振り子運動の振れ幅と周期の関係

The Relation between Width of Swing and Period of a Pendulum

井　頭　　均 *

Abstract

When we were students at primary school and junior high school, we learned that the period of a pendulum did not change even if the weight of the plumb was different. But this law is true only when the swing of the pendulum is very small. When the swing of the pendulum becomes wider, the period of the pendulum becomes slightly longer.

I made a pendulum 1 meter in length and filmed the movement of the plumb using a high speed camera. I also measured the period of this pendulum. When the plumb moved a short distance, the period (or time) was 2.02 seconds. But when the plumb's swing was big the period of the pendulum lengthened. The period was 2.25 seconds when the plumb went down at an angle of 80 degrees. I made a graph that showed the relation between the angle of the plumb swing and the period of a pendulum.

キーワード：振り子、周期、振幅

Ⅰ．はじめに

振り子運動の等時性については、今から400年以上も前に、ガリレイ（Galilei, Galileo 1564-1642）が教会の天上から吊り下げられている燭台が揺れているのを見て、発見したといわれている。現在では振り子運動の力学的な説明や理論についてはすでに解決済みのことではあるが、身近な現象であること、おもり、ひも、ストップウォッチがあれば簡単にできること、運動エネルギーと位置エネルギーとの関係が分かりやすいなどの理由で、小学校から高校に至るまで理科の教材として広くとり上げられている。

小学校の理科では第５学年のＡ(2)の「振り子の運動」の単元で、中学校では第２学年の「運動とエネルギー」の中で学習することになっている。そして振り子運動の規則性については、主に次の３つの点が中心課題となっている。

①振り子の長さが長くなるほど、周期が長くなる。

②振り子のおもりの重さが変わっても、周期は変わらない。

③振れ幅が変わっても、周期は変わらない。

筆者は小学校教員養成課程の「理科」や「理科教育法」を担当しており、その中で少なくとも１回は「振り子運動」をテーマに授業を行っている。そこでは教壇の上にスタンドを置いて振り子を振らせ、小学校の教科書に記載されている通り、振り子が10往復するのに要した時間をストップウォッチで計測して周期を求めるのである。

しかし実際にやってみると、振れ幅が小さいときと大きいときの周期を測定したとき、どうしても振れ幅が大きいときのほうが、ほんの少しではあるが、長くなるのに気づかされたのである。

表１はふつうの振り子を使って、ゼミの学生に測定してもらったときの一例である。いずれの場合も、振れ幅が５度よりも30度のときのほうが長いことが分かる。

* Hitoshi IGASHIRA　教育学部教授　理科教育法、保育内容「環境」、生活と科学

表１．振れ幅の大小の違いによる10往復にかかる時間（秒）

測定者	振れ幅５度	振れ幅30度	差
1	16.44	16.80	+0.36
2	16.42	16.72	+0.30
3	16.40	16.65	+0.25
4	16.50	16.70	+0.20
5	16.38	16.60	+0.22
6	16.25	16.81	+0.56
7	16.13	16.72	+0.59
8	16.58	16.96	+0.38

10往復の時間であるので周期に直すとその大きさは10分の１であるので、授業では誤差の範囲であるとして問題にとり上げないようにしてきたが、筆者自身の頭の中にはどうしてもすっきりしなくて何か引っかかるものを感じたのである。手動で測定するので誤差が生じるのは仕方がないが、８人中８人ともに、振れ幅が大きいときのほうが10往復するのに要する時間が長いというのは不自然である。

もしかすると、③の法則は不完全であり、振れ幅が大きくなると周期が長くなるのではないかという疑問が湧き出てきたのである。

そこで今回は、①～③の振り子運動の規則性のうちの③の「振れ幅が変わっても周期は変わらない」という法則に焦点を絞って、詳しく調べることにした。

Ⅱ．実験方法

使用器具

・振り子装置　C-15-4475ナリカスタンド取り付け型、糸は２本がＶ字型になっていて左右以外の方向に振れないようになっている。おもりの重さは43.7ｇ。

・スタンド自身が揺れるのを防ぐために、２組のスタンドを立て、両者を互いに２本の棒で固定した。

・長さ１ｍの振り子の場合は、二段重ねのロッカーの上に振り子を固定して振らせた。振れ幅は、分度器の拡大コピーした用紙を用いて測定した。

振れ幅：鉛直線と糸の角度で表示した。

実験日時：2014年２月～2016年３月。

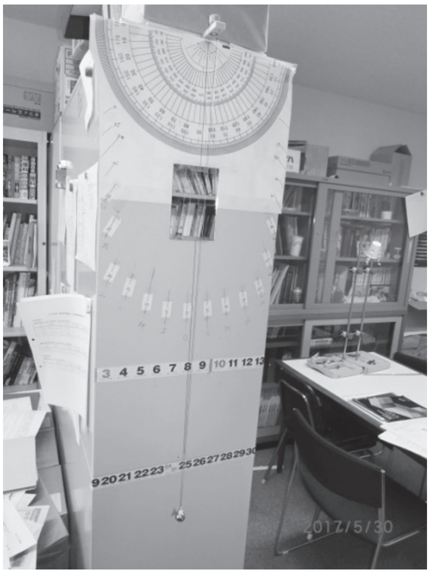

図１．長さ１ｍの振り子
（ロッカーの側面に設置）

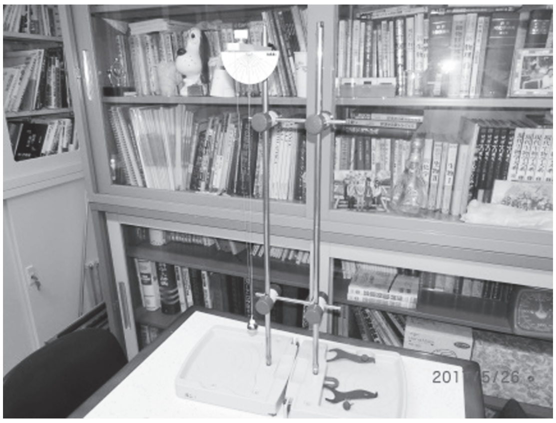

図２．実験で用いた振り子装置の写真

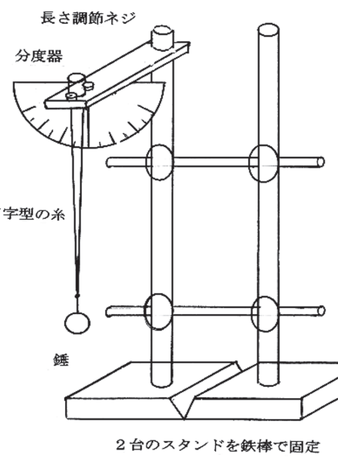

図３．振り子の模式図

表２．振れ幅が５度の場合と30度の場合の周期の比較

No.	５度の場合		30度の場合		周期の差
	10往復（秒）	周期（秒）	10往復（秒）	周期（秒）	（秒）
1	20.14	2.01	20.37	2.04	+0.03
2	20.10	2.01	20.31	2.03	+0.02
3	20.11	2.01	20.26	2.03	+0.02
4	20.17	2.02	20.37	2.04	+0.02
5	20.15	2.02	20.40	2.04	+0.02
6	20.18	2.02	20.32	2.03	+0.01
7	20.18	2.02	20.45	2.05	+0.03
8	20.08	2.01	20.30	2.03	+0.02
9	20.10	2.01	20.38	2.04	+0.03
10	20.11	2.01	20.52	2.05	+0.04
平均	20.13	2.01	20.37	2.04	+0.03

Ⅲ．結果

１．振れ幅が小さい場合と大きい場合の周期の比較

振れ幅が小さい（５度）場合と、大きい（30度）の場合の周期に違いがあるかどうかを確かめた。周期は教科書と同じように、振り子が10往復するのに要する時間をストップウォッチで測定し、10で割って求めた。このときの振り子の長さは約１m である（図１）。測定を10回くり返した結果を表１に示す。

10往復に要した時間を10で割って周期を出すとき、ふつうは小数点以下第３位を四捨五入するので、振れ幅が大きい場合の周期は平均で2.04秒となり、振れ幅が小さい場合の周期は2.01秒となる。この結果、100分の３秒の差が出てくるが、これくらいの差は誤差の範囲とみなして、振れ幅が大きいときと小さいときの周期は変わらないという結論に達するのである。

しかし、10往復の時間に注目すると10回ともすべて、振れ幅が大きいほうが平均で0.24秒だけ、大きい値を示している。振れ幅が30度と５度の違いによる10往復に要した時間の違いの有意差検定を行ったところ、t ＝9.27＞2.88となり、危険率１％未満で有意差が認められた（立川清 1977『例解統計学』pp. 126-129第一出版）。

手動で測定しているから誤差の範囲といえばそれまでであるが、そうであるならば振れ幅が大きい小さいに関わらず、長くなったり短くなったりするはずである。ということは、振れ幅が大きくなれば周期が長くなるのではないか。振れ幅が変わっても周期は変わらないという振り子運動の常識が、条件によっては成り立たないのではないだろうか。

２．振り子運動の振れ幅の変化と周期の関係

（1）ストップウォッチを用いた場合

振り子の振れ幅と周期の関係をさらに詳しく調べるために、長さ50 cm の振り子を用い、振れ幅を５度から10度、20度、30度と少しずつ変えて、周期がどのように変化するのかを測定した。振り子の長さを50 cm にしたのは、小学校の授業で使用するスタンドを使った振り子の実験条件と同じほうが良いと考えたからである。測定の仕方はこれまでと同様にストップウォッチを用いて、10往復するのに要する時間を測定し、10で割って周期を求めた。測定の誤差を前回のやり方よりもさらに小さくするために、測定を７回行い、最大と最小を切り捨て、あとの５回の平均値を採用した。結果を図４の○で示す。

振れ幅の角度が30度くらいまでは周期が1.42秒から1.44秒の範囲にあり、それほど大きな変化は認められないが、振れ幅が30度以上になると振れ幅が右肩上がりの直線状に周期が長くなる。比を計算すると振れ幅が10度増すごとに、周期は0.034秒ずつ長くなっている。

（2）ビデオを用いて周期を測定した場合

人の手でストップウォッチを用いて測定した場合、精度に限界がある。そこで精度をさらに高める方法として、振り子運動をビデオ撮影し、画面内のタイマーで周期を測定することにした。

しかし、実際にやってみると直ぐに問題があるこ

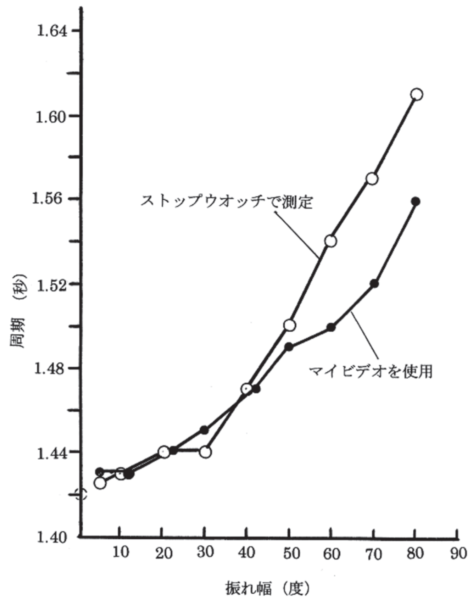

図４．振れ幅と周期の関係
（振り子の長さ50 cm）

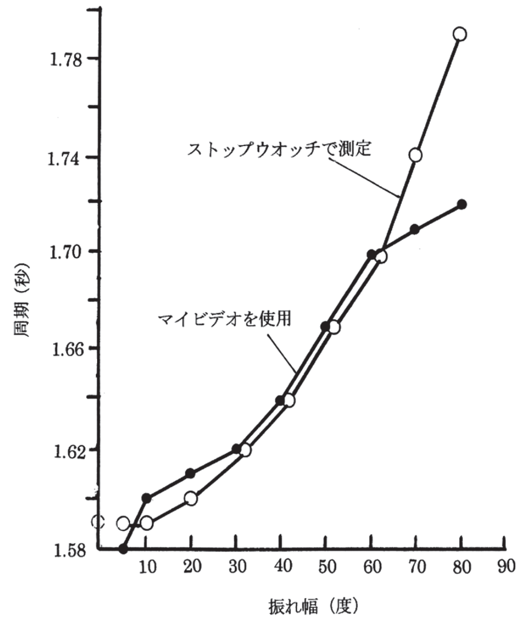

図５．振れ幅と周期の関係
（振り子の長さ63 cm）

とに気づかされた。ふつうのビデオカメラでは、画面内に表示されるタイマーは秒単位でしか表示されないのである。何か良い方法はないものかとパソコンに詳しい人に相談したところ、マイビデオというソフトを使って動画をパソコンに取り込み、再生すると100分の１秒の単位まで表示されることを教えてもらった。

そこで、ビデオの映像をパソコンに取り込み、再生したときの画面のタイマーで周期を求めることにした。この場合は、振り子が１往復するときの時間を直接求めた。実際にやってみると、再生、ストップ、バックなどをくり返していると、同じ場面でもタイマーの数値に多少のずれが生じることがあったが、0.01秒～0.02秒程度であったので、ここでは無視することにした。結果を図４の●で示す。

ストップウォッチを用いて手動で測定した結果と比較すると、ストップウォッチを用いたときは右肩上がりの曲線となっているが、マイビデオを用いて測定したときは、右肩上がりは同じであるが、直線に近い変化を示している。いずれにしても、振れ幅が大きくなると、周期が長くなるという結果が得られた。

（３）振り子の長さが63 cm のとき、ストップウォッチとビデオ撮影で測定したときの比較

これまでの振り子の長さは50 cm であったが、振り子の長さをもう少し長くして63 cm に設定し、これまでと同様の実験を行った。スタンドの鉄柱の高さの関係で、それ以上長くするとおもりがスタンドの台の部分に触れてしまうからである。結果を図５に示す（○はストップウォッチで測定した場合、●はビデオ撮影したものをマイビデオで再生した場合）。

先ほどと同様の結果であるが、ストップウォッチで測定したときの変化（○）は、直線というよりもむしろ放物線のような曲線を描いている。この放物線が座標Ａ点（０、1.59）とＢ点（80、1.79）を通ると仮定して $y = ax^2 + b$ に代入して計算すると、次のような関係式が得られる。

$$y = 0.0003x^2 + 1.59$$

｛ｙは周期、ｘは振れ幅（度）、$x \leqq 90$度｝

ビデオの場合（●）は、右肩上がりの直線に近い変化を示している。

３．高速度撮影で測定したとき

知り合いの高校の物理の先生に相談してみたところ、「高速度撮影することができるカメラがあり、それを用いると100分の１秒単位で時間が測定できる」ことと、「振り子の長さをもう少し長くするほうがよいのでは」というアドバイスをもらった。そこで、振り子の長さを最初の１ｍに戻して、三脚に固定したカメラで撮影し、周期を測定した。結果を表３に示す。

表３．振れ幅と周期の関係を高速度撮影で求めた場合

振れ幅（度）	スタート時の指標	ストップ時の指標	周期（秒）	２度の時との差（秒）
2	0.233	2.241	2.008	—
5	0.174	2.183	2.009	+0.001
10	1.166	3.174	2.008	0
15	0.408	2.420	2.012	+0.004
20	1.141	3.158	2.017	+0.009
25	1.633	3.658	2.025	+0.017
30	0.991	3.031	2.040	+0.034
35	2.033	4.083	2.050	+0.042
40	0.266	2.333	2.067	+0.059
45	0.174	2.258	2.084	+0.076
50	0.316	2.422	2.106	+0.098
55	0.374	2.499	2.125	+0.117
60	0.374	2.518	2.144	+0.136
65	0.533	2.716	2.183	+0.175
70	0.574	2.820	2.246	+0.238
80	1.074	3.390	2.316	+0.308

数値としては1,000分の１秒まで示されているが、これはあくまでも画面内にあるタイマーの数値を示しているに過ぎない。この表からだけでは振り子の振れ幅と周期の関係が分からないので、前回のときと同様に横軸に振れ幅の角度、縦軸に周期をとって図６に表した。

非常にきれいな下に凸の放物線状の曲線となっている。この曲線がＡ点（0、2.008）とＢ点（80、2.316）を通る放物線であると仮定すると、計算により次のような関係式が得られる。

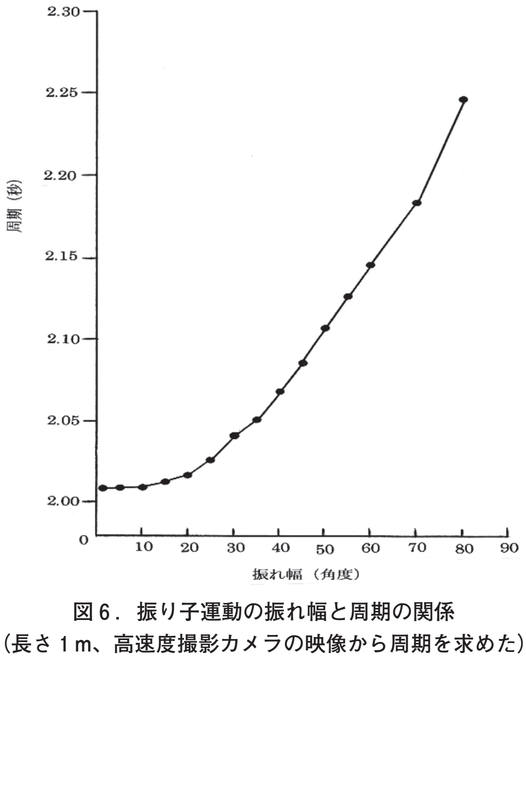

図６．振り子運動の振れ幅と周期の関係
（長さ１m、高速度撮影カメラの映像から周期を求めた）

$y = 0.000048x^2 + 2.008$

〔ｙは周期、ｘは振れ幅（度）、$x \leqq 90$度〕

４．振れ幅が大きくなったときの周期の補正

高校の物理で振り子の周期を求める公式　$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ を学んだが、そのとき「振れ幅が十分小さいとき」という制限があったことを覚えている。そこで、教科書や参考書を取り出して、振り子の周期の求め方についてチェックしてみることにした。

振り子の長さをℓ、振れる角度をθ（$0 < \theta \leqq 90°$）、おもりのＸ座標をｘとすると、運動方程式は

$F = -mg\sin\theta$　$\sin\theta = x/\ell$ であるので、

$F = -mg\,x/\ell$　…①式

m、g、ℓ は定数であり、振り子に働く力（F）の方向は変位（x）と逆向きで、その大きさは変位

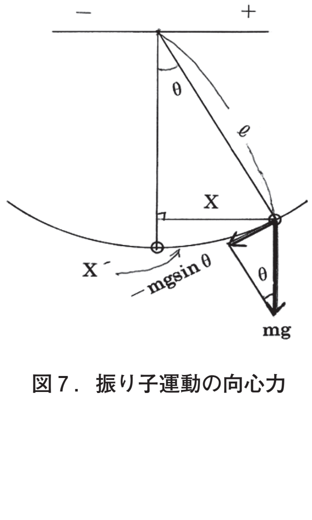

図７．振り子運動の向心力

の大きさに比例する。すなわち、右に振れるほど大きな力が左の方向に働き、左に振れるほど大きな力が右の方向に働く。おもりが真下にあるときは働く力は０となる。これは単振動する物体に働く向心力Ｆと同じで、おもりは単振動することになる。

ところで、各振動数をω（rad ／ s，ラディアン）とすると、単振動の向心力は

$F=-m\omega^2 x'$…②式

で表される。そこで、①式と②式のＦが同じであるとすると、

$-mgx/\ell=-m\omega^2 x'$…③式　となる。

振れる角度θが十分に小さいとき、$x \fallingdotseq x'$であるから、両辺から$-mx$が消去されて

$g/\ell=\omega^2$…④式　となる。

また、単振動の周期Ｔは　$T=2\pi/\omega$であるから、$\omega=2\pi/T$となる。

これを④式に代入すると、

$$\sqrt{g/\ell}=2\pi/T \quad \therefore \quad T=2\pi\sqrt{\ell/g}$$

という振り子運動の周期の公式が求められる。ただし、①式の x は、おもりの位置の x 座標であり、②式の x′ は点 p と点 q の円弧の長さである。振れる角度が非常に小さい場合は$x \fallingdotseq x'$と考えても差し支えないが、角度θが大きくなれば、x と x′ が等しいとみなすことができなくなる。

仮に、弧 x′ が x の1.2倍であるとすると

$-mgx/\ell = -m\omega^2 x' \times 1.2/1.2$

$x = x\,7/1.2$ であるから

$g/\ell = \omega^2\times1.2$

$\omega^2=g/1.2\ell \qquad \omega=\sqrt{g/1.2\ell}$…⑤

⑤式に$\omega=2\pi/T$を代入して

$\sqrt{g/1.2\ell} = 2\pi/T \quad \therefore \ T=2\pi\sqrt{1.2\ell/g}$

$=2\pi\sqrt{\ell/g}\times\sqrt{1.2}$ …⑥

となる。弧 x′ が x の1.2倍であるとすると、周期は$\sqrt{1.2}$倍に長くなるのである。

言い換えると、振れ幅が大きくなると、周期は$\sqrt{x'/x}$倍に長くなることを示唆している。

この方法で補正した周期を、先ほどの高速度撮影カメラで実測した周期を比較したのが図８の△である。

インターネットなどで調べたところ、さらに厳密な周期を求めたものが掲載されていたが、第一標準楕円積分や Wolfram Alpha の Elliptick 関数を用いるなど本論文の範疇外のものであるので、ここでは周期を厳密に求めるための式の紹介だけに留めておく。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\sin^{2n}\frac{\theta\max}{2}\right\}$$

さらに、最初の３項だけを有効値として用いたときの具体的な計算式は次のようになる。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left\{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta}{2}\right\}$$

上記の式を用いて計算してみた。結果を表５に示す。さらに、今回の高速度撮影カメラで計測した周期と比較するために、振れ幅２度のときの周期2.008秒に掲載されていた増加率を掛けて補正した周期を図８の○で示した。

表４．計算で補正した周期

振れ幅（θ）	X（$\ell\sin\theta$）	X′	X′／X	$\sqrt{x'/x}$	補正した周期（秒）
2	0.0349ℓ	0.0349ℓ	1.0000	1.0000	2.008
5	0.0872ℓ	0.0873ℓ	1.0011	1.0005	2.009
10	0.1736ℓ	0.1747ℓ	1.0063	1.0031	2.0142
15	0.2588ℓ	0.2620ℓ	1.0124	1.0062	2.0204
20	0.3420ℓ	0.3493ℓ	1.0213	1.0106	2.0293
30	0.5000ℓ	0.5234ℓ	1.0468	1.0231	2.0544
40	0.6428ℓ	0.6981ℓ	1.0860	1.0421	2.0925
50	0.7660ℓ	0.8727ℓ	1.1393	1.0674	2.1433
60	0.8660ℓ	1.0474ℓ	1.2095	1.0998	2.2084
70	0.9397ℓ	1.2215ℓ	1.2999	1.1401	2.2893
80	0.9848ℓ	1.3961ℓ	1.4176	1.1906	2.3907
90	1.0000ℓ	1.5708ℓ	1.5708	1.2533	2.5166

表5．厳密な計算に基づく周期の増加率と補正した周期

振れ幅（θ、度）	周期の増加率＊
6	1.0012
10	1.0019
20	1.0076
30	1.0174
40	1.0312
50	1.0491
60	1.0713
70	1.0975
80	1.1273
90	1.1600

4．考察

（1）振り子運動の等時性への疑問

ガリレイが発見した振り子運動の等時性に異論を唱えるようで恐れ多いが、周期を求める公式（$T = 2\pi\sqrt{\ell / g}$）は振れ幅が小さいときにという条件が付いていることは高校の物理で学んだ。しかし、振れ幅が大きくなると周期が長くなるのか短くなるのか、あるいはどのように変化するのかについては学んだ記憶がないし、その後もその関係を示したグラフや解説した著書などを見たことが殆どない。そこで、筆者は振り子の振れ幅を大きくしたとき、周期がどのような変化を示すのかについて詳しく調べたいと考えて今回の実験に至ったのである。

最初は小学校の教科書に記載されている通りのやり方、すなわち振り子が10往復する時間をストップウォッチで測定したが、高速度撮影カメラを用いたときと同じような曲線が得られた。手動といえども、案外正確な周期を測定できることに驚かされる。これは、7回測定して、最大値と最小値を切り捨て、中央の5回の平均値を採用するという方法が功を奏したのではないだろうか。

反対に、ビデオカメラを用いるともっと正確な周期が測定できると考えていたが、実際には指標となる時間表示が1秒単位で今回の実験では役立てることができなかった。知人に教えてもらったマイビデオというソフトでパソコンに取り入れた場合、再生する度にタイマー表示が0.02程度狂って、手動以上に誤差が生じることが分かった。

最終的には高速度撮影カメラを使ったのであるが、これでようやく筆者自身が満足できる確かさの周期を測定できたのである。結果は、ビデオを使った場合よりも手動でストップウォッチの場合とよく似た曲線が得られた。

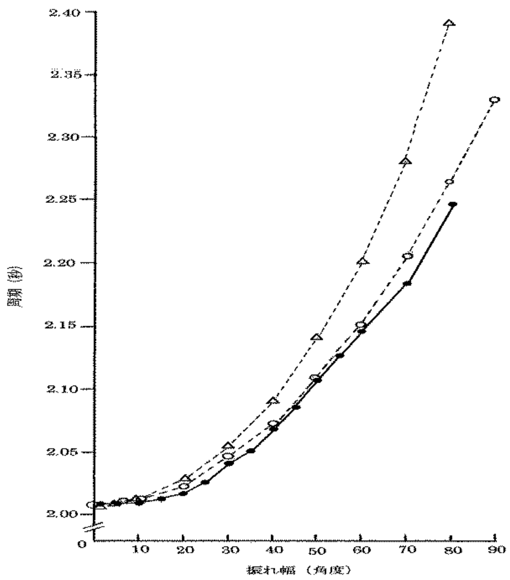

図8．実験値と補正値の比較
●：実験地、△：筆者の方法による補正値、
○：厳密な計算法による補正値

考えてみると、アナログのストップウォッチを使っていたひと昔前までであれば、誤差の範囲であるとして見過ごしていたが、100分の1秒単位で示されるデジタルのストップウォッチを用いるようになった現在、振れ幅の違いによって周期が異なっていることが手動でも出てくるようになったのである。

（2）周期の修正

今回、振り子運動の周期の公式を導き出す過程を見直すことによって、周期が $T = 2\pi\sqrt{\ell / g}$ よりも $\sqrt{x' / x}$）倍、長くなるとして補正を行ったところ、確かに振れ幅が大きくなると周期が長くなるという結果を導き出すことはできるが、補正値が実測値よりもかなり大きくなることが分かった。このことから、筆者が述べた方法は、振れ幅が大きくなれば周期が長くなるということを示すのに用いることはできても、厳密な周期を求めるためには用いないほうがよい。

インターネット上で紹介されていた完全楕円積分を用いた計算法の結果は、高速度撮影カメラで測定した周期と非常に近い値を示している。ただし、この計算法を用いるには専門的な物理、数学的な知識が要するので、一般の人々には使いこなすことが困難である。

多くの人々は、ガリレイの発見した振り子運動の等時性について何の疑いの余地もないと考えているかもしれないが、振り子とストップウォッチ、それにほんの少しの好奇心さえあれば、それらのほころびを垣間見ることができるのである。これこそ、自然科学の醍醐味ではないだろうか。

参考文献

・朝永振一郎他　1968　物理Ｂ　大原出版　pp. 117-122。
・茅誠司他　1976　物理Ⅱ　学校図書　pp. 6-22。
・力武常次他　1991　新物理　数研出版　pp. 53-61。
・単振動 http://wakariyasui.sakura.ne.jp/p/mech/tann/tannsinn.html
・楕円積分 http://hooktail.sub.jp/mathInPhys/elliptical/