inf\{x \in R \mid 1 < x < 10\} = 1$
$\max\{x \in R \mid 1 \leqq x \leqq 10\} = 10$
$\max\{x \in R \mid 1 < x < 10\}$ は存在しない
$\min\{x \in R \mid 1 \leqq x \leqq 10\} = 1$
$\min\{x \in R \mid 1 < x < 10\}$ は存在しない

その時に、定義における「上界」を「上からの蓋」と比喩的に説明することで理解することが可能となり、多くの学生が練習問題に正解することができたようである。初等中等教育の学習における「最大値」「最小値」の概念を基にして、日常で使用される意味とは少し異なる「上限」「下限」という新しい数学概念に対して、教員が比喩的な説明を行った上で、質疑応答通してその内容を理解していくことを経験することが、大学生が修得すべき本質的理解に寄与すると考える。本論文での考察が、ある意味での「研究ノート」として活用されれば幸いである。

参考文献

[1] 文部科学省（2018）「小学校学習指導要領解説（平成29年告示）算数編」日本文教出版
[2] 黒木哲徳（2018）「入門算数学[第 3 版]」日本評論社
[3] 今岡光範、坂本隆則、寺垣内正一、丸尾修（2007）「これだけは知っておきたい教員のための数学Ⅰ―代数・幾何―」培風館