氏　　　　名	**島　田　光一郎**
学位の専攻分野の名称	博 士（理学）
学 位 記 番 号	甲理第182号（文部科学省への報告番号甲第665号）
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
学位授与年月日	2018年３月16日
学 位 論 文 題 目	**On Two Point Taylor Expansion**
論 文 審 査 委 員	（主査） 教 授　北　原　和　明
	（副査） 教 授　千代延　大　造
	教 授　大　﨑　浩　一
	影　山　康　夫（神戸大学大学院海事科学研究科専任講師）

多項式関数による補間の歴史は古く，ニュートンから始まる．ニュートンは惑星の位置の観測データから，惑星の動く曲線を補間多項式関数で近似して任意の時間における惑星の位置を推測したり，定積分の近似値を求めるのに被積分関数を補間多項式関数で近似し，その定積分値で近似を行っている．その後，関数が関わる近似計算，例えば関数近似，数値積分，数値微分，関数方程式の近似解などの分野において多項式関数による補間は欠かせない手段となっているといっても過言ではない．

多項式関数による補間は，主なものとしてラグランジュ補間，エルミート補間，バーコフ補間が挙げられる．そのうち，ラグランジュ補間，エルミート補間については，被近似関数に対して，標本点において同じ関数値をとる最も低い次数の多項式関数を考えるのが，ラグランジュ補間であり，各標本点において，あらかじめ定められた階数以下の被近似関数の導関数値と同じ導関数値をとる最も低い次数の多項式関数を考えるのが，エルミート補間であり，特に19世紀後半から現在に至るまで，ラグランジュ補間多項式やエルミート補間多項式の近似特性に関する研究が精力的に行われている．

被近似関数が無限回微分可能である場合，エルミート補間多項式関数は関数の展開へとつながる．実際にこの場合のエルミート補間は各標本点において任意の階数以下の被近似関数の導関数値と同じ導関数値をとるエルミート補間多項式関数を考えることが出来る．特殊な場合として，標本点が１個であるときのエルミート補間多項式関数は，その標本点における被近似関数のテイラー多項式関数である．よって，次数を大きくしたときにテイラー多項式関数が標本点を含む区間で被近似関数に収束するならば，被近似関数はその標本点でテイラー展開可能（１点テイラー展開可能）であるということになる．そして，関数のテイラー展開の性質，有用性は言うまでもなく非常に良く知られている．同じようにして，被近似関数の２点テイラー展開が1950年以降考えられ，２点テイラー展開の収束域や近似特性などの議論がなされているが，被近似関数が解析関数であるという前提の下で研究されている．

こういう状況の中，本論文では，R の区間上のどのような実数値関数が２点テイラー展開可能となるかという基本的かつ重要な問題を２個の標本点における重複度に注目して取り組み，２点テイラー展開可能な関数のクラス，２点テイラー展開の収束域・収束精度・項別微分可能性などを導き出すことを目的としている．

論文内容の要旨

本論文は４章からなる．第１章では２点テイラー展開の位置づけを行うために，ラグランジュ補間，エル

ミート補間に関わる主な結果について述べている．ラグランジュ補間については，多項式関数による最良近似を述べた上で，ラグランジュ補間の近似特性を示すラグランジュ補間作用素のノルムの評価について書かれている．これは，ラグランジュ補間の近似の限界を示すと共に，与えられた被近似関数に対して標本点の取り方が非常に重要となることを示唆する．エルミート補間については，特殊な場合が被近似関数のテイラー多項式関数になることを説明した上で，1950年以降から取り上げられている2 点テイラー展開（一般には m 点テイラー展開）に関わる重要な結果について述べている．特に，実数直線の区間上で１個の節点をもつ連続な区分的多項式関数が２点テイラー展開可能であるということ，および，節点で連続でない場合でも節点を除く点で２点テイラー展開可能であること，２点テイラー展開の節点で取る値や項別微分可能性に関する結果を説明している．そして著者はこれらの結果を，第２章以降でより一般的な結果に拡張することを目標として挙げている．

第２章では，節点が１個の区分的解析関数における２点テイラー展開可能性が論じられている．正の整数 m，n が与えられているとする．標本点を－１，１とし，区間［－１，１］を $n:m$ に内分する点を c で表す．また，α は $\alpha < -1$ であり $\left|(\alpha+1)^n(\alpha-1)^m\right| = \frac{2^{n+m}n^n m^m}{(n+m)^{n+m}}$ を満たす実数，β は $\beta > 1$ であり，$\left|(\beta+1)^n(\beta-1)^m\right| = \frac{2^{n+m}n^n m^m}{(n+m)^{n+m}}$ を満たす実数とし，［－１，１］を含む区間［α，β］を定義域とする関数を考える．

被近似関数として，c を節点とする区分的に解析的な関数を考える．そして，標本点－１，１における重複度をそれぞれ $n\ell$，$m\ell$，$\ell \in \mathrm{N}$ である２点テイラー多項式関数を考える．このとき，－１，１における重複度の比を $n:m$ であるように保ちながら，２点テイラー多項式関数の次数を大きくして行くと，２点テイラー多項式関数列は被近似関数に $1/\sqrt{\ell}$ のオーダーで広義一様収束することを著者は示している．被近似関数である区分的に解析的な関数と２点テイラー多項式関数との誤差は，閉区間［α，β］における関数 $\left|(x+1)^n(x-1)^m\right|$ の最大値の累乗と被近似関数の差分商の絶対値の積でおさえられる事はわかっている．よって，ここで重要となるのは被近似関数の差分商の絶対値の上からの評価である．著者は，良い評価を得ようとするために，定義域内の点に応じて差分商の値がどのように変化するかを詳細に調べ，その結果，２点テイラー展開可能性を示すのに非常に有用な，被近似関数の差分商の絶対値の上からの評価を与えることに成功している．

被近似関数は節点が c の区分的解析関数であるが，節点での連続性は仮定されていない．節点において連続な場合は，閉区間［α，β］で２点テイラー展開可能であることは第２章で述べられているが，節点において被近似関数の値に跳びがあるとき，節点において２点テイラー展開はどういう値をとるかということについて新たな解釈をつけているのが，第３章である．本質的には，節点 c で跳びがあるヘビサイド関数の２点テイラー展開が節点でどういう値を取るかということになる．結果については，すでに先行研究によって，２点テイラー展開は節点 c において被近似関数の左極限と右極限の平均値を取ることが展開式から直接計算することで示されている．著者は，ヘビサイド関数の２点テイラー展開の節点 c での値が，負の２項分布の確率関数の値の和で表されていることに注目し，確率的な解釈から自然に導かれるということを示している．

第４章では，節点が c である区分的多項式関数における２点テイラー展開が節点を除いた開区間の和（α，c）$\cup$（c，β）で，項別微分可能であることを導いている．標本点における重複度の比が１：１の場合は，直接的な計算によって，区分的多項式関数の２点テイラー展開が項別微分可能であることは先行研究によって示されている．しかし，重複度の比が一般の $n:m$ になると，複雑になりすぎて，同じような計算が出来ないような状況であった．著者は，節点が c で，左側が恒等的に０である切断べき関数の２点テイラー展開，右側が恒等的に０である切断べき関数の２点テイラー展開を考え，それぞれの２点テイラー展開の級数をいくつかのグループに分け，それぞれのグループに属する級数が区間（α，c）$\cup$（c，β）で，べき級数として収束することを発見し，区分的多項式関数の重複度の比が $n:m$ の２点テイラー展開の項別微分可能性について

極めて見通しのよい証明を得ることに成功している．

論 文 審 査 結 果 の 要 旨

著者は，便宜上，－１，１を展開の中心とし，［－１，１］を含む区間上のどのような実数値関数が２点テイラー展開可能となるか，および２点テイラー展開の収束精度・項別微分可能性という基本的かつ重要な問題を－１，１の標本点における重複度の比に注目して取り組み，主要な３つの結果を導き出している．

(1) 正の整数 m, n について，区間［－１，１］を $n:m$ に内分する点を c とし，m，n によって定まる，［－１，１］を含む区間［α, β］を考える．［α, β］上の被近似関数として，c を節点とする区分的に解析的な関数を考える．このとき，ℓ を正の整数として，標本点－１，１における重複度をそれぞれ $n\ell$，$m\ell$ である２点テイラー多項式関数を考えたとき，ℓ を大きくして行くと，２点テイラー多項式関数列は，被近似関数に $1/\sqrt{\ell}$ のオーダーで広義一様収束するという新たな結果を著者は得ている．被近似関数である区分的に解析的な関数と２点テイラー多項式関数との誤差評価は，被近似関数の差分商の絶対値がどの程度で抑えられるかにかかってくる．著者は，良い評価を得ようとするために，定義域内の点に応じて差分商の値がどのように変化するかを，着実なステップを踏みながら詳細に調べ，２点テイラー展開可能性を示すのに非常に有用な，被近似関数の差分商の絶対値の上からの評価を与えることに成功している．ここでは，区分的に解析的な被近似関数の条件を十分に使いながら，被近似関数の差分商の絶対値の評価に確実につなげて行く著者の力量が伺える．

(2) 節点において被近似関数の値に跳びがあるとき，節点において２点テイラー展開はどういう値をとるかということについては，先行研究の中で，２点テイラー展開は節点において被近似関数の左極限と右極限の平均値を取ることが展開式から直接計算することで示されている．著者は，計算式の設定を変更することで，節点において２点テイラー展開が取る値は負の２項分布の確率関数の値の和で表されていることに注目し，確率的な解釈から先行研究の結果が自然に導かれるということを示している．この解釈によって，３点以上のテイラー展開が節点でどのような値を取るかという見通しを立てることが出来る．

(3) 節点が c である区分的多項式関数における２点テイラー展開が節点を除いた開区間（α，c）および（c, β）で，項別微分可能であることを導いている．先行研究においては，標本点における重複度の比が $1:1$ の場合は，直接的な計算によって，区分的多項式関数の２点テイラー展開が項別微分可能であることが示されている．しかし，重複度の比が一般の $n:m$ の場合は，同じような計算が出来ないような状況であった．著者は，節点が c である切断べき関数の２点テイラー展開を考えて，その２点テイラー展開の級数をいくつかのグループに分け，それぞれのグループに属する級数が区間（α，c）および（c，β）で，べき級数として収束することを発見した．この結果から区分的多項式関数における２点テイラー展開が項別微分可能であることを示している．これは先行研究の証明方法とはまったく異なるものであり，２点テイラー多項式関数列の収束精度にもつながる証明を得ることに成功している．

本論文の内容に関する主な結果である２点テイラー展開可能性については，International Conference on Applied Physics and Mathematics（ICAPM2017）で発表し，また査読付き論文として Applied Mathematical Sciences（Vol. 11, no.61（2017），3017－3032）にも掲載されている．審査委員は本論文の内容を中心に面接と公開の論文発表会を行い，著者が論文内容と用いた手法について充分な理解とともに関連する分野についても学識を有し，また将来の研究遂行に対しても十分な能力を持つことを確認することが出来た．著者の英語の能力については，博士論文および学術論文を自ら英語で書いていることならびに，英語による口頭発表・質疑応答を行っていることから，充分であると判定した．以上のことより，審査委員会は本論文の著者が博士（理学）の学位を授与されるに足る十分な資格を有するものと判定する．