# 動態的・ネットワーク型 DEA モデル

瀬　見　　　博

**要　旨**

伝統的な DEA モデルは、通常、事業体の内部をブラックボックスとして扱っているが、現実の事業体は相互に関連するさまざまな部門が連結変数によって結びついたネットワーク構造を内部にもち、しかも、そこでの活動は連続する複数の期間が繰越変数で結びつけられて継続的に行われる。したがって、従来のモデルに代えて、全体効率性、期間効率性、部門効率性、期間－部門効率性を同時にかつ整合性を保ちつつ測定できるモデルの開発が望まれる。本稿では、そのための有用なモデルとして Tone and Tsutsui の DNSBM モデルを取りあげ、それがどのような手法であるのかを概説しつつ検討する。

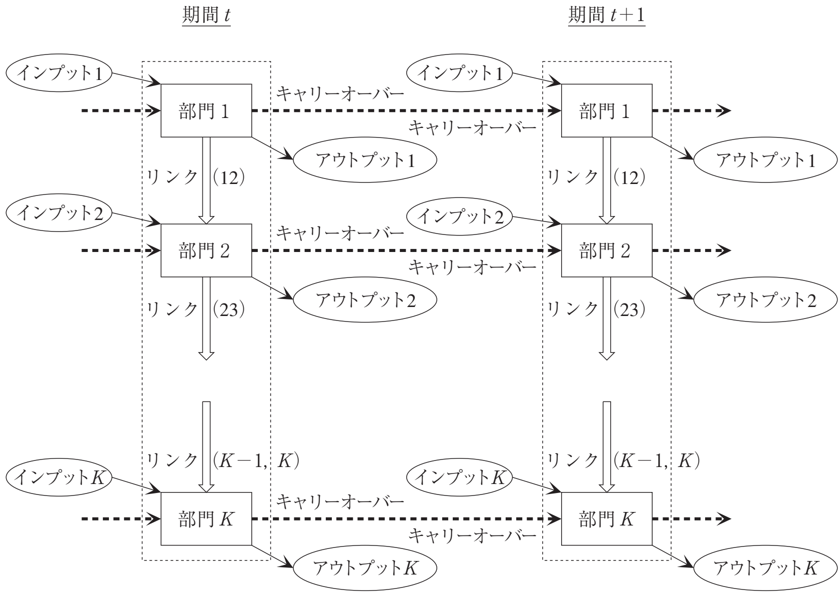
**キーワード**：ネットワーク型 DEA モデル（network DEA model）、動態的 DEA モデル（dynamic DEA model）、連結変数（link variables）、繰越変数（carry-over variables）、非比率・スラック規準型モデル（non-radial, slacks-based measure model）

## Ⅰ　序

DEA（Data Envelopment Analysis）は、同種の活動を営む複数の事業体間の相対的効率性を測定・評価するために、Charnes, Cooper, Rhodes により考案されたノンパラメトリックな数理計画手法の1つであるが[1)]、通常の伝統的な DEA モデルでは、主に資源転換過程の内部、すなわち複数のインプッ

1） Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E.（1978）, Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, pp. 429–444.

図１．ネットワーク型の動態的生産システム




トを消費して複数のアウトプットを生産する事業体の内部、がブラックボックスであると見なされてきた。しかし、現実に見受けられる多くの事業体は、図１の概念図で示されるように、(1)相互に関連するさまざまな部門がリンク変数（連結変数）によって結びつけられたネットワーク構造をその内部に形成しており、個々の部門はそれぞれ部門独自のインプットとアウトプットをもち、また、部門間ではインプット、アウトプットの形で中間財の交換を行っている。(2)さらに、事業体の活動は、通常、連続する複数の期間がキャリー・オーバー変数（繰越変数）で結びつけられて継続的に行われていると考えられる。したがって、従来の静態的なブラックボックスモデルの代わりに、(1)と(2)の状態が併存する状況下で、事業体の効率性を的確に評価できる新たなモデルを構築する必要がある。そのために、これまで数多くのモデルが提案されてきたが[2)]、それらの中でも、近年、特に全体効率性、期間効率性、部門効率性、期間－部門効率性を同時にしかも整合性を保ちつつ取り

扱うことができる DNSBM モデルが、Tone and Tsutsui によって提唱された[3)]。そこで本稿において、このモデルを取りあげ、それがどのような手法であるのかを概説しつつ検討してみることにする。

## Ⅱ　DNSBM モデルに関する記号、生産可能集合、制約条件

### Ⅱ－1　記号

いま、$K$ 箇所の相互に関連する部門（$k=1, \dots, K$）から構成されている $n$ 種類の各事業体 $\mathrm{DMU}_j$（$j=1, \dots, n$）が $T$ 期間（$t=1, \dots, T$）にわたって同種の生産活動を行っているものとしよう。そのとき、部門 $k$ のインプット数を $m_k$、アウトプット数を $r_k$、部門 $k$ から部門 $h$ への連結活動（linking activities）を $(k, h)_l$、その集合を $L_{kh}$ と記し、各種の観測されたデータを以下の記号で表示しておくことにする。

・$x_{ijk}^t \in R_+$（$i=1, \dots, m_k; j=1, \dots, n; k=1, \dots, K; t=1, \dots, T$）：期間 $t$ における $\mathrm{DMU}_j$ の部門 $k$ への $i$ 番目のインプット。

・$y_{rjk}^t \in R_+$（$r=1, \dots, r_k; j=1, \dots, n; k=1, \dots, K; t=1, \dots, T$）：期間 $t$ における $\mathrm{DMU}_j$ の部門 $k$ からの $r$ 番目のアウトプット。

・$z_{jk_l}^{(t,t+1)} \in R_+$（$j=1, \dots, n; l=1, \dots, L_k; t=1, \dots, T-1$）：$\mathrm{DMU}_j$ の部門 $k$ における期間 $t$ から期間 $t+1$ への繰越分（carry-over：以下、C-O と記す）。$L_k$ は部門 $k$ からの C-O の項目数。

・$z_{j(kh)_l}^t \in R_+$（$j=1, \dots, n; l=1, \dots, L_{kh}; t=1, \dots, T$）：期間 $t$ における $\mathrm{DMU}_j$ の部門 $k$ から部門 $h$ への中間財（以下、リンクと呼ぶ）。

### Ⅱ－2　生産可能集合

DNSBM モデルの生産可能集合は、上記の記号を用いて次のように定義す

2）　ほとんどが、(1)の状況のみを扱ったネットワーク型 DEA モデルか、(2)の状況のみを扱った動態的 DEA モデルのいずれかである。

3）　Tone, K., Tsutsui, M. (2014), Dynamic DEA with network structure: A slacks-based measure approach, *Omega,* 42, pp. 124-131.

ることができる[4]。

$$\mathrm{x}_{k}^{t} \geq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{x}_{jk}^{t} \lambda_{jk}^{t} \quad (\forall k ; \forall t) \tag{1a}$$

$$\mathrm{y}_{k}^{t} \leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{y}_{jk}^{t} \lambda_{jk}^{t} \quad (\forall k ; \forall t) \tag{1b}$$

$$\mathrm{z}_{k_l}^{(t,t+1)} \geq,=,\leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{z}_{jk_l}^{(t,t+1)} \lambda_{jk}^{t} \quad (\forall k ; \forall k_l ; t=1,\ \ldots,\ T-1) \tag{1c}$$

（期間 $t$ からのキャリーオーバー）

$$\mathrm{z}_{k_l}^{(t,t+1)} \geq,=,\leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{z}_{jk_l}^{(t,t+1)} \lambda_{jk}^{t+1} \quad (\forall k ; \forall k_l ; t=1,\ \ldots,\ T-1) \tag{1d}$$

（期間 $t+1$ へのキャリーオーバー）

$$\mathrm{z}_{(kh)_l}^{t} \geq,=,\leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{z}_{j(kh)_l}^{t} \lambda_{jk}^{t} \quad (\forall l ; \forall (kh)_l ; \forall t) \tag{1e}$$

（期間 $t$ における部門 $k$ からのアウトプット）

$$\mathrm{z}_{(kh)_l}^{t} \geq,=,\leq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{z}_{j(kh)_l}^{t} \lambda_{jh}^{t} \quad (\forall l ; \forall (kh)_l ; \forall t) \tag{1f}$$

（期間 $t$ における部門 $h$ へのインプット）

$$\lambda_{jk}^{t} \geq 0 \quad (\forall j ; \forall k ; \forall t)^{5)} \tag{1g}$$

## Ⅱ－3　$\mathrm{DMU}_o$ に関する制約式

さて、生産可能集合(1a)～(1g)を前提とし、効率性評価の対象になっている特定の事業体を $\mathrm{DMU}_o$（$o=1,\ \ldots,\ n$）と表すことにすれば、観測されたそれぞれのデータについて以下のような制約式が成り立つ。

① インプットとアウトプットに関する制約条件

$$x_{iok}^{t} = \sum_{j=1}^{n} x_{ijk}^{t} \lambda_{jk}^{t} + s_{iok}^{t-} \quad (\forall k ; \forall t ; \forall i) \tag{2a}$$

$$y_{rok}^{t} = \sum_{j=1}^{n} y_{rjk}^{t} \lambda_{jk}^{t} - s_{rok}^{t+} \quad (\forall k ; \forall t ; \forall r) \tag{2b}$$

$$\lambda_{jk}^{t} \geq 0 \quad (\forall j ; \forall k ; \forall t) \tag{2c}$$

ここに、$s_{iok}^{t-}$（$\geq 0$）と $s_{rok}^{t+}$（$\geq 0$）は、それぞれ、インプットの余剰とアウトプットの不足を表すスラック変数である。

---

4）（1c）～（1f）の等号、不等号の選択は、リンク、キャリーオーバー（C-O）の特性に依存する。

5）生産に関する規模の収穫可変を想定する場合には、制約式 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk}^{t} = 1$ が追加される。

② キャリー・オーバー（C-O）に関する制約条件

C-O は、アウトプットとして扱われる望ましい C-O:（$z_{ok_l good}^{(t,t+1)}$）、インプットとして扱われる望ましくない C-O:（$z_{ok_l bad}^{(t,t+1)}$）、裁量権のある C-O:（$z_{ok_l free}^{(t,t+1)}$）、裁量権のない C-O:（$z_{ok_l fix}^{(t,t+1)}$）の 4 種類に分類され、それぞれについて、次の制約式が成立する[6]。

$$z_{ok_l good}^{(t,t+1)}=\sum_{j=1}^{n} z_{jk_l good}^{(t,t+1)}\lambda_{jk}^{t}-s_{ok_l good}^{(t,t+1)} \quad (k_l=1,\ \ldots,\ ngood_k\,;\ \forall k\,;\ \forall t) \qquad (3a)$$

$$z_{ok_l bad}^{(t,t+1)}=\sum_{j=1}^{n} z_{jk_l bad}^{(t,t+1)}\lambda_{jk}^{t}+s_{ok_l bad}^{(t,t+1)} \quad (k_l=1,\ \ldots,\ nbad_k\,;\ \forall k\,;\ \forall t) \qquad (3b)$$

$$z_{ok_l free}^{(t,t+1)}=\sum_{j=1}^{n} z_{jk_l free}^{(t,t+1)}\lambda_{jk}^{t}+s_{ok_l free}^{(t,t+1)} \quad (k_l=1,\ \ldots,\ nfree_k\,;\ \forall k\,;\ \forall t) \qquad (3c)$$

$$z_{ok_l fix}^{(t,t+1)}=\sum_{j=1}^{n} z_{jk_l fix}^{(t,t+1)}\lambda_{jk}^{t} \quad (k_l=1,\ \ldots,\ nfix_k\,;\ \forall k\,;\ \forall t) \qquad (3d)$$

ここに、$s_{ok_l good}^{(t,t+1)}$（$\geq 0$），$s_{ok_l bad}^{(t,t+1)}$（$\geq 0$），$s_{ok_l free}^{(t,t+1)}$（符号制約なし）は、順次、C-O の不足、余剰、不足か余剰を表すスラック変数である。また、$ngood_k$, $nbad_k$, $nfree_k$, $nfix_k$ は部門 $k$ のそれぞれの C-O の数を表す。さらに、期間 $t$ と期間 $t+1$ の間にあるすべての C-O 活動の連続性を保証するためには、

$$\sum_{j=1}^{n} z_{jk_l\alpha}^{(t,t+1)}\lambda_{jk}^{t}=\sum_{j=1}^{n} z_{jk_l\alpha}^{(t,t+1)}\lambda_{jk}^{t+1} \quad (\forall k\,;\ \forall k_l\,;\ t=1,\ \ldots,\ T-1) \qquad (3e)$$

の制約式が必要である。なお、ここで、記号 $\alpha$ は、$good$, $bad$, $free$, $fix$ を意味する。

③ リンクに関する制約条件

リンクには、裁量権のあるリンク：（$z_{j(kh)_l free}^{t}$）、裁量権のないリンク:（$z_{j(kh)_l fix}^{t}$）、次部門へのインプットとして扱われるリンク：（$z_{j(kh)_l in}^{t}$）、前部門からのアウトプットとして扱われるリンク：（$z_{j(kh)_l out}^{t}$）の 4 種類があり、それぞれについて、以下の制約式が成り立つ。

$$z_{o(kh)_l free}^{t}=\sum_{j=1}^{n} z_{j(kh)_l free}^{t}\lambda_{jk}^{t}+s_{o(kh)_l free}^{t} \quad (\forall (kh)_l free\,;\ \forall t) \qquad (4a)$$

$$z_{o(kh)_l fix}^{t}=\sum_{j=1}^{n} z_{j(kh)_l fix}^{t}\lambda_{jk}^{t} \quad (\forall (kh)_l fix\,;\ \forall t) \qquad (4b1)$$

6）裁量権があるとは、その対象を意思決定者が自由に決定・制御できることを、また逆に裁量権がないとは、意思決定者がそれを自由に制御することができずに固定されていることを指す。

$$z^t_{o(kh)_l fix}=\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l fix}\lambda^t_{jh} \qquad (\forall (kh)_l fix\ ;\ \forall t) \qquad (4b2)$$

$$z^t_{o(kh)_l in}=\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l in}\lambda^t_{jk}+s^t_{o(kh)_l in} \qquad ((kh)_l in=1, \ldots, linkin_k\ ;\ \forall k\ ;\ \forall t) \qquad (4c)$$

$$z^t_{o(kh)_l out}=\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l out}\lambda^t_{jk}-s^t_{o(kh)_l out} \qquad ((kh)_l out=1, \ldots, linkout_k\ ;\ \forall k\ ;\ \forall t) \qquad (4d)$$

$$\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l free}\lambda^t_{jk}=\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l free}\lambda^t_{jh} \qquad (5a)$$

$$\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l fix}\lambda^t_{jk}=\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l fix}\lambda^t_{jh} \qquad (5b)$$

$$\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l in}\lambda^t_{jk}=\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l in}\lambda^t_{jh} \qquad (5c)$$

$$\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l out}\lambda^t_{jk}=\sum_{j=1}^n z^t_{j(kh)_l out}\lambda^t_{jh} \qquad (5d)$$

ここに、(4a)は裁量権のあるリンク、(4b1)と(4b2)は裁量権のないリンク、(4c)は次部門へのインプットとして扱われるリンク、(4d)は前部門からのアウトプットとして扱われるリンク、に関する制約式である。なお、スラック変数 $s^t_{o(kh)_l in}$ と $s^t_{o(kh)_l out}$ は非負であるが、$s^t_{o(kh)_l free}$ には符号制約がない。また、$linkin_k$ は部門 $k$ からのインプットとして扱われるリンク数、$linkout_k$ は部門 $k$ からのアウトプットとして扱われるリンク数を表す。さらに、(5a)～(5d)は、それぞれのリンクに関するインプットとアウトプット間の連結性を維持するために必要な制約条件である。

## Ⅲ　３種類の DNSBM モデル

DNSBM モデルは、インプット指向型、アウトプット指向型、無指向型の３タイプに分類できるが、どれを選択するかは分析目的に依存する。たとえば、インプット側の効率性に主たる関心があり、インプットを削減することができるならばインプット指向型が、アウトプット側の効率性が主な関心事であり、アウトプットを増加させることができるならばアウトプット指向型が、また、両者の効率性に関心があり、インプットの削減とアウトプットの増加が同時に可能ならば無指向型が選ばれる。

Ⅲ－1　インプット指向型 DNSBM モデル

インプット指向型モデルの場合、ある特定の事業体 $\mathrm{DMU}_o$ の全体効率性 $\theta_o^*$ は、

$$\theta_o^* = \mathrm{Min} \quad \sum_{t=1}^{T} W^t \left[\sum_{k=1}^{K} w^k \left[1 - \{1/(m_k + linkin_k + nbad_k)\} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-}/x_{iok}^t) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^t/z_{o(kh)_l in}^t) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\right\}\right]\right] \tag{6}$$

s.t.　(2a)～(5d)

と定式化される線形計画問題を解くことにより求められる。ここに、$W^t(\forall t)$ と $w^k(\forall k)$ は、それぞれ外生的に与えられる期間 $t$ と部門 $k$ の重要度を示す加重値で、$\sum_{t=1}^{T} W^t = 1$, $\sum_{k=1}^{K} w^k = 1$, $W^t \geq 0\ (\forall t)$, $w^k \geq 0\ (\forall k)$ を満たす。

さて、上記モデルの最適解が得られると[7]、それらを用いて、期間効率性 $\theta_o^{t*}$、部門効率性 $\theta_{ok}^*$、期間－部門効率性 $\theta_{ok}^{t*}$ を、

$$\theta_o^{t*} = \sum_{k=1}^{K} w^k \left[1 - \{1/(m_k + linkin_k + nbad_k)\}\left\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-*}/x_{iok}^t) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t*}/z_{o(kh)_l in}^t) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\right\}\right] \quad (\forall t) \tag{7a}$$

$$\theta_{ok}^{*} = \sum_{t=1}^{T} W^t \left[1 - \{1/(m_k + linkin_k + nbad_k)\}\left\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-*}/x_{iok}^t) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t*}/z_{o(kh)_l in}^t) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\right\}\right] \quad (\forall k) \tag{7b}$$

$$\theta_{ok}^{t*} = \left[1 - \{1/(m_k + linkin_k + nbad_k)\}\left\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-*}/x_{iok}^t) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t*}/z_{o(kh)_l in}^t) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\right\} \quad (\forall k,\ \forall t) \tag{7c}$$

により計算することができる。また、期間－部門効率性、期間効率性、部門効率性、全体効率性について以下のことがいえる。① $\theta_{ok}^{t*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ の部門 $k$ は期間 $t$ で効率的である。すなわち、$s_{iok}^{t-*}=0$ $(t=1, \ldots, T; i=1, \ldots, m_k)$, $s_{o(kh)_l in}^{t*}=0$ $(t=1, \ldots, T; (kh)_l=1, \ldots, linkin_k)$, $s_{ok_l bad}^{(t,t+1)*}=0$

7）以下、決定変数に＊を付けることによって最適解の値であることを示す。

$(t=1, \ldots, T-1; k_l=1, \ldots, nbad_k)$ が成り立つ。② $\theta_o^{t*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は期間 $t$ で効率的である。すなわち、$\theta_{ok}^{t*}=1$ $(k=1, \ldots, K)$。③ $\theta_{ok}^{*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は部門 $k$ で効率的である。すなわち、$\theta_{ok}^{t*}=1$ $(t=1, \ldots, T)$。④ $\theta_o^{*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は全体効率的である。⑤ 全体効率性 $\theta_o^{*}$ は期間効率性 $\theta_o^{t*}$ の加重相加平均である。

ところで、全体効率性は、上記の線形計画問題の最適解として一意的に決定できるが、(7a)、(7b)、(7c)の効率性は、スラック変数が複数の解をもつ可能性があるため必ずしも一意に定まらない。そのときには、次に述べるような解決策が提案されている。まず、通常の場合、期間の重要度は直近の期間ほど大きいと考えられるので[8]、最適な全体効率性を維持しながら最終期間 $T$ の効率性 $\varphi_o^T$ を最小化するように、目的関数(8)、制約条件(9)、(2a)～(5d)の線形計画問題を解く。

$$\varphi_o^{T*}=\mathrm{Min}\ \textstyle\sum_{k=1}^{K} w^k\left[1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{T-}/x_{iok}^{T}) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{T}/z_{o(kh)_l in}^{T}) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(T,T+1)}/z_{ok_l bad}^{(T,T+1)})\}\right] \tag{8}$$

$$\text{s.t.}\quad \theta_o^{*}=\textstyle\sum_{t=1}^{T} W^t\left[\sum_{k=1}^{K} w^k\left[1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\cdot \{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-}/x_{iok}^{t}) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t}/z_{o(kh)_l in}^{t}) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\}\right]\right] \tag{9}$$

(2a)～(5d)

次に、同じ操作を $t=2$ まで繰り返す。その結果、期間 $t$ の効率性 $\varphi_o^t$ は次の線形計画問題を解くことによって求めることが可能となる。

$$\varphi_o^{t*}=\mathrm{Min}\ \textstyle\sum_{k=1}^{K} w^k\left[1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-}/x_{iok}^{t}) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t}/z_{o(kh)_l in}^{t}) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\}\right] \tag{10}$$

$$\text{s.t.}\quad \theta_o^{*}=\textstyle\sum_{t=1}^{T} W^t\left[\sum_{k=1}^{K} w^k\left[1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\cdot \{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-}/x_{iok}^{t}) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t}/z_{o(kh)_l in}^{t}) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\}\right]\right]$$

8) すなわち、期間 $T, T-1, \ldots, 2, 1$ の順に重要度は小さくなる。

$$\varphi_o^{T*}=\sum_{k=1}^{K}w^k[1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{T-}/x_{iok}^{T}) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{T}/z_{o(kh)_l in}^{T})+\sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(T,T+1)}/z_{ok_l bad}^{(T,T+1)})\}] \tag{11}$$

$\vdots$

$$\varphi_o^{t+1*}=\sum_{k=1}^{K}w^k[1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\cdot \{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{(t+1)-}/x_{iok}^{t+1})+\sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t+1}/z_{o(kh)_l in}^{t+1}) + \sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t+1,t+2)}/z_{ok_l bad}^{(t+1,t+2)})\}] \tag{12}$$

(2a)～(5d)

Ⅲ－2　アウトプット指向型 DNSBM モデル

アウトプット指向型モデルの場合、ある特定の事業体 $\mathrm{DMU}_o$ の全体効率性 $\tau_o^*$ は、

$$1/\tau_o^*=\mathrm{Max}\quad \sum_{t=1}^{T}W^t[\sum_{k=1}^{K}w^k[1+\{1/(r_k+linkout_k+ngood_k)\}\cdot \{\sum_{r=1}^{r_k}(s_{rok}^{t+}/y_{rok}^{t})+\sum_{(kh)_l=1}^{linkout_k}(s_{o(kh)_l out}^{t}/z_{o(kh)_l out}^{t}) + \sum_{k_l=1}^{ngood_k}(s_{ok_l good}^{(t,t+1)}/z_{ok_l good}^{(t,t+1)})\}]] \tag{13}$$

s.t.　(2a)～(5d)

と定式化される線形計画問題の最適解として与えられる。また、その最適解を用いて、期間効率性 $\tau_o^{t*}$、部門効率性 $\tau_{ok}^{*}$、期間－部門効率性 $\tau_{ok}^{t*}$ を、それぞれ、(14a)、(14b)、(14c)から求めることができる。

$$1/\tau_o^{t*}=\sum_{k=1}^{K}w^k[1+\{1/(r_k+linkout_k+ngood_k)\}\{\sum_{r=1}^{r_k}(s_{rok}^{t+*}/y_{rok}^{t}) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkout_k}(s_{o(kh)_l out}^{t*}/z_{o(kh)_l out}^{t})+\sum_{k_l=1}^{ngood_k}(s_{ok_l good}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l good}^{(t,t+1)})\}] \tag{14a}$$

$$1/\tau_{ok}^{*}=\sum_{t=1}^{T}W^t[1+\{1/(r_k+linkout_k+ngood_k)\}\{\sum_{r=1}^{r_k}(s_{rok}^{t+*}/y_{rok}^{t}) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkout_k}(s_{o(kh)_l out}^{t*}/z_{o(kh)_l out}^{t})+\sum_{k_l=1}^{ngood_k}(s_{ok_l good}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l good}^{(t,t+1)})\}] \tag{14b}$$

$$1/\tau_{ok}^{t*}=[1+\{1/(r_k+linkout_k+ngood_k)\}\{\sum_{r=1}^{r_k}(s_{rok}^{t+*}/y_{rok}^{t}) + \sum_{(kh)_l=1}^{linkout_k}(s_{o(kh)_l out}^{t*}/z_{o(kh)_l out}^{t})+\sum_{k_l=1}^{ngood_k}(s_{ok_l good}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l good}^{(t,t+1)})\}] \tag{14c}$$

さらに、インプット指向型モデルと同様に以下のことがいえる。① $\tau_{ok}^{t*}=1$

ならば、$\mathrm{DMU}_o$ の部門 $k$ は期間 $t$ で効率的である。すなわち、$s_{rok}^{t+*}=0$（$t=1, \ldots, T$ ; $r=1, \ldots, r_k$）, $s_{o(kh)_l out}^{t*}=0$（$t=1, \ldots, T$ ; $(kh)_l=1, \ldots, linkout_k$）, $s_{ok_l good}^{(t,t+1)*}=0$（$t=1, \ldots, T-1$ ; $k_l=1, \ldots, ngood_k$）が成り立つ。② $\tau_o^{t*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は期間 $t$ で効率的である。すなわち、$\tau_{ok}^{t*}=1$（$k=1, \ldots, K$）。③ $\tau_{ok}^{*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は部門 $k$ で効率的である。すなわち、$\tau_{ok}^{t*}=1$（$t=1, \ldots, T$）。④ $\tau_o^*=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は全体効率的である。⑤ 全体効率性 $\tau_o^*$ は期間効率性 $\tau_o^{t*}$ の加重調和平均である。⑥ $\theta_o^*=1/\tau_o^*$ は必ずしも成立しない。なお、アウトプット指向型モデルについても、最適な全体効率性の値は確定できるが、期間効率性、部門効率性、期間－部門効率性の値は一意に定まらないことが起こり得る。その際には、インプット指向型モデルの場合と同様の方法を用いて対処することができる。

### Ⅲ－3　無指向型 DNSBM モデル

無指向型 DNSBM モデルは、既述のインプット指向型とアウトプット指向型のモデルを結合することによって与えられる。したがって、$\mathrm{DMU}_o$ の最適なシステム全体の効率性 $\rho_o^*$ は、

$$\begin{aligned}\rho_o^*=\mathrm{Min}\quad & \langle \textstyle\sum_{t=1}^{T} W^t[\sum_{k=1}^{K} w^k[1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\cdot \\ & \{\textstyle\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-}/x_{iok}^t)+\sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^t/z_{o(kh)_l in}^t) \\ & +\textstyle\sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\}]]\rangle\cdot \\ & \langle \textstyle\sum_{t=1}^{T} W^t[\sum_{k=1}^{K} w^k[1+\{1/(r_k+linkout_k+ngood_k)\}\cdot \\ & \{\textstyle\sum_{r=1}^{r_k}(s_{rok}^{t+}/y_{rok}^t)+\sum_{(kh)_l=1}^{linkout_k}(s_{o(kh)_l out}^t/z_{o(kh)_l out}^t) \\ & +\textstyle\sum_{k_l=1}^{ngood_k}(s_{ok_l good}^{(t,t+1)}/z_{ok_l good}^{(t,t+1)})\}]]\rangle^{-1} \qquad (15)\\ \mathrm{s.t.}\quad & (2a)\sim(5d)\end{aligned}$$

と定式化される分数計画問題の解として算出され、また、そこで得られた最適解を用いれば、期間効率性 $\rho_o^{t*}$、部門効率性 $\rho_{ok}^{*}$、期間－部門効率性 $\rho_{ok}^{t*}$ の値を、それぞれ、(16a)、(16b)、(16c)から求めることができる。

$$\rho_o^{t*}=\langle \sum_{k=1}^{K} w^k [1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-*}/x_{iok}^t)$$
$$+\sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t*}/z_{o(kh)_l in}^t)+\sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\}]\rangle\cdot$$
$$\langle \sum_{k=1}^{K} w^k [1+\{1/(r_k+linkout_k+ngood_k)\}\{\sum_{r=1}^{r_k}(s_{rok}^{t+*}/y_{rok}^t)$$
$$+\sum_{(kh)_l=1}^{linkout_k}(s_{o(kh)_l out}^{t*}/z_{o(kh)_l out}^t)+\sum_{k_l=1}^{ngood_k}(s_{ok_l good}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l good}^{(t,t+1)})\}]\rangle^{-1} \quad (16a)$$

$$\rho_{ok}^{*}=\langle \sum_{t=1}^{T} W^t [1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-*}/x_{iok}^t)$$
$$+\sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t*}/z_{o(kh)_l in}^t)+\sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\}]\rangle\cdot$$
$$\langle \sum_{t=1}^{T} W^t [1+\{1/(r_k+linkout_k+ngood_k)\}\{\sum_{r=1}^{r_k}(s_{rok}^{t+*}/y_{rok}^t)$$
$$+\sum_{(kh)_l=1}^{linkout_k}(s_{o(kh)_l out}^{t*}/z_{o(kh)_l out}^t)+\sum_{k_l=1}^{ngood_k}(s_{ok_l good}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l good}^{(t,t+1)})\}]\rangle^{-1} \quad (16b)$$

$$\rho_{ok}^{t*}=\langle 1-\{1/(m_k+linkin_k+nbad_k)\}\{\sum_{i=1}^{m_k}(s_{iok}^{t-*}/x_{iok}^t)$$
$$+\sum_{(kh)_l=1}^{linkin_k}(s_{o(kh)_l in}^{t*}/z_{o(kh)_l in}^t)+\sum_{k_l=1}^{nbad_k}(s_{ok_l bad}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l bad}^{(t,t+1)})\}\rangle\cdot$$
$$\langle 1+\{1/(r_k+linkout_k+ngood_k)\}\{\sum_{r=1}^{r_k}(s_{rok}^{t+*}/y_{rok}^t)$$
$$+\sum_{(kh)_l=1}^{linkout_k}(s_{o(kh)_l out}^{t*}/z_{o(kh)_l out}^t)+\sum_{k_l=1}^{ngood_k}(s_{ok_l good}^{(t,t+1)*}/z_{ok_l good}^{(t,t+1)})\}\rangle^{-1} \quad (16c)$$

さらに、このモデルについてもインプット指向型とアウトプット指向型のモデルと同様に以下のことがいえる。① $\rho_{ok}^{t*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ の部門 $k$ は期間 $t$ で効率的である。② $\rho_o^{t*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は期間 $t$ で効率的である。すなわち、$\rho_{ok}^{t*}=1$ $(k=1, \ldots, K)$。③ $\rho_{ok}^{*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は部門 $k$ で効率的である。すなわち、$\rho_{ok}^{t*}=1$ $(t=1, \ldots, T)$。④ $\rho_o^{*}=1$ ならば、$\mathrm{DMU}_o$ は全体効率的である。⑤ $\rho_o^{*}=\theta_o^{*}\cdot\tau_o^{*}$ が常に成り立つ。⑥ 最適な全体効率性の値は決定できても、期間効率性、部門効率性、期間－部門効率性の値が一意に定まらないことがある。そのときには、インプット指向型、アウトプット指向型モデルの場合と同様の方法を用いて対処することができる。

なお、無指向型 DNSBM モデルは分数計画問題として定式化されているので、その解をより効果的に求めるためには Charnes-Cooper 変換を用いて、それを線形計画問題に定式化し直す必要があることを付記しておく[9)]。

9) Charnes-Cooper 変換については、例えば、Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K. (eds.) (2007), *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software,* 2nd ed., Springer, pp. 71-73 を参照されたい。

## Ⅳ　結

以上、Tone and Tsutsui の DNSBM モデルについて概説してきたが、これは、NSBM（network slacks-based measure）モデル[10]と DSBM（dynamic slacks-based measure）モデル[11]を統合したものであり、また、非比率（non-radial）・スラック規準型であるため、①インプット値・アウトプット値を個別にかつ非比率的に変化させることができる、②インプット項目・アウトプット項目に対する加重値をそれぞれの重要度に応じて意思決定者の判断で決めることができる、③３種類のモデル―インプット指向型、アウトプット指向型、無指向型―の中から分析目的に合致したモデルを選ぶことができる、など比較的多くの部分が分析者の裁量に委ねられている。したがって、適用範囲も広く実用的であると考えられる。一方、Kao は、事業体内部のネットワーク構造を取り扱うことができるネットワーク型 DEA モデル[12]と事業体の時系列的行動を分析するための動態的 DEA モデル[13]をそれぞれ個別に提示しているが、それらを結合した非比率型とは異なる比率型（radial）モデルについても新たに考察する必要がある。また、数多くの現実データを用いた分析を行うことによって、この比率型モデルを既述の DNSBM モデルと比較・検討することが求められる。これらが今後に残された課題である。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

### 主要参考文献

［１］ Aghayi, N., Gholami, K., Beigi, Z. G., Lotfi, F. H.（2014）, Measuring performance of dynamic and network structures by SBM model, In：Osman, I. H., Anouze, A. L., Emrouznejad,

10）Tone, K., Tsutsui, M.（2009）, Network DEA：A slacks-based measure approach, *European Journal of Operational Research,* 197, pp. 243-252.

11）Tone, K., Tsutsui, M.（2010）, Dynamic DEA：A slacks-based measure approach, *Omega,* 38, pp. 145-156.

12）Kao, C.（2009）, Efficiency decomposition in network data envelopment analysis：A relational model, *European Journal of Operational Research,* 192, pp. 949-962.

13）Kao, C.（2013）, Dynamic data envelopment analysis：A relational analysis, *European Journal of Operational Research,* 227, pp. 325-330.

A. (eds.), *Handbook of Research on Strategic Performance Management and Measurement Using Data Envelopment Analysis,* IGI, pp. 527-558.

[2] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K. (eds.) (2007), *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software,* 2nd ed., Springer.

[3] Kao, C. (2009), Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model, *European Journal of Operational Research,* 192, pp. 949-962.

[4] Kao, C. (2013), Dynamic data envelopment analysis: A relational analysis, *European Journal of Operational Research,* 227, pp. 325-330.

[5] Kao, C. (2016), *Network Data Envelopment Analysis-Foundations and Extensions-,* Springer.

[6] Tone, K. (2011), Slacks-based measure of efficiency, In: Cooper, W. W., Seiford, L. M., Zhu, J. (eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis,* 2nd ed., Springer, pp. 195-209.

[7] Tone, K., Tsutsui, M. (2009), Network DEA: A slacks-based measure approach, *European Journal of Operational Research,* 197, pp. 243-252.

[8] Tone, K., Tsutsui, M. (2010), Dynamic DEA: A slacks-based measure approach, *Omega,* 38, pp. 145-156.

[9] Tone, K., Tsutsui, M. (2014), Dynamic DEA with network structure: A slacks-based measure approach, *Omega,* 42, pp. 124-131.