微分ゲームにおける
シュタッケルベルク均衡III

Stackelberg Equilibria
in a Differential Game III

藤　原　憲　二

This paper provides a last part of the series of articles that review Stackelberg equilibria in differential games. We derive the *stagewise* Stackelberg equilibrium of a leader-follower model developed earlier.

Kenji Fujiwara

JEL：C73
キーワード：微分ゲーム、段階的シュタッケルベルク均衡
Keywords：dynamic game, stagewise Stackelberg equilibrium

1　導入

藤原（2012, 2014）では微分ゲームにおけるシュタッケルベルク均衡に関して、それぞれオープンループ・シュタッケルベルク均衡と 2 つあるフィードバック・シュタッケルベルク均衡のうちの 1 つである大域的シュタッケルベルク均衡について解説した。本稿はその続編で残るフィードバック・シュタッケルベルク均衡である段階的シュタッケルベルク均衡の導出法および大域的シュタッケルベルク均衡との比較を行う。

本稿の構成は次の通りである。第 2 節ではモデルを簡単に概観し、追随者の行動を記述する。第 3 節では先導者の行動を記述し、シュタッケルベルク均衡を導出する。第 4 節では前稿および本稿の議論をまとめる。

2 モデルと追随者の行動

先導者（政府）と追随者（独占企業）からなるゲームを考え、政府は生産補助金率の時間流列 s を、企業は生産量の時間流列 x をそれぞれの目的関数の初期時点から無限先までの割引現在価値を最大化するように決める。それらの目的関数は次のように与えられる。

$$\text{独占企業}: \int_0^\infty e^{-rt}\left(px - cx + sx - \frac{x^2}{2}\right)dt \tag{1}$$

$$\text{政府} \quad : \int_0^\infty e^{-rt}\left[\frac{(a-p)^2}{2} + px - cx - \frac{x^2}{2}\right]dt. \tag{2}$$

ここで (1) は独占企業の利潤の割引現在価値を、(2) は消費者余剰と独占企業の利潤の合計から補助金支出を引いた経済厚生の割引現在価値を表す。ここでこれらの目的関数に含まれる価格 p は瞬時に需給を一致させるようには決まらず、次式のように超過需要の正負によって緩慢にしか変化しないものとする。

$$\dot{p} = k(a - p - x), \quad k > 0. \tag{3}$$

以下では以上の仮定の下で政府が先導者、独占企業が追随者であるシュタッケルベルク・ゲームを考え、その均衡のうち段階的シュタッケルベルク均衡と呼ばれる均衡を解析的に導出する。

このモデルにおける追随者の行動は前稿で考えた大域的シュタッケルベルク均衡とほとんど同じである。そこでは先導者が $s(p) = \alpha p + \beta$ という戦略をとっているものとして追随者のハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式を解いたが、ここではそのような特定化をせずに一般的な p の関数 $s(p)$ として同様の問題を考える。したがって企業のハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式は次のようになる。

$$rV(p) = \max_x \left\{px - cx + sx - \frac{x^2}{2} + kV'(p)(a - p - x)\right\}.$$

ここで $V(\cdot)$ は独占企業の価値関数を表す。右辺を x で微分してゼロとおくと $p - c + s - x - kV'(p) = 0$ となり、これを x について解くと次式を得る。

$$x = -kV'(p) + p - c + s. \tag{4}$$

この式が独占企業の最適戦略を与えるが、この式から明らかなように追随者の

戦略は先導者の戦略である s に依存している。すなわち教科書的なシュタッケルベルク・ゲームと同じように、追随者の戦略は先導者の戦略の関数として表される。

3 先導者の行動と均衡

本節では前節での追随者の行動を考慮に入れて先導者の行動を記述し、均衡を導出する。追随者である独占企業の最適な戦略が (4) のように表されることが分かったうえで、先導者である政府は (2) で与えられる経済厚生を最大化するように補助金率 s の時間流列を決める。

ここで考える均衡も前稿と同じフィードバック・シュタッケルベルク均衡であるから、最適化問題は動学計画法を用いて解く。まず政府のハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式は次式で与えられる。

$$rW(p) = \max_s \left\{ \frac{(a-p)^2}{2} + px - cx - \frac{x^2}{2} + kW'(p)(a-p-x) \right\}. \quad (5)$$

ここで $W(\cdot)$ は政府の価値関数を表す。この式の右辺の x に (4) を代入すると次のように書き直される。

$$\begin{aligned} \text{右辺} = & \frac{(a-p)^2}{2} + \frac{[2p-2c+kV'(p)-p+c-s][-kV'(p)+p-c+s]}{2} \\ & +kW'(p)[kV'(p)-2p+a+c-s]. \end{aligned} \quad (6)$$

これを s で最大化するとその 1 階条件は次のようになる。

$$-s + 2kV'(p) - kW'(p) = 0.$$

よって政府の最適戦略は次のように求められる。

$$s = kV'(p) - kW'(p). \quad (7)$$

これを (4) の s に代入するとシュタッケルベルク均衡における追随者の戦略は次のようになる。

$$x = -kW'(p) + p - c. \quad (8)$$

以上で求めるべき戦略は得られたが、2 つの価値関数 $V(p), W(p)$ の関数形を特定化することでより明確な解を得ることができる。そこでこれまでと同じ

く 2 つの価値関数が次のように p に関する 2 次関数で与えられるとする。

$$V(p) = \frac{A^*}{2}p^2 + B^*p + C^*, \quad W(p) = \frac{A}{2}p^2 + Bp + C.$$

このとき $V'(p) = A^*p + B^*, W'(p) = Ap + B$ となるから、(7), (8) は次のように表される。

$$s = k[(A^* - A)p + B^* - B], \quad x = (1 - kA)p - kB - c. \tag{9}$$

これらを各プレーヤーのハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式に代入すると次のような 2 つの恒等式を得る。

$$r\left(\frac{A^*}{2}p^2 + B^*p + C^*\right) = \frac{[(1-kA)p - kB - c]^2}{2} + k(A^*p + B^*)(-p + a)$$

$$r\left(\frac{A}{2}p^2 + Bp + C\right) = \frac{(a-p)^2 + [(1-kA)p - kB - c]^2}{2} + k(Ap + B)(-p + a).$$

これらの式の左辺にある p^2, p の係数および定数項と右辺にある p^2, p の係数および定数項を等しいとおくと次のような 6 つの式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{rA^*}{2} &= \frac{(1-kA)^2}{2} - kA^* \\
\frac{rA}{2} &= \frac{1 + (1-kA)^2}{2} - kA \\
rB^* &= (kA - 1)(kB + c) + k(A^*a - B^*) \\
rB &= -a + (kA - 1)(kB + c) + k(Aa - B) \\
rC^* &= \frac{(kB + c)^2}{2} + kaB^* \\
rC &= \frac{a^2 + (kB + c)^2}{2} + kaB.
\end{aligned}$$

以上の 6 本の連立方程式を解くと A, A^*, B, B^*, C, C^* の 6 つの求めるべき係数が求められ、それらを (10) に代入すると段階的シュタッケルベルク均衡が得られる。

ただし以上のままではこれまでに求めた他の均衡との比較が極めて難しいので、前稿と同じく $k = 1$ とおく。このとき A, B, C は次のように求められる。

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{r+4-\sqrt{\Delta}}{2} \\
B &= \frac{\left(-r-4+\sqrt{\Delta}\right)(a-c)}{4} \\
C &= \frac{\left(r^2+4r+4-r\sqrt{\Delta}\right)(a^2+c^2)+2\left(r^2+4r-4-r\sqrt{\Delta}\right)ac}{16r} \\
\Delta &\equiv r^2+8r+8>0.
\end{aligned}
$$

これらを用いると段階的シュタッケルベルク均衡における経済厚生の割引現在価値は次のように求められる。

$$
\begin{aligned}
W(p) = & \frac{r+4-\sqrt{\Delta}}{4}p^2 - \frac{\left(r+4-\sqrt{\Delta}\right)(a+c)}{4}p \\
& + \frac{\left(r^2+4r+4-r\sqrt{\Delta}\right)(a^2+c^2)+2\left(r^2+4r-4-r\sqrt{\Delta}\right)ac}{16r}. \quad (10)
\end{aligned}
$$

他方、前稿で求めた大域的シュタッケルベルク均衡における経済厚生の式 (13) からこの均衡における $W(p)$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
W(p) &= \frac{r+4-\sqrt{\Delta}}{4}\left(p-\frac{a+c}{2}\right)^2 + \frac{(a-c)^2}{4r} \\
&= \frac{r+4-\sqrt{\Delta}}{4}p^2 - \frac{\left(r+4-\sqrt{\Delta}\right)(a+c)}{4}p \\
&\quad + \frac{\left(r^2+4r+4-r\sqrt{\Delta}\right)(a^2+c^2)+2\left(r^2+4r-4-r\sqrt{\Delta}\right)ac}{16r}. \quad (11)
\end{aligned}
$$

これは (10) と同じである。すなわち大域的シュタッケルベルク均衡と段階的シュタッケルベルク均衡で同じ経済厚生の値を与える。ただしこの結論は $k=1$ という仮定に強く依存していると思われ、一般的な k の値については違う経済厚生の値になると予想される[1)]。

4 結論

藤原 (2012, 2014) と本稿では既存文献では手薄だった微分ゲームにおけるシュタッケルベルク均衡の導出や性質について過度に数学的にならないように説明してきた。寡占モデルにおけるシュタッケルベルク・ゲームをはじめ、マ

1) これは手計算では求められない。

クロ経済政策の議論も政府対民間のシュタッケルベルク・ゲームとして定式化することで様々な興味深い結果が得られてきた。

オープンループ・シュタッケルベルク均衡は最大値原理を機械的に適用することで比較的簡単に解を特徴づけられるという利点を持つ一方、関数形を工夫しないと時間不整合性の問題が発生する。大域的シュタッケルベルク均衡は追随者については毎期問題を解き直すが、先導者は初期時点に全てを決めてしまうという意味でオープンループ解とフィードバック解の両方の性質を兼ねており興味深いが、その導出は極めて煩雑となる。現時点でどのように関数形を特定化すればモデルが扱いやすく（tractable）なるかの一般論は誰も示していないが、最も応用範囲の広い線形 2 次モデルで計算を簡単にするための方策を探ることはこの分野の大きな課題である。他方、段階的シュタッケルベルク均衡は両プレーヤーが毎期問題を解き直すことが想定されており、解自体も大域的シュタッケルベルク均衡よりも簡単に求められるうえに、時間不整合性の問題が起きない点で非常に強力な解概念である。しかしこれはオープンループ・シュタッケルベルク均衡や大域的シュタッケルベルク均衡が無用であることを意味しない。プレーヤー（特に先導者）が法律や国際的な協定によって自由に将来の戦略を決めることができないような状況下ではむしろオープンループ解や大域的シュタッケルベルク均衡の方がより適切に現実を説明しているといえる。

参考文献

藤原　憲二（2012），「微分ゲームにおけるシュタッケルベルク均衡 I」，経済学論究，66，163-172.

藤原　憲二（2014），「微分ゲームにおけるシュタッケルベルク II」，経済学論究，68，595-604.