マッチング形成問題における
選好の申告に関する考察
―リクエスト構造を付加したメカニズムの提案―

川　崎　雄 二 郎

要　旨

マッチング理論において提案されるマッチング生成メカニズムの多くは各主体から完全な形での選好順序が提出されることを前提しているが、ゼミ配属などの状況においては、一部の主体にとって自身の完全な形での選好順序を把握することは極めて難しくなる。そこで本論文では、そのような主体の選好を部分的に引き出すようリクエストの構造をメカニズムに付け加えることを検討するため、受入保留メカニズムとボストンメカニズムがリクエスト構造を付加した場合にどのような性質を持つかについて安定性・耐戦略性の面から分析を行う。

キーワード：マッチング理論（matching theory）、メカニズムデザイン（mechanism design）、安定性（stability）、耐戦略性（strategy-proof）、選好（preferences）

I　はじめに

本論文では、大学でのゼミ配属において１人の教員につき複数の学生を割り当てる問題を主題とした、多対１（many-to-one）のマッチングを形成する問題を考える。このような異なる２つのグループの間で形成されるマッチング（two-sided matching）に対しては、ゲールとシャプレーによる研究（Gale and Shapley（1962））を発端として幅広くかつ緻密な理論構築がなされてきた。特に多対１のマッチングに関する理論においては、学校選択制、研修医

配属などを主な設定としながら、マッチング生成するためのさまざまなメカニズムが提案・分析されてきた（Abdulkadiroğlu and Sönmez（2003）、安田（2003）を参照）が、本論文の狙いはそれらのメカニズムをより実用的にするための改良を提案することにある。

２グループ間でのマッチングの研究においては、受入保留メカニズム（deferred acceptance mechanism）とボストンメカニズム（Boston mechanism）という２つのメカニズムが最も広く知られている。受入保留メカニズムは、ゲールとシャプレー（Gale and Shapley（1962））によって男女間の安定的なマッチングを生成するために考案され、その後多対１マッチングなどの様々なマッチングに応用されたメカニズムである。このメカニズムは、一方のグループ（たとえば男性）に属する各主体が自身の希望する順序に従ってオファー（プロポーズ）をし、他方のグループに属する各主体はオファーの中から最も好ましい相手（たとえば女性）を自身の割当上限（結婚を想定するなら１人）まで確保していくような手続きをとる（女性が男性にオファーをする手続きにすることもできる）。オファーを受ける側である主体は確保する相手を随意入れ替えていくため、新たにオファーが行われなくなるまで各主体のマッチは確定しない。ただし、上記の手続きがあくまで仮想的に実行される点には注意されたい（時間に差があるとはいえ、現実に男性が複数の女性にプロポーズをすることが様々な不具合を生むというのは想像に難くない）。

ボストンメカニズムは、アメリカのマサチューセッツ州ボストン市において学校選択制の下で小中学校の新入生の入学先（生徒と学校の間の多対１マッチング）を決定するために用いられていたメカニズムである。このメカニズムは、各生徒から提出された志望校のリストを基にして、各学校に対し、まずその学校を第１志望とする生徒を割り当て、割当上限に達しなければ次は第２志望とするまだ割り当てが決まっていない生徒を、それでも割当上限に達しなければ第３志望とするまだ割り当てられていない生徒を……という具合に割り当てを行う。もし，その学校を第 k 志望とするまだ割り当てられ

ていない生徒を全員割り当てようとした際にそれまでの総数が割当上限を超えてしまうならば、割当人数が上限ちょうどに収まるようあらかじめ提出されていた学校側の学生に対する優先順位にしたがってその学校を第 k 志望とする学生同士でタイブレークが行われる。学校と学生とのマッチは、割り当てがなされた時点で確定される。

マッチングを生成する手続きは異なるものの、受入保留メカニズムとボストンメカニズムの間には、それぞれの手続きを実行するために各主体からのマッチに対する線形な選好順序の申告が必要であるという共通点がある。さらには、両メカニズムが要求する選好順序は、決して部分的なもの（限られたマッチの結果の間での選好順序）ではなく、あらゆるマッチの結果を鑑みた上での完全な形のものである。両メカニズム以外にも各主体の選好をマッチングに反映させることを意図したメカニズムは数多く存在するが、そのうちのほとんどは完全な形の選好順序が各主体から申告されることを前提にしてマッチング生成の手続きが実行される。

両メカニズムの手続きの違いはそれぞれの性質にも影響を及ぼす。安定性（stability）と呼ばれる、各主体から申告された選好順序の組の下で逸脱を起こす主体あるいはペアが存在しないマッチングを生成する性質に関しては、ボストンメカニズムは安定性を満たさないが、受入保留メカニズムは安定性を満たす。また、耐戦略性（strategy-proofness）と呼ばれる、各主体が選好順序を申告する際に虚偽の申告を行うインセンティブを与えない性質に関しては、ボストンメカニズムにおいては学校側に対してのみ耐戦略的である[1)]のに対し、受入保留メカニズムにおいてはオファーする側のグループに対してのみ耐戦略的となる。

学校選択制においては、「多」側（“many”-side）に位置する学校および病院側は虚偽の申告を行う余地が与えられない。そのため、各マッチング生成メカニズムを学校選択に適用する場合、耐戦略性は学生側に対して満たされ

1） 全生徒を受入可能とする優先順位のみを申告するように制限した場合に限る。

るかどうかについてのみ考えればよい。それゆえ、ボストンメカニズムは安定性・耐戦略性ともに満たさない一方で、受入保留メカニズムは安定性・耐戦略性を満たすこととなる。この結果から、現在においては学校選択制や、研修医配属のプログラムなど、様々な方面で受入保留メカニズムが採り入れられている[2)]。

しかし、本論文で主題とするゼミ配属、すなわちゼミを担当する教員（以下、教員）とゼミへの所属を希望する学生（以下、学生）との間のマッチングを考えると、学校選択や研修医配属とは異なる点がいくつか見受けられる。一つの重要な点は、「多」側に位置する教員たちがメカニズムに対し虚偽の申告をする可能性がある点である。試験の成績など客観的なデータを利用して選好順序を決定することもあるが、一般に各教員はそれらのデータに加え面接を行った際の印象など、様々な情報を独自の主観にしたがって統合し評価するはずである。それゆえ、申告された選好順序が真の選好順序であるかを判断するのは本人以外には不可能である。

さらにもう一つの重要な点は、各教員が自身の完全な形での選好順序を把握することは極めて難しいという点である。教員も学校も、すべての学生に対する自身の選好順序を潜在的に有しているにも関わらず、学生数の多さやそれにともなう情報の不十分さのために、それをはじめから完璧に自覚できているとは限らない。しかし、学校のような組織であれば、費用や労力こそかかるものの、試験や面接、あるいは調査などを大々的に行って必要な情報を収集することは比較的実現可能である。これと同様の作業を教員が行おうとすると、同じだけの費用と労力を基本的に一身に受けなくてはならないため、できることなら、そういった大々的な作業を避けたいと思うのが教員の本心ではないかと考える。

加えて、受入保留メカニズムやボストンメカニズムなどのメカニズムは各

2）　ボストン市は2005年に割り当て方式を従来のボストンメカニズムから受入保留メカニズムへ移行させた。また、日本とアメリカの研修医マッチング制度において受入保留メカニズム（に準ずるメカニズム）が導入されたのはそれぞれ2003年、1952年から。小島・安田（2009）、Roth（2003）を参照。

主体から完全な形での選好順序を提出するよう要求するが、実際にはマッチング生成の手続きの中で各主体の選好順序を初めから終わりまですべて利用するとは限らない。あくまで、すべて利用する「可能性がある」から完全な形での選好順序をあらかじめ提出してもらっているのにすぎないのである。事実、受入保留メカニズムとボストンメカニズムのどちらにおいても、各学校について、その学校を志望していない学生に対する選好が利用されることは一切ない。

そこで本論文は、ゼミ配属で各教員が完全な形での選好順序を申告することが難しいような状況にも適用できるよう、既存のマッチング生成メカニズムに対しリクエスト構造（request structure）と呼ばれる構造を新たに付け加えることを提案し検討することを目的とする。リクエスト構造においては、メカニズムは教員などの一部の主体に対し完全な形での選好順序を申告させるのではなく、必要がある都度にマッチ候補の中からの選択を問い合わせる（リクエストする）方式をとる。これにより、完全な形での選好順序の申告を免除された主体は自身の選好を明らかにするために要する費用や労力を最低限度に抑えることができるようになる。

本論文においては、リクエスト構造を具体的なメカニズムに付加した場合を想定し、教員側に対しリクエスト構造が付け加えられた受入保留メカニズムとボストンメカニズムが、それぞれ安定性と耐戦略性に関してどのような性質を持つのかについて分析を行う。両メカニズムにリクエスト構造が付加されると、各教員の申告における戦略の形態が様変わりをする。リクエスト構造が付加される前では各教員は完全な形での線形な選好順序を申告するよう求められたので、各教員の戦略も同じく線形な選好順序によって特徴づけることができた。しかし、リクエスト構造が付加された場合には、各教員はリクエストにおいて与えられる学生の集合（と選ぶべき人数）にしたがってどのような選択をするかを戦略で定める必要があり、そこでの選択は、必ずしも１つの線形な選好順序に従った選択になるとは限らない。つまりは、線形な選好順序の申告ではありえることのなかった、循環的な選択（たとえば

Ａ、Ｂ、Ｃという３人の学生に対し、ＡとＢから１人選ぶならＡ、ＢとＣからならＢ、そしてＣとＡからならＣとするような選択）が戦略として用いられる可能性があるのである。

　こういった戦略の形態の変化により、リクエスト構造を付加された両メカニズムは、リクエスト構造を付加しない場合とは一部異なる性質を持つことが本論文において証明される。まず安定性に関しては、リクエスト構造付き受入保留メカニズムは安定的であり、リクエスト付きボストンメカニズムは安定的ではないことが証明され、リクエスト構造を付加しない場合と同様の結果になることが確認される。しかしながら、耐戦略性に関しては、リクエスト構造付きボストンメカニズムが依然として教員側のみに対する耐戦略性を維持できる一方で、リクエスト付き受入保留メカニズムは教員側の耐戦略性どころか、学生側の耐戦略性まで満たさなくなってしまうことが示される。

　両メカニズムの性質を比較すると、リクエスト構造を付加した場合には、受入保留メカニズムがリクエスト構造付きボストンメカニズムに対して優位性を持たないことが分かる。したがって、ゼミ配属などのような一部の主体にとって完全な形での選好順序を申告することが極めて難しい状況においては、リクエスト構造との組み合わせによってボストンメカニズムの利用価値が新たに見出される結果となった。

　本論文以外にも、特定のマッチング形成のモデルにおいて一部の主体が初期状態で自身の選好を把握していないケースを想定した文献は存在する。

　Liu *et al.*（2014）は、シャプレー＝シュービック型の労働市場（賃金支払いのあるマッチング）モデルにおいて、各企業が自社で働いていない労働者の生産性に対して不確実性が存在する場合の安定性の概念を導入した。

　Bikhchandani（2014）は Liu らの導入した不確実性下での安定性の概念を NTU を前提としたモデルに応用し、匿名性（anonymous）のある選好とない選好それぞれの下での安定マッチングや耐戦略的メカニズムの存在性などについて分析を行った。

　しかし、これらの文献においては、各主体の選好はマッチの相手が割り当

てられた後に（事後的に）明らかになると仮定されているため、本研究のように必要な情報を手に入れることで事前に各自で自身の選好を把握できる状況とは本質的に異なる。

その他の関連する研究としては、他の主体の選好順序についての情報が不完備である状況に着目し、様々なマッチング生成メカニズムに対する各主体の申告というベイジアンゲーム（Bayesian game）における均衡と、それによって生成されるマッチングについての研究が挙げられる。これに関しては数多くの論文が存在する（Roth（1989）, Majumdar（2003）, Ehlers and Masso（2007, 2015））。

II　設定

1．モデル

まず初めに教員と学生との間でのマッチング生成問題についてのモデル設定を行う。ここでの説明は問題の設定とマッチングの定義のみにとどめ、マッチングおよびメカニズムに求めるべき安定性・耐戦略性については、メカニズムとそこでの戦略を定義した後（第３章）で示すことにする。

学生（students）と教員（teachers）の集合を S, T とする。各学生 $s \in S$ は高々１名の教員とマッチすることができ、各教員 $t \in T$ は個別に定められた割り当て上限（quota）q_t を超えない限りは複数の学生とマッチすることができるものとする。

各学生 $s \in S$ は、$T \cup \{s\}$ 上[3]に線形な選好順序（linear preference ordering）P_s を持ち[4]、各自は自身の選好順序を事前に完全に把握しているものとする。一方で、各教員 $t \in T$ はいかなる学生ともマッチすることを望んでおり、S

3）　ここでの「s」は、学生 $s \in S$ が「マッチ相手を持たない状態」を指す。

4）　本論文を通して、任意の主体 $i \in S \cup T$ が「y より x を好む」ことを「$x\ P_i\ y$」と表すことにする。集合 X 上の２項関係 P が線形な選好順序であるとは、その順序が完備性（completeness：任意の $x, y \in X$ に対し $x\ P_i\ y$, $y\ P_i\ x$ あるいは $x = y$ のいずれかが成り立つ）、推移性（transitivity：任意の $x, y, z \in X$ に対し $x\ P_i\ y$ かつ $y\ P_i\ z$ ならば $x\ P_i\ z$）、非対称性（asymmetry：任意の $x, y \in X$ に対し $x\ P_i\ y$ ならば $y\ P_i\ x$ は成り立たない）を満たすことをいう。

上に線形な選好順序 P_t を潜在的に持つが、学生の数があまりに多いために、自身の選好順序を事前には把握できていない。必要な情報を収集すれば各教員は学生に対する自身の選好を知ることができるが、それには費用が生じるため、必要最低限を超えた情報の収集は行わないものと想定する。全学生の選好順序の組を $P_S := (P_s)_{s \in S}$、全教員の選好順序の組を $P_T := (P_t)_{t \in T}$、全主体の選好順序の組を $P := (P_S, P_T)$ と表す。

学生と教員の間のマッチング（matching）は、（ⅰ）任意の $s \in S$ に対し $\mu(s) \in T \cup \{s\}$、かつ（ⅱ）$\mu(s) = t$ のときかつそのときのみ $s \in \mu(t)$ をみたす関数 $\mu : S \cup T \rightarrow S \cup T$ によって表現される。したがって、学生 s とマッチする教員は $\mu(s)$、教員 t とマッチする学生の集合は $\mu(t)$ と表される。任意の $t \in T$ について $|\mu(t)| \leq q_t$ が成り立つようなマッチング μ は、**実行可能**（feasible）であるという。実行可能なマッチング全体の集合を $\mathcal{M}$ とする。

２．リクエスト構造付き受入保留メカニズム

Gale and Shapley（1962）によって提案された受入保留メカニズム（deferred acceptance mechanism）は、各個人が申告した自身の選好順序を用いてマッチングを生成するメカニズムである。後述するように、このメカニズムによって生成されるマッチングは申告された選好順序の下で安定マッチングであり、さらには片側にとって最も好ましい安定マッチングを生成することから、片側のグループに属する各個人にとって自身の選好順序を正直に申告することが支配戦略となる（Roth（1985））。以下は、学生オファー型（student-offering）の受入保留メカニズムを示す。なお、初めの「選好順序を申告する」を除くメカニズムに記される各主体の行動（「オファーする」、「確保する」など）は、あくまでメカニズムの動作を説明するための仮想的な表現である。前提として教員の割当上限の組 $(q_t)_{t \in T}$ はすでに与えられているとする。

（学生オファー型）受入保留メカニズム

ステップ０：各教員および各学生は自身の選好順序を申告する。

ステップ１：

ａ．各学生sは、自身の選好順序において最も順位の高い教員にオファーする。

ｂ．各教員tは自身にオファーした学生の中から、自身の選好順序で最も順位が高い学生をq_t名まで一時的に確保し、それ以外を断る（オファーした学生がq_t名未満なら、その学生全員を一時的に確保する）。

ステップk：

ａ．ステップ$k-1$で断られた学生は、まだ断られていない教員の中から選好順序において最も順位の高い教員にオファーする。（マッチを希望する教員がなくなった学生はオファーをしない。）

ｂ．各教員tは、自身にオファーした学生とステップ$k-1$の時点で確保した学生の中から、自身の選好順序で最も順位が高い学生を割当上限q_tまで一時的に確保し、それ以外を断る。

メカニズムの停止：

新しいオファーがされなくなった時点でメカニズムを停止し、その時点で各教員が確保している学生をその教員とマッチさせることでマッチングを生成する。

先に述べた通り、本論文で想定するモデルにおいては、各教員は自身の選好順序を事前に把握していない。そのため、もしこのようなモデルにおいて受入保留メカニズムを適用するのならば、各教員は自身の選好に対する主観的確率分布に基に１つの選好順序を申告することになる[5)]。しかし、この場合、各教員の学生に対する情報が不足しているほど、申告する選好順序と潜

5）　これの関連研究として、Bikhchandani（2014）がある。

在的な選好順序が大きくかけ離れるリスクが生じてしまう。

加えて、受け入れ保留メカニズムは各教員が特定の学生の集合からどの学生を選ぶかという選択を「再現」するために選好順序を用いているのであって、必ずしもすべての学生同士の順序関係が利用されるとは限らない。この意味では、メカニズムが利用されない順序関係を表明させることは過度な要求であるとみなすこともできる。

以上のような理由から、各教員の選好を表明させる一つの方法として、ここではメカニズム（現実にはメカニズムを実行する主体）が各教員に対し特定の学生の集合からの選択を問い合わせるリクエスト（request）の構造をメカニズムに組み入れることにする。このように、一般に複数人とマッチする側である各教員に対し、線形な選好順序の申告を要求するのではなく、必要がある都度に１つの学生の集合（S の部分集合）を提示し、その中からの選択を問い合わせる（リクエストする）構造をもつマッチング生成メカニズムを**リクエスト構造付きメカニズム**（mechanism with request structure）と呼ぶことにする。

上記のような考えにしたがい、受入保留メカニズムにリクエスト構造を付加すると以下のようになる。このメカニズムを（学生オファー型）**リクエスト構造付き受入保留メカニズム**（deferred acceptance mechanism with request structure）と呼ぶ。なお、各学生の「オファーする」、各教員の「確保する」という動作はメカニズムの動作を説明するための仮想的な表現であるが、各学生の「選好順序を申告する」および各教員の「選択する」という動作は実際に各主体が行うものである。

（学生オファー型）リクエスト構造付き受入保留メカニズム

ステップ０：各学生はマッチを希望する教員の選好順序を申告する。

ステップ１：

a．各学生 s は、自身の選好順序において最も順位の高い教員にオファーする。

b．各教員 t は、自身にオファーをした学生の数が q_t 未満ならば、その学生全員を一時的に確保する。一方、オファーした学生の数が q_t 以上ならば、メカニズムが教員 t に対しオファーのあった学生を開示した上で、その中からちょうど q_t 人だけ選択するようリクエストする。各教員はここで選択した学生を確保し、それ以外を断る。

ステップ k：

a．ステップ $k-1$ で断られた学生は、まだ断られていない教員の中から選好順序において最も順位の高い教員にオファーする。マッチを希望する（つまり、「マッチなし」よりも好ましい）教員がなくなった学生はオファーをしない。

b．各教員 t は、自身にオファーをした学生とステップ $k-1$ の時点で確保した学生の数が q_t 未満ならば、その学生全員を一時的に確保する。一方、オファーした学生とステップ $k-1$ の時点で確保した学生の数が q_t 以上なら、メカニズムが教員 t に対しオファーのあった学生を開示した上で、その中からちょうど q_t 人だけ選択するようリクエストする。各教員はここで選択した学生を確保し、それ以外を断る。

メカニズムの停止：

新しいオファーがされなくなった時点でメカニズムを停止し、その時点で各教員が確保している学生をその教員とマッチさせることでマッチングを生成する。

メカニズム内にある下線は、各教員に対して行われるリクエストとその内容を示す。本来、オファーした学生と確保中の学生の合計数がちょうど割当上限と等しくなるときにリクエストをする必要はないかもしれない。しかしこのようにすることで、最終的に生成されるマッチングにおいて割当上限未満の学生とマッチする各教員へのリクエスト数は0回、割当上限以上の学生

とマッチする各教員へのリクエスト数は１回以上であると明確に区別することができるため、分析がより容易となる。また実用の面から見ても、割当上限と等しくなった時点でリクエストを行うことは意味のある動作である。特に、上限に到達したことを機会に学生の情報が事前に開示されれば、各教員は上限を超えた際に要求される選択に備えてより長い時間をかけて準備をすることが可能となる。

２．リクエスト構造付きボストンメカニズム

アメリカのマサチューセッツ州ボストン市における学校選択制の下で、同市内での公立小中学校の新入生徒をどの学校に割り当てるかを決定するために1999年から2005年まで採用されていたメカニズムをボストンメカニズム（Boston mechanism）という。ボストンメカニズムは受入保留メカニズムと同様、各主体から申告された選好順序を元に一つのマッチングを生成する。ボストンメカニズムにおいては、生成されるマッチングが申告された選好順序の下で安定的となるとは限らないこと、そして生徒側に対し虚偽の申告をするインセンティブが生じることが Abdulkadiroğlu and Sönmez（2003）によって示されたが、後に Ergin and Sönmez（2006）によって、各学校が仮に虚偽の申告をすることができるときには学校側に対する耐戦略性を満たすことが示された。

ボストンメカニズムは以下のように行われる。前提として、教員の割当上限の組（$(q_t)_{t\in T}$）はすでに与えられているとする。

ボストンメカニズム

ステップ０：各教員および各学生は自身の選好順序を申告する。

ステップ１：

ａ．各学生 s は、自身の選好順序において第１希望の教員にオファーする。

b．各教員 t に対し、その教員にオファーした学生の中から、その教員の選好順序で最も順位が高い学生を割り当てる。マッチ数が q_t に達するか、オファーする学生がいなくなったら割り当てを停止する。

ステップ k：

a．まだどの教員ともマッチしていない各学生 s は、自身の選好順序において第 k 希望の教員にオファーする。（マッチを希望する教員がなくなった学生 s はオファーをしない。）

b．ステップ $k-1$ までにマッチの総数がまだ q_t に達していない各教員 t に対し、その教員にオファーした学生の中から、その教員の選好順序で最も順位が高い学生を割り当てる。ステップ１からのマッチ数の合計が q_t に達するか、オファーする学生がいなくなったら割り当てを停止する。

メカニズムの停止：

新しいオファーがされなくなった時点でメカニズムを停止し、その時点で各教員に割り当てられている学生をその教員とマッチさせることでマッチングを生成する。

ボストンメカニズムでは各個人から選好順序の申告を受け、それを基にマッチングを生成する。ゆえに、受入保留メカニズムと同様、本論文のモデル設定においては教員側の選好順序の申告に関する問題が存在する。そこで、先の節で示したリクエストの構造をボストンメカニズムにも以下のように組み入れ、これをリクエスト構造付きボストンメカニズム（Boston mechanism with request structure）と呼ぶことにする。

リクエスト構造付きボストンメカニズム

ステップ０：各教員および各学生は自身の選好順序を申告する。

ステップ１：

ａ．各学生 s は、自身の選好順序において第１希望の教員にオファーする。

ｂ．各教員 t について、その教員にオファーをした学生の数が q_t 未満ならば、その学生全員をその教員に割り当てる。一方、オファーした学生の数が q_t 以上ならば、メカニズムが教員 t に対しオファーのあった学生を開示した上で、その中からちょうど q_t だけ選択するようリクエストする。ここで選択した学生をその教員に割り当てる。

ステップ k：

ａ．まだどの教員ともマッチしていない各学生 s は、自身の選好順序において第 k 希望の教員にオファーする。マッチを希望する（つまり、「マッチなし」よりも好ましい）教員がなくなった学生はオファーをしない。

ｂ．ステップ $k-1$ までにマッチの総数がまだ q_t に達していない各教員 t について、その教員に割り当てられた学生の数とその教員にオファーした学生の数の合計が q_t 未満ならば、その学生全員をその教員に割り当てる。一方、その教員に割り当てられた学生の数とその教員にオファーした学生の数の合計が q_t 以上ならば、メカニズムが教員 t に対しステップ k でオファーのあった学生を開示した上で、その中からちょうど割当上限数 q_t からすでに割り当てられている学生の数を差し引いた分だけ選択するようリクエストする。ここで選択した学生をその教員に割り当てる。

メカニズムの停止：

新しいオファーがされなくなった時点でメカニズムを停止し、その時点で各教員に割り当てられている学生をその教員とマッチさせることでマッチングを生成する。

リクエスト付き受入保留メカニズムと同じく、メカニズム内にある下線は各教員に対して行われるリクエストとその内容を示す。

各教員に対し行われるリクエストの回数は高々１回のみとなる。あるステップにおいて、オファーの数とそれまでに確定されたマッチの数の合計が割当上限に達した場合に限り、メカニズムは教員に対しリクエストを行う。それ以降はマッチ数が割当上限までに達してしまうので、メカニズムがその教員に対しリクエストを実行することはない。

３．両メカニズムに対する各主体の戦略

リクエスト構造付きメカニズムに対しては、各学生は自身の選好順序を申告する一方で、各教員はリクエストで提示される学生の集合と選択する人数に対する自身の選択を申告する。この申告に際して、各主体は正直に自身の真の選好順序に従って申告を行うとは限らない。他の主体は真の選好順序を知ることができないので、自身のマッチの結果をより好ましいものにできるのならば、各主体は戦略的に虚偽の申告を行う可能性があることに注意しなければならない。

ゆえに、各主体は**戦略**（strategy）を立てメカニズムに対する申告を行うものと考える。これにより、申告の際には主体同士で行動を確認することができないとすると、教員と学生がリクエスト構造付きメカニズムに対し申告を行いマッチングが生成されるまでの一連の過程は、そのメカニズムを前提とした教員・学生全体の同時意思決定のゲームであるととらえることができる[6)]。

各主体の戦略は以下のように定義する。

学生側の戦略は、既存のマッチング生成メカニズムと同様の表記法にならない

6) ゲームの構造を厳密に記述しようとするならば、各プレイヤーが自分以外の主体の選好順序についての情報をどの程度知っているかについても明らかにするべきであろう。しかし、本論文では、各主体にとって真の選好を正直に申告することが支配戦略であるか否かのみに注目するため、そのような情報に関しての決まりを明確に示さなくても問題はない。この事実は Roth (1984) によって詳述されている。

い、各学生 $s \in S$ の戦略は線形な選好順序 P_s によって表現することにする。学生全体の戦略プロファイルは $P_S := (P_s)_{s \in S}$ と表し、学生 s を除く学生全体の戦略プロファイルは P_{-s} と表す。

一方、各教員の戦略においては、リクエストの際にメカニズムより与えられる任意の学生の集合と選択する人数を受けての選択を記述する必要がある。それゆえ、各教員 t の戦略は、以下の 2 つの条件を満たす関数 $\sigma_t : 2^S \times \{1, \dots, q_t\} \to 2^S$ によって表現することにする：すべての $S' \subseteq S$、すべての $n \in \{1, \dots, q_t\}$ に対し、

（ⅰ）　$\sigma_t(S' ; n) \subseteq S'$.

（ⅱ）　$|\sigma_t(S' ; n)| = \begin{cases} |S'|\ (\text{つまり } \sigma_t(S') = S') & |S'| < n \text{ のとき} \\ q_t & |S'| \geq n \text{ のとき} \end{cases}.$

学生側と同様、教員全体の戦略プロファイルは $\sigma_T := (\sigma_t)_{t \in T}$ と表し、教員 t を除く教員全体の戦略プロファイルは σ_{-t} と表す。

リクエスト構造付き受入保留メカニズムにおいては、各教員 t はリクエストの際に必ず割当上限 q_t だけの人数を選ぶよう指示されるため、q_t 未満の人数を選ぶ場合についての情報は不要である。しかしながら、メカニズムごとに戦略を定義するのは煩雑さを一方で生んでしまうため、一般的なリクエスト構造付きメカニズムの戦略表現として上記のような定義を統一的に用いることにする。

戦略の特徴として特に注意すべきなのは、必ずしも各教員の戦略 σ_t が線形の選好順序に基づいた選択である必要はないという点である。より具体的には、任意の戦略において、線形の選好順序が満たすべき性質である反対称性や推移性に矛盾するような選択行動が行われることも認められている。

しかし一方で、リクエストに対する教員の選択が（その教員が潜在的にもつ真の選好順序を含む）なんらかの線形な選好順序にしたがって行われることも考えられる。このような（教員 t の）選好順序 P_t に基づいた選択を $Ch_t^{P_t} : 2^S \times \{1, \dots, q_t\} \to 2^S$ で表す。具体的には、以下に示す通り S' の中で

最も好ましい学生を P_t に従いちょうど n 人だけ選抜した集合と定義される：

$$Ch_t^{P_t}(S';n)=\begin{cases} S' & |S'|\leq n \text{ のとき} \\ \{s\in S' \mid rank_t^{P_t}(s\mid S')\leq n\} & |S'|\leq n \text{ のとき} \end{cases}.$$

ここで、$rank_t^{P_t}(s\mid S')$ は教員 t の選好順序 P_t に基づいた集合 S' の中での学生 $s\in S'$ の順位を表す。特に、P_t が教員 t が潜在的にもつ真の選好順序ならば、それに基づいた選択 $Ch_t^{P_t}$ は教員 t が自身の選好を正直に表明した結果であるととらえることができる。

全教員の任意の選好順序の組 $P=(P_t)_{t\in T}$ に対し、各教員 t が P_t に基づいた選択を戦略として選ぶような戦略の組を $Ch_T^P:=(Ch_t^{P_t})_{t\in T}$ とする。

任意の戦略がある線形の選好順序に基づいた選択であるための必要十分条件は以下のとおりである。

補題 1　教員 t の戦略 σ_t を任意にとる。戦略 σ_t に対し以下の条件（∗）が成り立つとき、かつそのときに限り、σ_t はある線形の選好順序 P_t に基づいた選択である（つまり、$\sigma_t=Ch_t^{P_t}$）。

（∗）任意の 2 人以上の学生の組 $s_1, \ldots, s_k$ が $S_1, \ldots, S_k\subseteq S$ および $n_1, \ldots, n_k\in\{1, \ldots, q_t\}$ において $s_i\in\sigma_t(S_i;n_i)$（$i=1, \ldots, k$）, $s_{i+1}\in S_i$（$i=1, \ldots, k-1$）, $s_{i+1}\notin\sigma_t(S_i;n_i)$（$i=1, \ldots, k-1$）を満たし、なおかつ $s_1\in S_k$ を満たすならば、$s_1\in\sigma_t(S_k;n_k)$ が成り立つ。

条件（∗）は各教員が任意の学生の間で循環的な選択をすることを排除するものであり、顕示選好理論における顕示選好の強公理の考えを本論文でのモデルに適用したものである。

証明

線形な選好順序は非対称性と推移性を満たすことから、任意の線形な選好順序 P_t に対して、それに基づいた選択 $Ch_t^{P_t}$ が（∗）を満たすことは明らか。

続いて、（∗）を満たす σ_t が特定の線形な選好順序に基づいた選好であることを示すため、以下の方法で生成される 2 項関係 P_t を考える：

・ある $S' \ni s, s'$ およびある $n \in \{1, \ldots, q_t\}$ に対し $s \in \sigma_t(S'; n)$, $s' \notin \sigma_t(S'; n)$ が成り立つような 2 人の学生 s, s' に対して、sP_ts' とする。

この P_t が線形な選好順序であり、なおかつ $\sigma_t = Ch_t^{P_t}$ であることを示せば十分である。

まず、完備性を示す。任意の $s, s' \in S$ に対して、$s \in \sigma_t(\{s, s'\}; 1)$, $s' \notin \sigma_t(\{s, s'\}; 1)$ または $s \notin \sigma_t(\{s, s'\}; 1)$, $s' \in \sigma_t(\{s, s'\}; 1)$ が必ず成り立つので、sP_ts' または $s'P_ts$ が成り立つ。したがって P_t は完備性を満たす。

次に、非対称性を示す。任意の $s, s' \in S$ に対し、sP_ts' および $s'P_ts$ がともに成り立っているとしよう。選好順序 P_t の定義により、ある $S', S'' \ni s, s'$ および $n', n'' \in \mathbb{N}$ に対して $s \in \sigma_t(S'; n')$, $s' \notin \sigma_t(S'; n')$、かつ、$s \notin \sigma_t(S''; n'')$, $s' \in \sigma_t(S''; n'')$ が成り立つが、これは条件（∗）（$k=2$ のとき）に矛盾する。したがって、P_t は非対称性を満たす。

続いて、推移性を示す。任意の $s, s', s'' \in S$ に対し、$s\ P_t\ s'$, $s'\ P_t\ s''$ および $s''\ P_t\ s$ が成り立っているとすると、ある $S', S'', S''' \subseteq S$ および $n', n'', n''' \in \{1, \ldots, q_t\}$ に対して (1) $s \in \sigma_t(S'; n')$, $s' \in S'$, $s' \notin \sigma_t(S'; n')$、(2) $s' \in \sigma_t(S''; n'')$, $s'' \in S''$, $s'' \notin \sigma_t(S''; n'')$、なおかつ (3) $s'' \in \sigma_t(S'''; n''')$, $s \in S'''$, $s \notin \sigma_t(S'''; n''')$ が成り立つが、これは条件（∗）（$k=3$ のとき）に矛盾する。したがって、P_t は推移性を満たす。

ある学生の集合 $S' \subseteq S$ および自然数 $n \in \{1, \ldots, q_t\}$ について、$\sigma_t(S'; n) \neq Ch_t^{P_t}(S'; n)$ であるとする。もし $|S'| \leq n$ ならば $\sigma_t(S'; n) = Ch_t^{P_t}(S'; n)$ なので、$|S'| > n$ が成り立つ。このとき、$|\sigma_t(S'; n)| = |Ch_t^{P_t}(S'; n)| = n$ なので、$\sigma_t(S'; n) \setminus Ch_t^{P_t}(S'; n)$ も $Ch_t^{P_t}(S'; n) \setminus$

$\sigma_t(S';n)$ も空ではない。そこで、$s \in \sigma_t(S';n) \setminus Ch_t^{P_t}(S';n)$ および $s' \in Ch_t^{P_t}(S';n) \setminus \sigma_t(S';n)$ を任意にとると、$s \in \sigma_t(S';n)$ かつ $s' \notin \sigma_t(S';n)$ により sP_ts' が成り立つ。この事実と $Ch_t^{P_t}$ の定義により、$s \notin Ch_t^{P_t}(S';n)$ かつ $s' \in Ch_t^{P_t}(S';n)$ であることに矛盾が生じる。したがって、$\sigma_t = Ch_t^{P_t}$。（証明終）

戦略 σ_t が条件（∗）を満たすとき、$\sigma_t = Ch_t^{P_t}$ となるような線形な選好順序 P_t を一意に求められるとは限らない。これは、特定の選好順序において第 q_t 希望以上の高い順位を持つ学生同士が、彼らを含むいかなる学生の集合においても必ず選択され、彼らの間での順序が顕示的には判定できないことに起因する。たとえば、$q_t=2$ のときを考えてみると、s が第 1 希望で s' が第 2 希望のときと、s' が第 1 希望で s が第 2 希望のときとでは、彼らを含む任意の学生の集合 S' における選択の結果はどちらも常に $\{s, s'\}$ となる。それゆえ、s と s' はそれぞれ教員 t にとっての第 1 希望か第 2 希望かのどちらかであるが、実際に両者のうちどちらが第 1 希望でどちらが第 2 希望であるのかについては σ_t から判断することはできない。ただし、第（q_t+1）希望以降については証明中に記された方法によって一意に求めることが可能である。

Ⅲ　分析

この章では、前章で提案した 2 つのメカニズム、リクエスト付き受入保留メカニズム、リクエスト付きボストンメカニズムを安定性、耐戦略性、リクエスト回数の面から分析を行う。

これ以降、任意の戦略プロファイル（P_S, σ_T）に対して、リクエスト構造付き受入保留メカニズムおよびリクエスト構造付きボストンメカニズムが生成するマッチングをそれぞれ $\mu^{DA}(P, \sigma)$, $\mu^{B}(P, \sigma)$、各教員 t へのリクエストにおいて提示される学生の集合と選択する人数の組の集合をそれぞれ

$\mathcal{S}_t^{DA}(P_S, \sigma_T)$, $\mathcal{S}_t^{B}(P_S, \sigma_T) \subseteq 2^S \times \mathbb{N}$ と表すことにする。また、$\mathcal{S}^{DA}(P_S, \sigma_T) := (\mathcal{S}_t^{DA}(P_S, \sigma_T))_{t \in T}$, $\mathcal{S}^{B}(P_S, \sigma_T) := (\mathcal{S}_t^{B}(P_S, \sigma_T))_{t \in T}$ とする。

分析に先立って、まず以下の命題を導入する。

命題 2　任意のリクエスト構造付きメカニズムを考え、任意の戦略プロファイル（P_S, σ_T）の下でそのメカニズムが各教員 t へのリクエストで提示する学生の集合と選択する人数の組の集合を $\mathcal{S}_t(P_S, \sigma_T)$、生成するマッチングを $\mu(P_S, \sigma_T)$ と表すこととする。教員 t 以外の教員全体の戦略プロファイル σ_{-t} および全学生の戦略プロファイル P_S を固定する。このメカニズムが以下の条件（＊＊）を満たすとき、かつそのときに限り、任意の戦略プロファイル（P_S, σ_T）および教員 t の任意の戦略 σ_t に対し、すべての（$S'; n$）$\in \mathcal{S}_t(P_S, \sigma_T)$ について

$$\sigma_t(S'; n) = Ch_t^{P_t}(S'; n) \tag{1}$$

が成り立つような線形な選好順序 P_t が存在する。

（＊＊）戦略プロファイル（P_S, σ_T）、教員 t を任意にとったとき、任意の 2 人以上の学生の組 $s_1, \ldots, s_k$（$k \geq 2$）が（S_1, n_1）, …,（S_k, n_k）$\in \mathcal{S}_t(P_S, \sigma_T)$ において $s_i \in \sigma_t(S_i; n_i)$（$i=1, \ldots, k$）, $s_{i+1} \in S_i$（$i=1, \ldots, k-1$）, $s_{i+1} \notin \sigma_t(S_i; n_i)$（$i=1, \ldots, k-1$）を満たし、なおかつ $s_1 \in S_k$ を満たすならば、$s_1 \in \sigma_t(S_k)$ が成り立つ。

条件（＊＊）は、各教員に特定の学生の間で循環的な選択をとらせないようなリクエストを実行することをメカニズムに対して要求するものである。

証明

条件（＊＊）により、$\mathcal{S}_t(P_S, \sigma_T)$ 内の学生の集合に対する各教員の選択のみに注目すれば、補題 1 の条件（＊）に違反することはない。つまり、学生全体の集合を教員 t に対するリクエストで一度以上提示された

学生の集合（$S_t^+ := \cup \mathcal{S}_t(P_S, \sigma_T)$ とする）に仮に制限したときに、すべての学生の集合（$S'; n) \in \mathcal{S}_t(P_S, \sigma_T)$ において $\sigma_t(S'; n) = Ch_t^{\hat{P}_t}(S'; n)$ が成り立つような S_t^+ 上の線形な選好順序 $\hat{P}_t$ が存在する。

上述の $\hat{P}_t$ に加え、教員 t へのリクエストで一度も提示されることのなかった学生全体の集合（$S^0 := S \backslash S^+$ とする）については線形な選好順序を任意に定める。これら 2 つの選好順序を、たとえば S^+ に属する任意の学生は S^0 に属するいかなる学生よりも好ましいと定めるなどして結合すれば、S 上に線形な選好順序 P_t が生成される。定義により明らかに、すべての学生の集合（$S'; n) \in S_t(P_S, \sigma_T)$ において $\sigma_t(S'; n) = Ch_t^{P_t}(S'; n)$ が成り立つ。（証明終）

この命題によれば、リクエスト構造付きメカニズムが条件（＊＊）を満たす限り、そのメカニズム上でプレイされる各教員の戦略はすべて、ある線形な選好順序に基づいた選択と同一視することができることになる。言い換えると、両メカニズムに対する任意の戦略プロファイル（P_S, σ_T）は、各教員 t に対し S 上の線形な選好順序 P_t をうまく選べば、選好順序の組 $P = (P_S, P_T)$ を申告しているものとみなすことができるのである。また、リクエストにおける選択が完全に再現されていることから、メカニズムによって生成されるマッチングにも影響を与えない。実際、すべての（$S'; n) \in \mathcal{S}_t(P_S, \sigma_T)$ において式(1)が成り立つような選好順序 P_t に対して

$$\mu(P_S, \sigma_t, \sigma_{-t}) = \mu(P_S, Ch_t^{P_t}, \sigma_{-t})$$

が常に成り立つ。さらには、各教員 t についても、すべての（$S'; n) \in \mathcal{S}_t(P_S, \sigma_T)$ において式(1)が成り立つような選好順序の組 $P_T = (P_t)_{t \in T}$ に対して

$$\mu(P_S, \sigma_T) = \mu(P_S, Ch_T^{P_T})$$

が常に成り立つ。

他方で、条件（＊＊）は強い条件だと読者は思うかもしれない。しかしながら、本論文で提案するリクエスト構造付き受入保留メカニズムおよびボストンメカニズムは、どちらもこれを満たす。この事実を踏まえると以下のような系が直ちに得られる。

系 3　戦略プロファイル（P_S, σ_T）を任意にとる。このとき、各教員 t について、すべての $(S'; n) \in \mathcal{S}_t^{DA}(P_S, \sigma_T)$ に対し

$$\sigma_t(S'; n) = Ch_t^{P_t}(S'; n)$$

が成り立つような線形な選好順序 P_t が存在する。同じく、各教員 t について、すべての $(S'; n) \in \mathcal{S}_t^{B}(P_S, \sigma_T)$ に対し

$$\sigma_t(S'; n) = Ch_t^{P_t'}(S'; n)$$

が成り立つような選好順序 P_t' が存在する。

証明

リクエスト構造付き受入保留メカニズムおよびボストンメカニズムが、条件（＊＊）を満たすことを示せば十分である。

リクエスト構造付き受入保留メカニズムにおいては、(a) 各教員 t へのリクエストにおいて、選択する人数は常に q_t 人であり、(b) あるステップでのリクエストで教員 t によって一度（提示された学生の集合に含まれながら）選択から外された学生は、それ以降のステップにおいて教員 t に提示される学生の集合に含まれることはない。

ここで、任意の戦略プロファイル（P_S, σ_T）の下で、$s_{i+1} \in S_i$（$i=1, \ldots, k-1$），$s_i \in \sigma_t(S_i; q_t)$（$i=1, \ldots, k$）かつ $s_{i+1} \notin \sigma_t(S_i; q_t)$（$i=1, \ldots, k-1$）が成り立つような学生の組 $s_1, \ldots, s_k$（$k \geq 2$）および $(S_1; q_t), \ldots, (S_k; q_t) \in \mathcal{S}_t^{DA}(P_S, \sigma_T)$ が存在するとしよう。先述の (b) により、教員 t へのリクエストにおいて、$(S_k; q_t), (S_{k-1}; q_t), \ldots$ の順で提示されているはずである。もし $s_1 \in S_k$ ならば、$s_1 \notin \sigma_t(S_k; q_t)$ とすると $s_1 \in S_1$ であることに矛盾するので、$s_1 \in \sigma_t(S_k; q_t)$. ゆえに、条件（＊＊）が成り立つ。

リクエスト構造付きボストンメカニズムにおいては、メカニズムにより各教員に実行されるリクエストの回数は高々１回である。ゆえに、任意の戦略プロファイル（P_S, σ_T）の下で、$s_{i+1} \in S_i$（$i=1, \ldots, k-1$), $s_i \in \sigma_t(S_i\,; n_i)$（$i=1, \ldots, k$）かつ $s_{i+1} \notin \sigma_t(S_i\,; n_i)$（$i=1, \ldots, k-1$）が成り立つような $s_1, \ldots, s_k$ $(k \geq 2)$, $(S_1\,; n_1), \ldots, (S_k\,; n_k) \in \mathcal{S}_t^B(P_S, \sigma_T)$ が存在しない。ゆえに、条件（＊＊）が成り立つ。(証明終)

この系は分析において重要な役割を担う。まずは、この系が成り立つことによって、分析に際してあらゆる形の戦略 σ_t を考慮する必要はなく、すべて線形な選好順序に基づいた選択のみに注目すればよい。そればかりでなく、戦略プロファイル（P_S, σ_T）がプレイされるリクエスト構造付きの受入保留メカニズムおよびボストンメカニズムを、特定の選好順序の組（P_S, P_T）が申告されるスタンダードな受入保留メカニズムおよびボストンメカニズムと同一視することができるため、それぞれで共通する性質を導き出すことが容易となる。

１．安定性、耐戦略性

初めにマッチングおよびメカニズムの安定性の概念を定義する。安定性とは特定の選好順序の組の下で逸脱が起こる可能性が存在しないことを意味するものであるが、安定性を厳密に定義するためには個人合理性とブロッキングペアをあらかじめ定義しておく必要がある。全主体（学生と教員）の選好順序 $P=(P_S, P_T)$ を所与としよう。このとき、$\mu \in \mathcal{M}$ が**個人合理的**であるとは、すべての学生 $s \in S$ に対し $\mu(s) P_s s$ または $\mu(s)=s$ が成り立つことを意味する[7]。また、$\mu \in \mathcal{M}$ におけるブロッキングペア $(s, t) \in S \times T$ は、μ を逸脱し互いにマッチすることを望むペアを指す。すなわち、ブロッキングペ

7）　個人合理性は、本来各主体がマッチする相手がいない状態よりも悪い結果にならないことを意味する。しかし、各教員はいかなる学生であってもマッチすることを望んでいるので、すべてのマッチングは教員側に対して個人合理的である。

ア（s, t）は具体的には $tP_s\mu(s)$ かつ $s \in Ch_t^{P_t}(\mu^{-1}(t) \cup \{s\}; q_t)$ を満たす学生と教員のペアであると定義する。個人合理的であり、かつ、ブロッキングペアが存在しないような実行可能なマッチングを安定マッチングと呼ぶ。

多くの既存文献において、一般的な（リクエスト構造をもたない）マッチング生成メカニズムが安定メカニズムであるとは、各主体より申告された線形な選好順序の組 $P=(P_S, P_T)$ の下で生成するマッチングが、P の下での安定マッチングであることと定義される（Roth and Sotomayor（1990））。つまり、戦略として各主体により選択された選好順序の組の下で、生成されるマッチングが安定的であることを要請するものである。

しかし、本論文が分析の対象とするリクエスト構造付きのメカニズムにおいては、既存の定義法と同様に安定メカニズムを定義することはできない。その理由は、各教員の戦略が選好順序ではなく、リクエストに対する選択（関数）であるという点にある。各教員の戦略であるリクエストに対する選択は、必ずしも線形な選好順序に基づいた選択とは限らない。そればかりか、仮に戦略が１つの線形な選好順序に基づいた選択であったとしても、実際にメカニズムが知ることができるのは戦略の全体像ではなく、リクエストによって問い合わせたいくつかの学生の集合に対する選択行動のみとなる。ゆえに、各教員の戦略から線形な選好順序を類推しようとしても、正確かつ一意に求められるとは限らない。

そこで本論文でのモデルにおいては、既存の定義法に従った場合に用いることとなる「戦略から得られる選好順序」の曖昧さを回避するため、あらかじめ選好順序の組を任意に１つとって、各学生はそこでの自身の選好順序を、各教員はそこでの各自の選好順序に基づいた選択を戦略とするような戦略プロファイルを考える。その戦略プロファイルに対し、生成するマッチングが元の選好順序の組の下で安定マッチングとなるようなリクエスト構造付きメカニズムを、安定メカニズムと定義することにする。

定義　任意のリクエスト構造付きメカニズムを考え、任意の戦略プロファイル（P_S, σ_T）に対しメカニズムが生成するマッチングを $\mu(P_S, \sigma_T)$ とする。

このメカニズムが安定的であるとは、任意の選好順序の組 $P=(P_S, P_T)$ に対し、$\mu(P_S, Ch_T^{P_T})$ が P の下で安定マッチングとなることをいう。

先ほど、安定メカニズムの定義に際して「あらかじめ選好順序の組を任意の１つとる」と述べたが、ここで任意に定められる選好順序の組を「真の選好順序の組」だと読んでしまっても問題はない。つまり、安定メカニズムとは、真の選好順序（に基づいた選択）を各主体が正直に申告すれば安定的なマッチングが常に生成されるメカニズムであるととらえることができる。

しかしながら、メカニズムの手続き次第では、ある主体にとって自身の真の選好に従った正直な申告を行うよりも、虚偽の申告を行った方がより好ましいマッチを得られる可能性が生じうる。そのようなメカニズムによって、各主体が可能な限りで最も好ましいマッチを得るために戦略の決定に熟慮を重ね、他の主体の意思決定によって自身のとるべき戦略が変化する不確実性に悩ませるような事態は望ましくない。

以上の理由から、各主体に対し虚偽の申告を行うインセンティブを与えないという性質は、メカニズムにとって一つの望ましい性質であるといえる。この性質は以下のように定義される。

定義　あるリクエスト構造付きメカニズムにおいて、各学生が他の主体のいかなる戦略プロファイルにおいても自身の真の選好順序とは異なる申告によってより好ましいマッチを得られない（つまり、各学生にとって真の選好順序を申告することが支配戦略である）とき、そのメカニズムは学生側に対して耐戦略的であるという。

一方、あるリクエスト構造付きメカニズムにおいて、各教員が自身の真の選好順序に基づいた選択とは異なる申告によってより好ましいマッチを得られない（つまり、各教員にとって真の選好順序に基づいた選択を申告することが支配戦略である）とき、そのメカニズムは**教員側に対して耐戦略的**であるという。

ここで、各学生 s が μ' と比べて μ においての方が「より好ましいマッチを得る」とは、自身の真の選好順序 P_s において $\mu(s)P_s\mu'(s)$ であることを意味する。また、各教員 t が μ' と比べて μ においての方が「より好ましいマッチを得る」とは、$\mu(t)\neq\mu'(t)$ に加え以下の条件のいずれかが成り立つことを意味する[8)]。

（ｉ）$\mu(t)\supset\mu'(t)$

（ii）$|\mu(t)|=|\mu'(t)|$ かつ、任意の $s\in\mu(t)\setminus\mu'(t), s'\in\mu'(t)\setminus\mu(t)$ に対し自身の真の選好順序 P_t において sP_ts'

２．両メカニズムの性質の比較

リクエスト構造付き受入保留メカニズムとリクエスト構造付きボストンメカニズムは、どのようなどのような性質を満たすのか。系３によって得られた事実を用いながら、スタンダードな受入保留メカニズムとボストンメカニズムについての既存研究の結果を応用すれば、両メカニズムの安定性と耐戦略に関する性質が明らかとなる。

8）　これらの条件は、S の部分集合全体の集合（べき集合）が、ある教員 t が潜在的にもつ線形な選好順序 P_t に対して**感応的**（responsive）な 2^S 上の順序関係 $>$ を生成する際の条件に基づいている。ちなみに、2^S 上の推移的な順序関係 $>$ が教員 t の線形な選好順序 P_t に対して感応的であるとは、（ｉ）任意の $s\in S$ および任意の $S'\subseteq S\setminus\{s\}$ に対し $S'\cup\{s\}>S'$、かつ（ii）任意の $s, s'\in S$ および任意の $S'\subseteq S\setminus\{s, s'\}$ に対し sP_ts' なら $S'\cup\{s\}>S'\cup\{s'\}$ を満たすことを意味する。詳しくは Roth（1985）を参照。

2．1．安定性についての比較

まず初めは安定性に関して、以下のような結果が得られる。

命題４　リクエスト構造付き受入保留メカニズムは安定的であるが、リクエスト構造付きボストンメカニズムは安定的ではない。

証明

リクエスト構造付受入保留メカニズムについて考える。選好順序の組 $P=(P_S, P_T)$ を任意にとると、戦略プロファイル $(P_S, Ch_T^{P_T})$ がプレイされるリクエスト構造付き受入保留メカニズムは (P_S, P_T) が申告された受入保留メカニズムと同じマッチングを生成するので、$\mu^{DA}(P_S, Ch_T^{P_T})$ は P の下で安定マッチングである。したがって、リクエスト構造付き受入保留メカニズムは安定的である。

一方、リクエスト構造付きボストンメカニズムにおいては、次のような例で生成されるマッチングが安定マッチングにはならない。３人の教員 t_1, t_2, t_3 と３人の学生 s_1, s_2, s_3 がいるとし、各教員の割当上限はすべて１であるとする。ここで、以下のような選好順序の組 $P=(P_S, P_T)$ を考える。

$$\begin{cases} P_{s_1}: t_1,\ t_2,\ t_3,\ s_1 \\ P_{s_2}: t_2,\ t_1,\ s_2,\ t_3 \\ P_{s_3}: t_2,\ t_3,\ t_1,\ s_3 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} P_{t_1}: s_2,\ s_1,\ s_3 \\ P_{t_2}: s_3,\ s_2,\ s_1 \\ P_{t_3}: s_1,\ s_2,\ s_3 \end{cases} \tag{3}$$

各主体が上記の選好順序ないしはそれに基づいた選択を申告したときに生成されるマッチング $\mu^B(P_S, Ch_T^{P_T})$ は以下のようになる。

$$\mu^B(P_S, Ch_T^{P_T})=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ \{s_1\} & \{s_3\} & \emptyset \end{pmatrix} \tag{4}$$

（マッチング $\mu^B(P_S, \sigma_T)$ を2行の行列によって表現する場合は、各教員とマッチする学生の集合を直下の行に示すことにする。行列内に表示されていない学生はどの教員ともマッチしていない。）

　このとき、選好順序の組 P の下では（s_2, t_1）が $\mu^B(P_S, \sigma_T)$ のブロッキングペアとなるため、リクエスト構造付きボストンメカニズムは安定的でない。（証明終）

　リクエスト構造が付加された受入保留メカニズムおよびボストンメカニズムにおいては、リクエスト構造のないスタンダードな場合での安定性に関する性質をそのまま引き継ぐことが示された。（学生オファー型）受入保留メカニズムにおいては、各教員に対しマッチ候補として保留されている学生と新たにオファーした学生とを教員の選好順序にしたがって随時マッチ候補を入れ替える。そのため、与えられた選好順序の下ではブロッキングペアが生じない。リクエスト構造付き受入保留メカニズムもこの構造を引き継ぎ、リクエストにおける各教員の選択にしたがってマッチ候補を入れ替えることから、各教員の選択と整合的な選好順序の下ではブロッキングペアは生じない。一方、ボストンメカニズムにおいては、オファーされた学生を各教員に随時マッチさせていくため、後のステップでより好ましい学生からのオファーがあった際にマッチさせることができない場合がある。リクエスト構造が付加されたボストンメカニズムにおいても同様の事態がおこり、ブロッキングペアを生み出す可能性が生じる。

2．2．耐戦略性についての比較

次に、耐戦略性に関しては以下のような結果が得られる。

命題5　リクエスト構造付き受入保留メカニズムは学生側および教員側

のどちらに対しても耐戦略的ではない。一方、リクエスト構造付きボストンメカニズムは学生側に対しては耐戦略的ではないが、教員側に対しては耐戦略的である。

証明

命題 4 の証明で用いた 3 人の教員と 3 人の学生のケース（$T=\{t_1, t_2, t_3\}, S=\{s_1, s_2, s_3\}$、任意の教員 t について $q_t=1$）を用いて、リクエスト構造付きボストンメカニズムとリクエスト構造付き受入保留メカニズムがどちらも学生側に対して耐戦略的でないことを示す。

式(2)と以下の式で定義される戦略プロファイル（P_S, σ_T）を考える。

$$\sigma_{t_1}:\begin{cases} (\{s_1, s_2\}; 1) \mapsto \{s_2\} \\ (\{s_2, s_3\}; 1) \mapsto \{s_2\} \\ (\{s_1, s_3\}; 1) \mapsto \{s_1\} \\ (\{s_1, s_2, s_3\}; 1) \mapsto \{s_2\} \end{cases}$$

$$\sigma_{t_2}:\begin{cases} (\{s_1, s_2\}; 1) \mapsto \{s_2\} \\ (\{s_2, s_3\}; 1) \mapsto \{s_3\} \\ (\{s_1, s_3\}; 1) \mapsto \{s_3\} \\ (\{s_1, s_2, s_3\}; 1) \mapsto \{s_1\} \end{cases} \tag{5}$$

$$\sigma_{t_3}:\begin{cases} (\{s_1, s_2\}; 1) \mapsto \{s_1\} \\ (\{s_2, s_3\}; 1) \mapsto \{s_2\} \\ (\{s_1, s_3\}; 1) \mapsto \{s_1\} \\ (\{s_1, s_2, s_3\}; 1) \mapsto \{s_1\} \end{cases}$$

１人の学生からなる集合に対する各教員の選択については自明のため、表記を割愛する。

ここで、学生 s_1 の戦略 P_{s_1} は自身の真の選好順序であるとしよう。上記の戦略プロファイル（P_S, σ_T）に対しリクエスト構造付きボストンメカニズムが生成するマッチング $\mu^B(P_S, \sigma_T)$ は、式(4)でのマッチングと同じになる。このとき、学生 s_1 戦略を $P'_{s_1}: t_2, s_1, t_1, t_3$ に変更すると、

マッチング $\mu^B(P'_{s_1}, P_{-s_1}, \sigma_T)$ は

$$\mu^B(P'_{s_1}, P_{-s_1}, \sigma_T)=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ \{s_2\} & \{s_1\} & \{s_3\} \end{pmatrix}$$

となり、学生 s_1 はより好ましい教員とマッチすることができる。したがって、リクエスト構造付きボストンメカニズムは学生側に対して耐戦略的ではない。

同様に、上述の戦略プロファイル (P_S, σ_T) に対しリクエスト構造付き受入保留メカニズムが生成するマッチング $\mu^{DA}(P_S, \sigma_T)$ は

$$\mu^{DA}(P_S, \sigma_T)=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ \{s_2\} & \{s_3\} & \{s_1\} \end{pmatrix}$$

となる。このとき、さきほどと同じく学生 s_1 が戦略を $P'_{s_1}: t_2, s_1, t_1, t_3$ に変更すると、マッチング $\mu^{DA}(P'_{s_1}, P_{-s_1}, \sigma_T)$ は

$$\mu^{DA}(P'_{s_1}, P_{-s_1}, \sigma_T)=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ \{s_2\} & \{s_1\} & \{s_3\} \end{pmatrix}$$

となり、学生 s_1 はより好ましい教員とマッチすることができる。したがって、リクエスト構造付き受入保留メカニズムは学生側に対して耐戦略的ではない。

今度は、リクエスト構造付き受入保留メカニズムが教員側に対し耐戦略的でないことを示すため、次に示すようなケースを考える。2 人の教員 t_1, t_2 と 3 人の学生 s_1, s_2, s_3 の間のマッチングを考え、各教員の割当上限はそれぞれ 1 であるとしよう。いま教員 t_1 は、他の主体の戦略プロファイル (P_S, σ_{t_2}) が以下の通りであるときに、自身の真の選好順序 $P_{t_1}: t_1, t_2, t_3$ に基づいた選択 $Ch_{t_1}^{P_{t_1}}$ を行うとする：

$$\begin{cases} P_{s_1}: t_2,\ t_1,\ s_1 \\ P_{s_2}: t_1,\ t_2,\ s_2 \\ P_{s_3}: t_1,\ t_2,\ s_3 \end{cases}$$

$$\sigma_{t_2}:\begin{cases}(\{s_1, s_2\};1)\mapsto\{s_2\}\\(\{s_2, s_3\};1)\mapsto\{s_2\}\\(\{s_1, s_3\};1)\mapsto\{s_1\}\\(\{s_1, s_2, s_3\};1)\mapsto\{s_2\}\end{cases}$$

戦略プロファイル $(P_S, Ch_{t_1}^{P_{t_1}}, \sigma_{t_2})$ の下で生成されるマッチング $\mu^{DA}(P_S, Ch_{t_1}^{P_{t_1}}, \sigma_{t_2})$ は

$$\mu^{DA}(P_S, Ch_{t_1}^{P_{t_1}}, \sigma_{t_2})=\begin{pmatrix}t_1 & t_2\\ \{s_2\} & \{s_1\}\end{pmatrix}$$

となる。ここで、教員 t_1 が別の選好順序 $P'_{t_1}: t_1, t_3, t_2$ に基づいた選択に戦略を変更すると、

$$\mu^{DA}(P_S, Ch_{t_1}^{P'_{t_1}}, \sigma_{t_2})=\begin{pmatrix}t_1 & t_2\\ \{s_1\} & \{s_2\}\end{pmatrix}$$

となり、教員 t_1 は（真の選好順序 P_{t_1} の意味で）より好ましいマッチを得ることができる（より厳密には、$|\mu^{DA}(P_S, Ch_{t_1}^{P_{t_1}}, \sigma_{t_2})(t_1)|=|\mu^{DA}(P_S, Ch_{t_1}^{P'_{t_1}}, \sigma_{t_2})(t_1)|$ かつ $s_1\ P_{t_1}\ s_2$ が成り立つ）。よってリクエスト構造付き受入保留メカニズムは耐戦略的でない。

最後に、リクエスト構造付きボストンメカニズムが教員側に対し耐戦略的であることを示す。このメカニズムにおいては、（ⅰ）各教員に実行されるリクエストは高々１回であり、（ⅱ）リクエストを受けた各教員への最終的なマッチはリクエスト以前にすでに割り当てられた学生とリクエストにおいて選択された学生とで構成され、なおかつ、（ⅲ）リクエストで各教員が選択する学生の数はメカニズムによって定められ、それより大きいあるいは小さい人数を教員が選ぶことはできない。これらの条件を踏まえて、他の主体の戦略プロファイル $(P_S, \sigma_{-\hat{t}})$ においてある教員 $\hat{t}$ が真の選好順序 $P'_{\hat{t}}$ に基づいた選択 $Ch_{\hat{t}}^{P_{\hat{t}}}$ を戦略として選んだ状況を考える。教員 $\hat{t}$ に対しリクエストが１度も実行されなければ、教

員 $\hat{t}$ は別の戦略を選んでもマッチの結果を変えることはできない。一方、教員 $\hat{t}$ に対しリクエストが（１度だけ）実行されるならば、リクエストが実行されるステップまでに教員 $\hat{t}$ とのマッチが確定している学生の集合を $S_{\hat{t}}(|S_{\hat{t}}|<q_{\hat{t}})$、リクエストにおいて教員 $\hat{t}$ に提示される学生の集合を S' とすると、

$$\mu^B(P_S, Ch_{\hat{t}}^{P_{\hat{t}}}, \sigma_{-\hat{t}})(\hat{t}) = S_{\hat{t}} \cup Ch_{\hat{t}}^{P_{\hat{t}}}(S'; q_{\hat{t}} - |S_{\hat{t}}|)$$

と表せる。同様に、もし教員 $\hat{t}$ が別の戦略 σ'_t をとったとすると、

$$\mu^B(P_S, \sigma'_{\hat{t}}, \sigma_{-\hat{t}})(\hat{t}) = S_{\hat{t}} \cup \sigma'_{\hat{t}}(S'; q_{\hat{t}} - |S_{\hat{t}}|)$$

となる。このとき、$Ch_{\hat{t}}^{P_{\hat{t}}}$ の定義により、各教員はリクエストで真の選好順序とは異なる選択を行っても、(真の選好順序 $P_{\hat{t}}$ の意味で）より好ましいマッチの結果を実現することはできない（より厳密には、$|\mu^B(P_S, Ch_{\hat{t}}^{P_{\hat{t}}}, \sigma_{-\hat{t}})(\hat{t})| = |\mu^B(P_S, \sigma'_{\hat{t}}, \sigma_{-\hat{t}})(\hat{t})|$ かつ $\mu^B(P_S, Ch_{\hat{t}}^{P_{\hat{t}}}, \sigma_{-\hat{t}})(\hat{t}) \neq \mu^B(P_S, \sigma'_{\hat{t}}, \sigma_{-\hat{t}})(\hat{t})$ であるが、任意の $s \in \sigma'_{\hat{t}}(S'; q_{\hat{t}} - |S_{\hat{t}}|)$ と任意の $s' \in Ch_{\hat{t}}^{P_{\hat{t}}}(S'; q_{\hat{t}} - |S_{\hat{t}}|)$ に対して $sP_t s'$ となるような戦略 $\sigma'_{\hat{t}}$ は存在しない)。

　したがって、リクエスト構造付きボストンメカニズムは耐戦略的である。(証明終)

驚くべきことに、受入保留メカニズムは学生側に対して耐戦略的である (Roth (1984)) にも関わらず、リクエストの構造が付加されるとその耐戦略性は失われてしまう。その理由は学生側にあるのではなく、各教員がリクエスト構造によって循環を許した選択、つまり、補題１の条件（＊）を満たさない戦略をとりうる点にある。実際、証明中で用いられる式(5)にある教員 t_2 の戦略は、条件（＊）に違反する循環的な選択を行っている。

加えて、一人の学生が選好順序を変えたときに、各教員に対するリクエストにおいて提示される学生の集合が変化することにも注意しよう。もし教員側が循環的な選択を戦略として選んでいるならば、リクエストに対する選択

と整合的となる線形な選好順序に変化が生じる場合がある。すべての条件が整ったとき、一人の学生は虚偽の選好順序を申告した際により好ましい教員とマッチする余地が生まれるのである。

一方、リクエスト構造付きボストンメカニズムは、ボストンメカニズムが満たす教員側に対する耐戦略性を引き継ぐ結果となった。これは、リクエストに対する選択において各教員が割当に「空き」を作らせないよう選ぶべき人数をメカニズムが定めている点に起因する。各教員が自由に選ぶ人数を決められるとしたら、虚偽の申告によって割当の枠を一部残し、その後にオファーをしてくるより好ましい学生とマッチしようとするインセンティブが生じてしまう。

Ⅳ　結論

本研究を通して、リクエスト構造を付け加えた場合のボストンメカニズムは安定性と耐戦略性に関して、各教員に選好順序の申告を要請するスタンダードなボストンメカニズムと同様の結果を持つことが示された。一方、（学生オファー型の）受入保留メカニズムに関しては、リクエストの構造が付け加えられると、安定性は同様に満たすものの、学生側・教員側どちらに対する耐戦略性も満たさないことが示された。

各メカニズムの安定性と耐戦略性に関する性質をまとめると、表１のようになる。各メカニズムに対しては本モデルでの設定を適用し、受入保留メカニズムの項目には、学生オファー型の場合の結果を示してある[9)]。

結局のところ、リクエスト構造を持つ２つのメカニズムのうちどちらを選ぶべきかについては、安定性と耐戦略性についての性質を見る限り明確な結論を与えることはできない。安定性と（教員側に対する）耐戦略性のどちらに重点を置くかによって、選ぶべきメカニズムは変えるべきである。

あるいは、安定性と耐戦略性とは別の判断基準を加えて議論を進めること

9）リクエスト構造がない場合における性質は、Gale and Shapley（1962），Roth（1985），Ergin and Sönmez（2006）による。

第１表：マッチング生成メカニズムの諸性質

		リクエスト構造を付けた場合		リクエスト構造がない場合	
		受入保留メカニズム	ボストンメカニズム	受入保留メカニズム	ボストンメカニズム
安定性		○	×	○	×
耐戦略性	学生側に対して	×	×	○	×
	教員側に対して	×	○	×	○

もできる。別の判断基準の例の一つとして、各教員へのリクエストの回数が挙げられる。リクエスト構造付きボストンメカニズムは１人の教員に対し高々１回しかリクエストを実行しないのに対し、リクエスト構造付き受入保留メカニズムは１人の教員に対し１回のリクエストで済むとは限らない。ゆえに、リクエストの回数から実務上の手間を考慮するならば、リクエスト構造付きボストンメカニズムの方が優れていると考えることができる。

他にも、各主体が両メカニズムにおいて戦略的に行動した場合に生成されるマッチングを比較することも、一つの判断の基準として妥当である。戦略的に行動した場合に安定的なマッチングを得られるか否かについてはいまだオープンクエスチョンであり、今後解明すべき課題であると考える。

（筆者は関西学院大学商学部助教）

引用文献

Abdulkadiroğlu, A., and T. Sönmez (2003), "School Choice: A Mechanism Design Approach," *The American Economic Review,* Vol. 93, No. 3, pp. 729-747.

Bikhchandani, S. (2014), "Two-sided with Incomplete Information," working paper.

Ehlers, L., and J. Masso (2007), "Incomplete Information and Singleton Cores in Matching Markets," *Journal of Economic Theory,* Vol. 136, pp. 587-600.

——— (2015), "Matching Markets under (In)complete Information," *Journal of Economic Theory,* Vol. 157, pp. 295-314.

Gale, D., and L. Shapley (1962), "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly,* Vol. 69, pp. 9-15.

Liu, Q., G. J. Mailath, A. Postlewaite, and L. Samuelson (2014), "Stable Matching with

Incomplete Information," *Econometrica,* Vol. 82, No. 2, pp. 541-587.

Majumdar, D. (2003), "Ordinally Bayesian Incentive Compatible Stable Matching," working paper.

Roth, A. E. (1985), "The College Admissions Problem Is Not Equivalent to the Marriage Problem," *Journal of Economic Theory,* Vol. 36, pp. 277-288.

———— (1989), "Two-Sided Matching with Incomplete Information about Others' Preferences," *Games and Economic Behavior,* Vol. 1, pp. 191-209.

———— (2003), "The Origins, History, and Design of the Resident Match," *Journal of the American Medical Association,* Vol. 289, No. 7, pp. 909-912.

小島武仁、安田洋祐（2009）「マッチング・マーケットデザイン」『経済セミナー』第647号、135-145頁。

安田洋祐（2003）『学校選択制のデザイン―ゲーム理論アプローチ』NTT 出版。