

数と計算における統合的に考察する力に関する一考察

A study on the abilities of considering Numbers and Calculations in an integrated manner

中 尾 正 広 *

Abstract

In this paper, we examined the abilities of considering Numbers and Calculations in an integrated manner. The first section described the overall objectives of the new mathematics curriculum of elementary schools that will be fully implemented in 2020 and discussed the importance of two mathematical concepts: one-to-one correspondence and cardinality of sets. In the second section, we investigated the instruction of cardinal and ordinal numbers in elementary grade 1 and emphasized that teaching one-to-one correspondence and cardinality of sets is important with respect to expanding the concept of numbers from natural to real numbers. In the third section, we illustrated a typical example and an exercise to facilitate the easy understanding of the two concepts. In the fourth section, we concluded that university students who are pursuing license to teach in elementary schools should study one-to-one correspondence and cardinality of sets.

キーワード：新学習指導要領、数と計算、濃度

1. 準備

平成29年3月公示、平成32年度全面実施の新学習指導要領の算数科の目標として、次のようなことが謳われている。

算数科の目標

「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。

- (1) 数量や図形などについての基礎的・基本的な概念や性質などを理解するとともに、日常の事象を数理的に処理する技能を身に付けるようにする。
- (2) 日常の事象を数理的に捉え見通しをもち筋道を立てて考察する力、基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表したり目的に応じて柔軟に表したりする力を養う。
- (3) 数学的活動の楽しさや数学のよさに気付き、学

習を振り返ってよりよく問題解決しようとする態度、算数で学んだことを生活や学習に活用しようとする態度を養う。」

この中で、「基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的に考察する力」という部分に着目し、小学校学習指導要領算数科において最初に学習する個数・順序に関して、数の拡張を視野に入れた指導の背景に必要なものとして、大学生が学ぶべきである考えられる集合の濃度と1対1対応の概念について本論文で考察していく。本論文が、ある意味での「研究ノート」として活用されれば幸いである。

2. 数の集合

小学校学習指導要領算数科において、最初に学習する重要な数学概念の一つに個数、順序を扱う項目がある。この項目は、中等教育以降に、自然数、整数、有理数、実数と数を拡張するときの基礎・基本となる概念で、算数・数学教育の最重要課題の一つであるといっても過言ではない。自然数、整数、有

* Masahiro NAKAO 教育学部教授

理数、実数の各集合は、無限集合であり、有限集合を扱う時の個数の概念を拡張したものとして、集合の濃度がある。濃度を扱うときには、1対1の考え方が重要となる。

小学校学習指導要領算数科では、有限のものを扱うことも多いが、小学校の学習においても、無限の概念を扱う場合がある。例えば、数の集合の元の個数は無限個であるし、倍数の個数は無限個である。円の面積を求める時には、円を中心角が無限に小さくなるおうぎ形の集まりであるとして、極限として、その面積を計算する。その極限の図形として、本来は長方形であると考えべきであるが、おうぎ形の弧の部分のみ線分と考えて長方形でない平行四辺形とであると考ええる学生も多い。無限の世界についての概念を理解するためには、無限の世界の状況を経験することが求められるであろう。例えば、高等学校において、自然対数の e のように、変数を無限大に発散させたときの極限の式で、その変数が数式に2箇所以上含まれるときに、それらの変数を同時に無限大に発散させるのではなく、1つの変数を先に無限大に発散させて、その後に残りの変数を無限大に発散させると間違った極限值になるというような例を学習することが無限の概念における極限について本質的な理解に必須のものの1つではないかと考える。

3. 濃度の本質的理解

大学の教科に関する科目「算数」(1年春学期開講)において、濃度についての数学概念を伝えることは、難しいと感じる。初等中等教育において、2つの集合間の1対1対応については、厳密な定義を明確にせずに学習してきた経緯がある。受講生の関数概念の理解については、「量と測定領域における速さと平均の指導に関する一考察」内で示したとおりである。次の[例題]は、実際に「算数」の授業で説明した例題及び解説であり、[練習問題1]は、出題した練習問題及び解説である。練習問題の解説に記載のように自然数から整数への上への1対1写像を数式の形に定式化していなくても本質的に理解していることが確認できればよいと考えた。上への1対1写像の本質的理解には、補足説明に記載のように対応を表にするかまたは自然数の各元にどのような操作を施して整数の元に対応させるかを説明するかを示さなければ理解しにくい受講生もいること

も現実である。また、1対1対応は一意的なものではなく、以下に示している別の例(対応)を示すことでその意味が十分に理解できたようである。また、本授業を履修するまでの初等中等教育における学習及びその理解が多様な受講生が受講する中で、例題及び解説の後に受講生間のディスカッションの機会を設けることで、より本質的な理解が深まったという受講生からの意見があった。

[例題] 自然数の集合と正の偶数の集合の濃度は等しいことを示せ。

[解説] 自然数の集合 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ と正の偶数の集合 $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ について、 N から E への対応 f を

$$f(n) = 2n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とすると、 f は N から E への上への1対1対応である。

[練習問題1] 自然数の集合と整数の集合の濃度は等しいことを示せ。

[解説] 自然数の集合 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ と整数の集合 $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ について、 N から Z への対応 f を

$$f(2n) = n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$f(2n+1) = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とすると、 f は N から Z への上への1対1対応である。

[補足説明] 上記対応の一部を表にすると次のようになる。

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|----|---|----|---|----|---|----|----|----|----|-----|
| 自然数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
| 整数 | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | -3 | 4 | -4 | 5 | -5 | 6 | ... |

また、対応を文章で説明すると、次の様になる。

自然数が偶数の場合、2で割った数を対応させて、自然数が奇数のときは、1引いて2で割った数に (-1) をかけた数を対応させる。

注意：有限集合の場合、集合とその真部分集合の個数が等しいことはないが、無限集合の場合、集合とその真部分集合の濃度が等しいことがある。

また、例えば別の対応として N から Z への対応 f

を次のようにしてもよい。

$$f(2n) = -n \quad (n=1, 2, \dots) \quad f(2n+1) = n$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|----|----|-----|
| 自然数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
| 整数 | 0 | -1 | 1 | -2 | 2 | -3 | 3 | -4 | 4 | -5 | 5 | -6 | ... |

2つの集合について、集合として等しいことを示すときに、要素がすべて等しいことを示すこととなる。有限集合の場合は、比較的示すことは容易であるが、無限集合の場合は、困難を伴うことがある。2つの集合 A、B について、 $A=B$ を示すのに、 $A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$ を示せばよい。 $A \subseteq B$ を示すのに、集合 A に属するすべての元が集合 B に属すること、すなわち $x \in A$ ならば $x \in B$ 、を示せばよいことになるが、このことを大学生に説明しても理解できないものがいた。その際に、次のような図1を補助的に示すことで、理解できるケースも多かった。

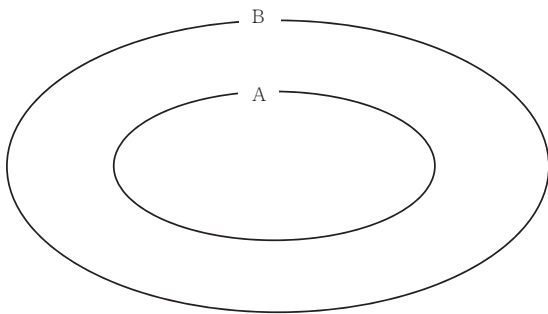


図 1

無限集合の場合は、有限集合の時の個数のような概念は有効ではなく、2つの集合に対して、一方の集合から他方の集合への上への1対1対応を考えて、濃度を定義する。有限集合の場合、ある集合の真部分集合の個数が全体集合の個数と一致するようなことはないが、無限集合の場合はそのような場合もあり得る。このような有限集合と無限集合との違いを示すことで、受講生の本質的な理解が深まったようである。

4. まとめ

小学校においては、平成32年度に全面实施される次期学習指導要領では、「主体的・対話的で深い学び」の視点による学習指導が求められている。数の拡張に関する説明として、「算数教育用語辞典」に次のような記述がある。

[整数から有理数への拡張] (算数教育用語辞典より)

拡張と統合は、互いに裏腹であり、逆の関係にある。整数から有理数を公理的に構成する場合、生成の段階では整数1、2、...は有理数 $1/2$ 、 $2/3$ 、...と異なるものであり、有理数 q/p の集合には整数 a の集合は含まれない。そこで、整数 a を有理数 $a/1$ に対応させることによって、有理数 $a/1$ の集合が整数 a の集合と同型になることがいえ、 $a/1$ と a を同じになることによって、有理数の中に整数を統合できる。(ここで、 q/p は分子が q 、分母が p の分数を表す。)

有理数の中への整数の統合の説明である。整数を拡張し、整数を含めて有理数へと統合する過程の中で、有理数 $a/1$ の集合が整数 a の集合の間に上への1対1がありその結果として同型となることが示される。このときに1対1対応および濃度の概念が必須になる。初等中等教育の学習を基にして、新しい概念である1対1対応および濃度に対して、学生間のディスカッションを通してその内容を理解していくことを経験することは、大学生が経験すべき対話的で深い学びに他ならないと考えられる。本論文での考察内容が小学校新学習指導要領の内容だけでなく、中等教育以降の高等教育の系統的学習の一端を担うことを期待し、統合的に考察する力の養成に役立つことを願うものである。

参考文献

- 文部科学省 小学校学習指導要領解説 算数編
http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2017/07/25/1387017_4_1_1.pdf (2017年8月1日閲覧)
- 志賀浩二 (1998) 「集合への30講 (数学30講シリーズ)」朝倉書店
- 中尾正広 (2015) 「量と測定領域における速さと平均の指導に関する一考察」教育学論究 関西学院大学
- 日本数学教育学会出版部 (2004) 「算数教育指導用語辞典 第三版」教育出版