

株式収益率の相互依存関係について： 連続型ウェーブレット変換の応用

Interdependence between Stock Returns: Application of Continuous Wavelet Transform

羽 森 茂 之

This paper empirically analyze the interdependence of stock returns between the United States and the United Kingdom. Continuous wavelet transform is employed to analyze the coherence between the stock returns of two countries. Each stock return shows strong spectrum power in low frequency regions, whereas two returns show strong coherence in low frequency regions. This may indicate that the co-movement between the two markets is significantly influenced by fundamental elements.

Shigeyuki Hamori

JEL : G10, C58

キーワード：連続型ウェーブレット変換、ウェーブレット・パワースペクトル、コヒーレンス、位相差、株価

Keywords : continuous wavelet transform, wavelet power spectrum, coherence, phase difference, stock prices

1. はじめに

本論文の目的は、連続型ウェーブレット変換の経済分析への応用可能性に関して議論を行うことにある。¹⁾ ウェーブレット変換とは、Morlet et al. (1982a, 1982b) によって開発された信号の特性を解析する分析手法の一つであり、音声処

1) ウェーブレット解析に関しては、例えば、Gençay et al. (2001)、Percival and Walden (2000)、榊原 (1995)、赤間 (2015) 等を参照のこと。本論文におけるウェーブレットの解説に関してはこれらの文献に負うところが多い。

理、画像処理等の信号処理に幅広く応用されている。ウェーブレット (wavelet) という言葉は、「ウェーブ (波)」と「レット (小さい)」の組み合わせである。ウェーブレット変換は、与えられたデータに対して、拡大縮小と平行移動を適用することで、様々な周期の波を含むデータの構造を派生させることができ、時間領域と周波数領域の両方において信号の特徴を把握できるという特徴がある。さらに、ウェーブレット変換は、不規則かつ非定常な変数の分析に向いており、経済データを対象とした時系列分析への応用が期待される。

一般に、経済変数の動きは局所的に周期的な変動であり、その周波数が時間と共に変化するものが多い。例えば、ある経済変数の動きは、一定の周波数がある期間持続するが、次には全く異なる周波数の変動に変わる。このように、局所的に周期的な変動を時間の推移の中でとらえること、つまり、変数を時間と周波数の両面からとらえることを時間周波数解析という。換言すれば、時間周波数解析によって、変数の動きを時間周波数平面で幾何学的に表現することが可能となる。ウェーブレット変換は、変数の時間周波数解析を行う方法の一つである。

本論文では、連続型ウェーブレット変換に関する分析手法を解説し、イギリスとアメリカの株価のデータに対してウェーブレット変換を行うことにより両者の相互依存関係について分析を行う。株式収益率の相互依存関係をモデル化することは、ポートフォリオのリスク管理における重要な問題である。株式収益率の変動に対しては、ポートフォリオを適切にリバランスする必要がある。しかし、異なった周期におけるリスク管理や株式相場の相互依存関係という重要な問題に関しては、これまで、必ずしも十分な研究蓄積があるとはいえない。本研究では、異なった周期における株価の動学的相互依存関係を分析するために、連続型ウェーブレット変換を用いた分析を行う。²⁾

以下の構成は、次の通りである。第 2 節で連続型ウェーブレット変換に関する分析手法を簡単に整理し、第 3 節でデータの基本的特徴について分析を行う。第 4 節で実証結果を示したのち、第 5 節で結論が述べられる。

2) ウェーブレット・コヒーレンスを用いて市場間の依存関係について分析を行った研究の例として、Rua and Nunes (2009) を参照。

2. 連続型ウェーブレット変換

2.1 フーリエ変換

ウェーブレット変換について議論を行う前に、信号処理の基本的分析手法であるフーリエ変換 (Fourier transform) について簡単にまとめる。³⁾

一般に、音声、画像等は信号として記述することができる。音声は「1次元信号」であり、画像は「2次元信号」で表される。デジタル信号処理では、信号は「波」として記述される。つまり、音声は時間的な波として理解でき、画像は空間的な波として解釈することが可能である。経済データに関しても、同様に、時間的な波として理解することができよう。

いま、時間 (t) の関数である変数 $x(t)$ を考える。一般に、1次元信号は、正弦波信号として、次のように表わすことができる。

$$x(t) = A \sin(2\pi \cdot F \cdot t + \theta) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1)$$

ただし、 A ：振幅 (amplitude)、 θ ：初期位相 (initial phase)、 F ：周波数 (frequency)、 $\omega = 2\pi \cdot F$ ：角周波数 (angular frequency) である。

(1) 式は、変数 $x(t)$ の値は、「 $\pm A$ 」の範囲で周期的に変化することを示している。初期位相は、信号の相対的なずれを示す。周波数は、決まった時間内に変化する振動数を示し、周期 (cycle ; T) はある時点の値に循環して戻るまでの時間を示す。周波数と周期との間には逆数の関係 ($FT = 1$) が成立する。

正弦波信号は、常に実数値を取るとは限らず、複素数値をとる場合もある。その場合の複素正弦波信号は次のように定義される。

$$x(t) = Ae^{i(\omega t + \theta)} \quad (2)$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を示す。また、オイラーの公式 ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) を用いて

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) + iA \sin(\omega t + \theta) \quad (3)$$

をえる。つまり、複素正弦波は正弦波と余弦波の組み合わせとして表現される。

3) 本節の説明に関しては、和田 (2009)、赤間 (2016) を参考にしている。

一般に、一次元信号 $x(t)$ のフーリエ変換 ($F(\omega)$) は、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4)$$

と定義される。なお、フーリエ変換が存在するためには、次の条件が必要となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (5)$$

フーリエ逆変換 (inverse Fourier transform) は、

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (6)$$

と定義される。(4) 式及び (6) 式から明らかなように、フーリエ変換は時間領域 (time domain) から周波数領域 (frequency domain) への変換であり、フーリエ逆変換は周波数領域から時間領域への変換である。 $x(t)$ のフーリエ変換をフーリエ逆変換すればもとの $x(t)$ に戻る。⁴⁾

ここで、フーリエ変換 ($F(\omega)$) の実部 (real part; Re) を「 $\text{Re}(F(\omega))$ 」、虚部 (imaginary part; Im) を「 $\text{Im}(F(\omega))$ 」とすると、

$$F(\omega) = \text{Re}(F(\omega)) + i\text{Im}(F(\omega)) \quad (7)$$

と書け、その絶対値の自乗値

$$|F(\omega)|^2 = (\text{Re}(F(\omega)))^2 + (\text{Im}(F(\omega)))^2 \quad (8)$$

は、「パワースペクトル」 (power spectrum) と呼ばれる。これは、 $x(t)$ の中の各周波数成分がどの程度の強さで含まれているのかを示している。

さらに、

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{\text{Im}(F(\omega))}{\text{Re}(F(\omega))} \right) \quad (9)$$

は、「位相スペクトル」 (phase spectrum) と呼ばれる。

しかし、フーリエ変換を用いた分析には、時間と周波数の両者について同時に精度をあげることができないという問題がある (「フーリエ解析の不確定性

4) 時間領域の分析では、時間の経過に伴う変数の変化の程度を把握することは容易であるが、変数の変化の各周波数毎の構成要素を把握することが困難である。これに対して、周波数領域の分析では、変数の変化の各周波数毎の構成要素を読み取ることは容易であるが、時間の経過に伴う変数の変化の程度を把握することが困難である。

原理」)。このような問題点を解決するためにフランス人の石油探査技師であったモルレー (Morlet) によって開発されたのが、ウェーブレット変換である (Morlet et al., 1982a, 1982b)。

2.2 ウェーブレット変換

いま、時間 t に依存する変数 $x(t)$ を考え、これを信号と呼び、この信号は、時間と共に振幅と周波数が変化すると仮定する。各信号の局主的な様子を見るためには、ウェーブレット $\psi(t)$ の変数 t を $(t-b)/a$ と置き換え、 $\psi((t-b)/a)$ が信号の局所的な変動に対応するように、実数 a, b を選択すればよい。ここで、 a, b は、それぞれ、スケーリング・パラメーター (scaling parameter)、シフティング・パラメーター (shifting parameter) と呼ばれる。

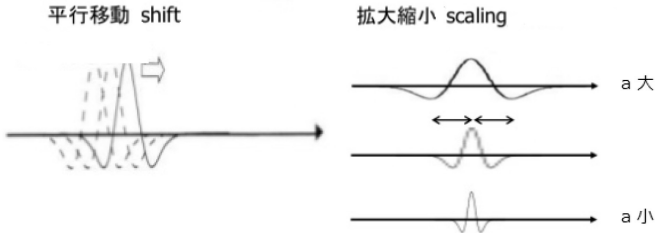
一般に、ウェーブレット変換は、連続ウェーブレット変換 (Continuous Wavelet Transform: CWT) と離散ウェーブレット変換 (Discrete Wavelet Transform: DWT) の 2 つに分けることができるが、前者は a, b が連続値のケースに対応し、後者は a, b が離散値のケースに対応している。

もとのウェーブレット $\psi(t)$ は「マザー・ウェーブレット (mother wavelet)」と呼ばれる。ウェーブレット $\psi((t-b)/a)$ は、マザー・ウェーブレット $\psi(t)$ を b の大きさだけ平行移動し、 a の大きさだけ伸縮したものである。

平行移動は、マザー・ウェーブレットの中心位置を時間軸上で左右に動かすことを意味する。マザー・ウェーブレットに対して、 $\psi(t) \rightarrow \psi(t-b)$ とすることにより、中心位置が b だけ移動する。この操作によって、任意の時間の相似な波形を取り出すことが可能となる。

伸縮は、マザー・ウェーブレットを横に伸ばしたり、押し縮めたりすることを意味する。これによって、周期 (周波数) を変化させることができる。マザー・ウェーブレットに対して、 $\psi(t) \rightarrow \psi(t/a)$ とすることにより、 $\psi(t)$ の幅が a 倍される。 a の値が大きくと幅の広いウェーブレットは、長期的なゆっくりと変化する成分 (長周期、低周波数) を示す。これに対して、 a の値が小さくと幅が狭いウェーブレットは、短期的な素早く変化する成分 (短周期、高周波) を示す (図 1 を参照)。

図 1 ウェーブレットの平行移動と伸縮



ウェーブレットで切り出した信号の部分は、それぞれ、時間軸上における位置と、その部分の局所的な周波数を表している。そこで、横軸に時間、縦軸に周波数をとる 2 次元平面を考え、これを「時間周波数平面」と呼ぶ。この時間周波数平面に、それぞれの成分を配置すると、信号の各部で周波数がどのように分布しているかが理解できる。

ここで、次のウェーブレット関数を考える。

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (10)$$

Aguiar-Contraria and Soares (2014, p.348) は、(10) 式で示される関数 $\psi_{a,b}(t)$ をウェーブレット・ドーターズ (wavelet daughters) と呼んでいる。変数 $x(t)$ の連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transformation; CWT) は、次のように定義される。

$$W_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (11)$$

ただし、 ψ^* は共役複素数を示す。(11) 式において $W_x(a, b)$ は、ウェーブレット係数と呼ばれる。ウェーブレット変換は、元の時系列を a, b の関数として表すことにより、時間領域と周波数領域の双方に対して同時に情報を与えてくれる。 a が小さい時は、 $W_x(a, b)$ は高い周波数成分に対応し、 a が大きい時は、 $W_x(a, b)$ は低い周波数成分に対応する。シフト係数 b の選択により、周波数成分ごとに異なるシフト量を用いることができる。

逆に、(11) 式で示されるウェーブレット変換からもとの時系列 $x(t)$ を復元することができる。ウェーブレット関数が次のアドミッシブル条件 (admissibility condition) を満たすとき、

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (12)$$

逆ウェーブレット変換が存在し、次のように求めることができる。

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_x(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}, \quad a > 0 \quad (13)$$

ただし、 $\hat{\psi}$ は ψ のフーリエ変換であり、 C_ψ の値はアドミッシブル定数 (admissible constant) と呼ばれる。また、一般的なアドミッシブル条件である (12) 式の代わりに次の条件式が用いられることも多い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (14)$$

(14) 式は、 $\psi(x)$ が振動的であることを意味している。

ウェーブレット・パワースペクトル (wavelet power spectrum, WPS) は、次のように定義され、変数 $x(t)$ の局所的な変動の程度を示す。

$$(WPS)_x(a, b) = |W_x(a, b)|^2 \quad (15)$$

(15) 式で示される WPS を、横軸に時間、縦軸に周波数 (または周期) から構成される 2 次元グラフで表し、各周波数の強弱を色の濃淡で出力した図は、スケイログラム (scalogram) と呼ばれる。

また、パワースペクトルについて時間に関して平均化すると、次のグローバル・ウェーブレット・パワースペクトル (global wavelet power spectrum; GWPS) が得られる。

$$(GWPS)_x(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |W_x(a, b)|^2 db \quad (16)$$

2.3 クロスウェーブレット

ウェーブレット・パワースペクトルは 1 つのデータ系列の変動の程度を評価するために用いられるが、多くの応用研究においては 2 つのデータ系列の相互

関係を評価する尺度が必要となる。クロスウェーブレット変換 (cross wavelet transform; XWT)、ウェーブレット・コヒーレンス (wavelet coherency)、及び位相差 (phase-difference) が、2つの時系列の間の時間領域と周波数領域における依存関係の分析で用いられる基本的な分析手法である。

Hudgins et al. (1993) にしたがって、2つのシグナル $x(t)$ と $y(t)$ のクロスウェーブレット変換 (cross wavelet transform) を次のように定義する。

$$W_{xy}(a, b) = W_x(a, b)W_y^*(a, b) \quad (17)$$

ただし、 $W_x(a, b)$ と $W_y(a, b)$ は、それぞれ、 $x(t)$ と $y(t)$ のウェーブレット変換である。

また、クロスウェーブレット・パワー (cross wavelet power: XWP) は次の通り定義される。

$$(XWP)_{xy}(a, b) = |W_{xy}(a, b)| \quad (18)$$

(18) 式においてであれば、(15) 式で与えられるウェーブレット・パワースペクトルがえられる。各時間と周波数のもとで、ウェーブレット・パワースペクトルが局所的な分散を示すのに対して、2変数のクロスウェーブレット・パワーは局所的な共分散を示す。

2つの変数の間の関係を評価する際に有益な指標が、ウェーブレット・コヒーレンス (wavelet coherence; R_{xy}) である。⁵⁾ これは、Torrence and Compo (1998) と Aguiar-Conraria et al. (2008) によって説明されている通り、

$$R_{xy} = \frac{|S(W_{xy}(a, b))|}{[S(|W_x(a, b)|^2)S(|W_y(a, b)|^2)]^{1/2}} \quad (19)$$

または、(19) 式の自乗を取った値 (スクエアード・ウェーブレット・コヒーレンス; squared wavelet coherence; R_{xy}^2) として次のように定義される。

5) ウェーブレット・コヒーレンス分析に関しては、Aloui and Hkiri (2014)、Uddina et al. (2013)、Aguiar-Conraria and Soares (2014) 等を参照。

$$R_{xy}^2 = \frac{|S(W_{xy}(a, b))|^2}{S(|W_x(a, b)|^2)S(|W_y(a, b)|^2)} \quad (20)$$

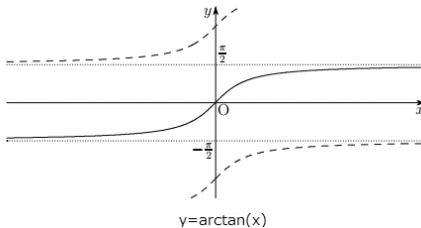
ただし、 S はスムージングオペレーターである（詳細に関しては、Grinsted et al. (2004) 及び Cazelles et al. (2007) 等を参照）。 R_{xy}^2 は、0 と 1 との間の値を取る ($0 \leq R_{xy}^2 \leq 1$)。相関が弱い場合には、 R_{xy}^2 は 0 に近い値を取り、強い相関を持つ場合には、 R_{xy}^2 は 1 に近い値を取る。

さらに、位相差 (phase-difference) を用いることにより、2 変数間のより詳細な関係 (変数間に正の関係があるか負の関係があるか、あるいは、変数間にリード・ラグの関係があるか) を知ることができる。ウェーブレット変換は複素数であるため、実部と虚部とに分けることができる。位相差を次のように定義する。⁶⁾

$$\varphi_{xy} = \arctan \left(\frac{\text{Im}\{S(W_{xy}(a, b))\}}{\text{Re}\{S(W_{xy}(a, b))\}} \right), \quad \varphi_{xy} \in [-\pi, \pi] \quad (21)$$

フェイズ情報は、矢印の向きと角度によって示される。位相差が 0 であるときは ($\phi_{xy} = 0$) 2 つの変数が同じサイクルで動いていることを示しており、両者は in phase の関係にある。位相差が π (または $-\pi$) のとき、変数 X と変数 Y のサイクルが 180 度シフトしていることを示しており、両者は out of phase (antiphase) の関係にある。もし、位相差が 0 と $\pi/2$ の間にあれば ($\phi_{xy} \in (0, \frac{\pi}{2})$)、2 変数は in phase の関係で動いているが、変数 X は変数 Y を先行している (X leads Y)。もし、位相差が $-\pi/2$ と 0 との間にあれば ($\phi_{xy} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$)、2 変数は in phase の関係で動いており、変数 Y は変

6) 一般的に関数 $y = \arctan(x)$ のグラフは、次のようになる。



逆正接関数 (arctan) のグラフ

数 X を先行している (Y leads X)。もし、位相差が $\pi/2$ と π との間であれば ($\phi_{xy} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$)、2 変数は out of phase の関係にあり、変数 Y は変数 X を先行している (Y leads X)。もし、位相差が $-\pi$ と $-\pi/2$ との間であれば ($\phi_{xy} \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$)、2 変数は out of phase の関係にあり、変数 X は変数 Y を先行している (X leads Y)。ここで、in phase は正の相関を意味しており、out of phase は負の相関を意味している。表 1 は、このような関係を整理したものである。

表 1 各領域における 2 変数の関係

$(0, \frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$
In phase (同方向)	In phase (同方向)	Out of phase (逆方向)	Out of phase (逆方向)
X leads Y	Y leads X	Y leads X	X leads Y

3. データと基本統計量

分析に用いた利用したデータは、イギリスとアメリカの株価である。標本期間は、2001 年 1 月 1 日から 2015 年 12 月 31 日の日次データを用いた。データの出所は、Bloomberg である。なお、分析に際しては、株価指数の対数階差を 100 倍した値を用いた。これは、日次あたりの収益率と考えることができる。したがって、実際に分析に用いた標本期間は一日ずれ、2001 年 1 月 2 日から 2015 年 12 月 31 日の間となる。図 2a 及び図 2b は、イギリスおよびアメリカの株式収益率の変動をグラフで示したものである。

表 2 は、各収益率の基本統計量をまとめたものである。Jarque-Bera (JB) 検定の結果によれば、正規分布に従うという帰無仮説は、有意水準 1% のもとで、両国の収益率に対して棄却されることを示している。表 3 は、各変数間の相関係数 (Pearson correlations) を示している。表 3 より、イギリスとアメリカの株式収益率には有意な正の相関があることがわかる。

表 2 基本統計量

	イギリス	アメリカ
平均	0.0058	0.0072
メディアン	0.0069	0.0154
標準偏差	0.5224	0.5373
歪度	-0.1726	-0.2125
尖度	9.7154	12.0033
Jarque-Bera 統計量*	7371.9430	13245.4700
標本の大きさ	3913	3913

* Jarque-Bera (JB) 検定の結果は、正規分布の仮説が、有意水準 1%のもとで、全ての通貨に対して棄却されることを示している。

表 3 相関係数 (Pearson correlations)

	イギリス	アメリカ
イギリス	1.0000	
アメリカ	0.5449 (0.000)	1.0000

括弧内の値は、 $H_0 : |t| = 0$ に対する t 検定の確率値を示している。

図 2a 株式収益率 (UK)

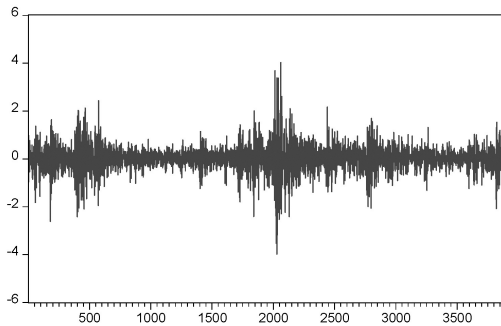
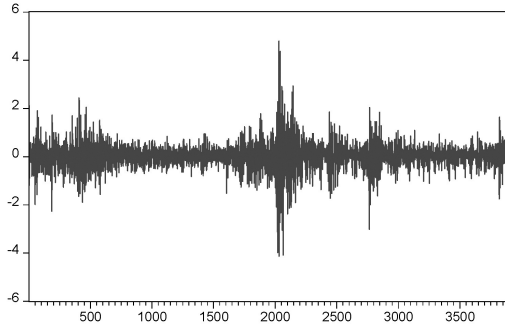


図 2b 株式収益率 (USA)



4. 分析結果

4.1 パワースペクトル

図 3 及び図 4 は、イギリスとアメリカの株式収益率に対して、ウェーブレット・パワースペクトルに基づく、スケイログラムを描いたものである。(図 3 はイギリス、図 4 はアメリカ)。縦軸は、周期を示しており、縦軸の値が大きくなることは、周期が長くなること(周波数が低くなること)を示している。つまり、下から上に移動するにつれて短い周期から長い周期へと周期が長くなること(高周波から低周波へと周波数が低くなること)を意味している。また、図において、ウェーブレット・パワーの水準が高い領域は変動が大きく、ウェーブレット・パワーの水準が低い領域は変動が小さいことを示している。つまり、ウェーブレット・パワーの水準が低くなるにつれて、変動の大きさが小さくなることを意味している。さらに、太い白線で囲まれた領域は、その変動が統計的に有意であることを示す。

まず、図 3 及び図 4 より、イギリスおよびアメリカの株価について、周期が 2 日から 16 日程度の比較的周期の短い変動に関しては強いスペクトルが示され、周期が 128 日から 1024 日の比較的周期の長い変動に関しては弱いスペクトルが示されていることが分かる。また、イギリスの株価に対して、比較的周期の短い変動に関しては、有意である時間領域が数多くあるのに対して、128

日の周期を超えるような比較的周期の長い変動に関しては、有意である領域がほとんど見られないことが分かる。アメリカの株価に対しても同様に、比較的周期の短い変動に関しては強いスペクトルが示され、比較的周期が長い変動に関しては弱いスペクトルが示されていることが分かる。

図5はイギリス、図6はアメリカのグローバル・ウェーブレットパワーを描いたものである（0.05は5%で有意、0.1は10%で有意）。これは、各周波数のパワースペクトルの大きさを時間に関して集計したものである。以上の点は、図5及び図6のグローバル・ウェーブレットパワーの図からも確認でき、比較的短い周期の変動に関して、両国とも、強いスペクトルが示されている。

図3 ウェーブレット・パワースペクトル (UK)

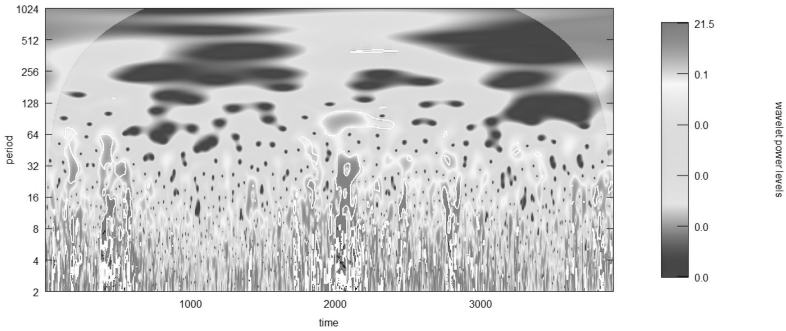


図4 ウェーブレット・パワースペクトル (USA)

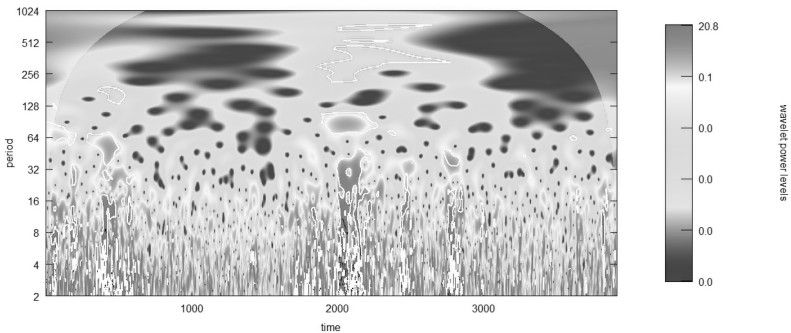


図 5 グローバル・ウェーブレットパワー (UK)

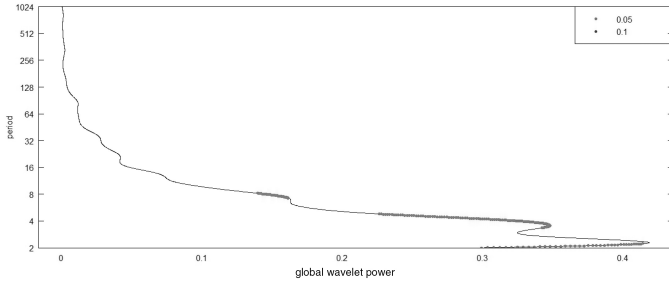
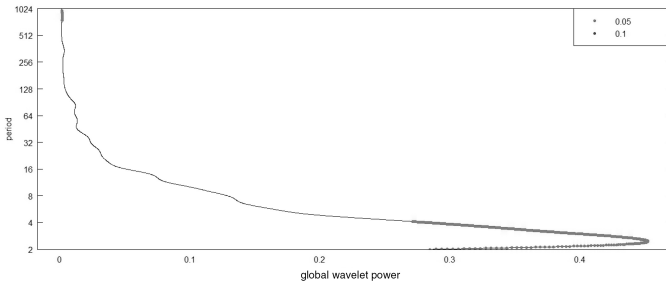


図 6 グローバル・ウェーブレットパワー (USA)



4.2 クロスパワースペクトルとコヒーレンス

図 7 は、イギリスとアメリカの株式収益率のクロスウェーブレット・パワー・スペクトルを示している。この図から明らかなように、短い周期の変動は強いスペクトルを示し、長い周期の変動は弱いスペクトルを示していることが分かる。しかし、より詳細に変数間の相互依存関係を分析するためには、2 変数の間のコヒーレンスを見る必要がある。

次に、コヒーレンスを用いて、変数間の関係を分析しよう。図 8 は、位相差を示したものである。まず、円の中で、右半分の領域はインフェイズ・ペア (in-phase pairs) を示し、左半分の領域はアウトオブフェイズ・ペア (out-of-phase pairs) を示している。インフェイズにある領域では、2 つの変数は同方向 (positive relationship) の動きを示し、アウトオブフェイズにある

図7 クロスウェーブレット・パワースペクトル (UK vs USA)

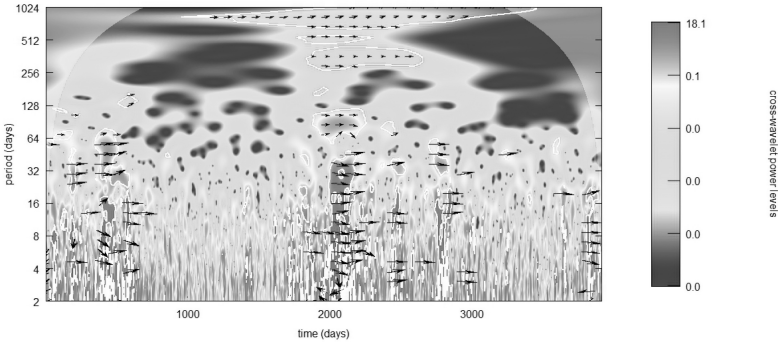
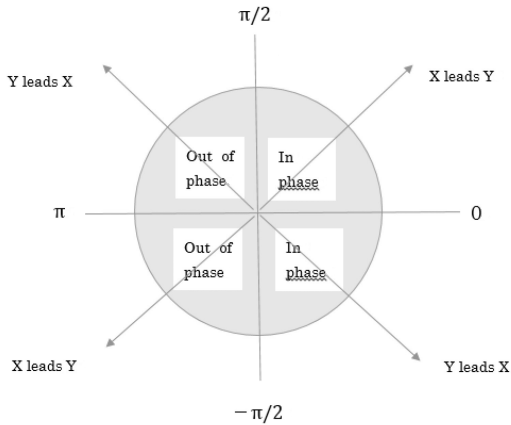


図8 位相差



出所：Aguiar-Conraria and Soares (2014) Figure 3 (著者により一部修正)

領域では、2つの変数は反対方向（negative relationship）の動きを示す。さらに、右上向き矢印と左下向き矢印は、xがyを先行しており、左上向きと右下向き矢印はyがxを先行していることを示している。

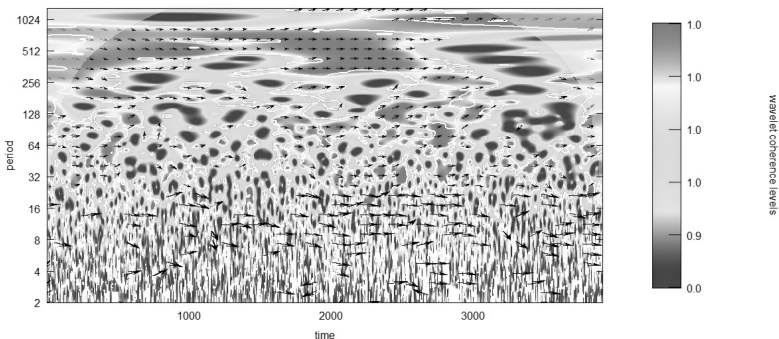
ここで注意しないといけない点がある。まず真右または真左を向く矢印に関しては、xとyの間には先行・遅行の関係はないことを示す。さらに、真上ま

たは真下を向く矢印に関しては、変数間の先行・遅行関係については定義ができない。

図 9 は、イギリスの株式収益率とアメリカの株式収益率の間のコヒーレンスを示している。図 9 において、各図の左側で示された縦軸は周期を示しており、横軸が時間を示している。さらに、コヒーレンスの図における右側の縦軸は 0 と 1 との間で制約されている。ウェーブレット・コヒーレンスの水準が上方から下方へと移動するにつれてコヒーレンスの値が減少し、2 変数間の関係が弱まることを示す。換言すると、コヒーレンスの値が 1 に近い領域では変数間に強い関係があり、0 に近い領域では変数間の関係が弱いことを示している。

図 9 より、アメリカの株式収益率とイギリスの株式収益率の間を見ると、短い周期（高周波）の領域では両者には強いコヒーレンスが見いだされないが、長い周期（低周波）の領域では両者には強いコヒーレンスが見いだされることが分かる。つまり、2 つの市場の収益率の関係を見ると、短期的な変動に関してはあまり関連性がないが、長期的な変動に関しては両者には密接な関係があるということが理解できる。さらに、矢印が右を向いていることにより、長期的には両者はインフェイズの関係にあり、両国の株式収益率は同様の変動を示すことがわかる。ここで、短い周期（高周波）における変数間の強いコヒーレンスは株式市場間の「contagion」を示し、長い周期（低周波）にお

図 9 コヒーレンス (UK vs USA)



ける変数間の強いコヒーレンスは株式市場の「interdependence」を示すものと解釈することも可能である。⁷⁾

5. 結論

本論文の主な目的は、ウェーブレット分析の手法を用いて、アメリカとイギリスの株式市場の収益率の変動を、周期の短い波（高周波）から周期の長い波（低周波）に分解し、それぞれの周期のもとでの変動の特徴を明らかにし、また、株式市場間の相互依存関係を明らかにすることである。ここで、周期の短い波の相互依存関係は「contagion」を含んでおり、周期の長い波の相互依存関係は、ファンダメンタルズに基づく「interdependence」を反映していると考えることができる。短期的な変動と長期的な変動を明確に区別することにより、投資家は、合理的な資産配分戦略を行い、最適なポートフォリオ構成を選択することが可能となる。また、政策担当者は、危機に対して、信頼できる政策対応を進めることが可能となる。

本論文での分析の結果、幾つかの興味深い点が明らかとなった。

・ウェーブレット・パワースペクトルの分析結果より、株式市場の収益率に関しては短期的な周期を持つ変動が長期的な周期を持つ変動よりも強いパワースペクトルを示すことが明らかとなった。

・ウェーブレット・コヒーレンスの結果から、アメリカの株式収益率とイギリスの株式収益率の間には、長期的な周期を持つ変動のほうが短期的な周期を持つ変動よりも強いコヒーレンスを示すことが明らかとなった。また、両者の関係はインフェイズの関係にあり、同方向に動くことがわかる。

市場参加者には、比較的短期的な視野のもとで取引を行う人々から、長期的な視野のもとで取引を行う人々まで様々な参加者がいる。ウェーブレットによる分析を行うことにより、時間領域と周波数領域の双方の観点から分析を行うことが可能となる。その結果、資産市場の収益率の変動に関してより詳細な分析を行うことが可能となり、市場参加者に対して重要な情報を提供することに

7) 異なった周期のもとで interdependence 及び contagion の分析に関しては、Bodart and Candelon (2009), Orlov (2009) を参照。

なると期待できよう。

謝辞

本研究は公益財団法人「全国銀行学術研究振興財団」の助成をえています。

参考文献

- Aguiar-Conraria, L., Azevedo, N., Soares, M.J., 2008. Using wavelets to decompose the time-frequency effects of monetary policy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 387, 2863-2878.
- Aguiar-Conraria, L., Soares, M.J., 2014. The Continuous Wavelet transform: Moving beyond uni- and bivariate analysis. *Journal of Economic Survey*. 28, 344-375.
- Aloui, C., Hkiri, B., 2014. Co-movements of GCC emerging stock markets: new evidence from wavelet coherence analysis. *Economic Modelling*. 36, 421-431.
- Bodart, V., Candelon, B., 2009. Evidences of interdependence and contagion using a frequency domain framework. *Emerging Markets Review*. 10, 140-150.
- Cazelles, B., Chavez, M., Magny, G., Guégan, J.-F. and Hales, S. (2007) Time-dependent spectral analysis of epidemiological time-series with wavelets. *Journal of the Royal Society Interface*. 4: 625-636.
- Gençay, R., Selçuk, F., Whitcher, B., 2001. *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*. Academic Press, San Diego.
- Grinsted, A., Moore, J.C., Jevrejeva, S., 2004. Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series. *Non-linear Process. Geophys.* 11, 561-566.
- Hudgins, L., Friche, c., and Mayer, M. (1993) Wavelet transforms and atmospheric turbulence. *Physics Review Letters*. 71, pp. 3279-3282.
- Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Giard, D. (1982a) Wave propagation and sampling theory-Part I: Complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics*. 47, 203-221.

- Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Giard, D. (1982b) Wave propagation and sampling theory-Part II: Sampling theory and complex waves. *Geophysics*. 47, 222-236.
- Orlov, A.G., 2009. A cospectral analysis of exchange rate comovements during Asian financial crisis. *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*. 19, 742-758.
- Percival, D.B., Walden, A.T., 2000. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press, London.
- Rua, A., Nunes, L.C., 2009. International comovement of stock market returns: a wavelet analysis. *Journal of Empirical Finance*. 16, 632-639.
- Torrence, C., Compo, G.P., 1998. A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of American Methodological Society*. 79, 61-78.
- Uddina, G.S., Tiwari, A.K., Arouri, M., Teulon, F., 2013. On the relationship between oil price and exchange rates: a wavelet analysis. *Economic Modelling*. 35, 502-507.
- 赤間世紀 (2015) 『ウェーブレット変換がわかる本』 工学社
- 榊原進 (1995) 『ウェーブレットビギナーズガイド』 東京電機大学出版局
- 和田成夫 (2009) 『よくわかる信号処理 — フーリエ解析からウェーブレット変換まで』 森北出版