

実行可能型一般化リッジ回帰推定量の 正確なモーメントの数値評価

Numerical Evaluations for Exact Moments
of Feasible Generalized Ridge Regression Estimator

地道 正行 (関西学院大学 商学部)

Abstract. In this paper, we treat the exact first and second moments of a feasible generalized ridge regression estimator and numerically evaluate them. We also treat the cross-moment of the estimators and use a numerical integration method of good lattice points to calculate it under a grid computing system.

Key words: Linear regression model, multicollinearity, ordinary least square estimator, feasible generalized ridge regression estimator, method of good lattice points, grid computing

1 はじめに

線形回帰モデルにおける説明変数行列の列ベクトル間に多重共線性 (multicollinearity) が存在することによって、回帰係数ベクトルに対する通常最小自乗 (Ordinary Least Square; OLS) 推定量の分散が発散することから、その推定精度に関する問題が発生する可能性があることが指摘されてきた。この問題に対して、OLS 推定量のかわりに一般化リッジ回帰 (Generalized Ridge Regression; GRR) 推定量が Hoerl & Kennard (1970) によって提案された。この GRR 推定量を実際に使用するときは、ある種の係数 (リッジ係数とよばれる。) を決定する必要があり、いくつかのアルゴリズムが提案されている。この決定されたリッジ係数を GRR 推定量の適切な箇所にプラグ・インしたものは、実行可能型一般化リッジ回帰 (Feasible GRR; FGRR) 推定量とよばれる。ここで、GRR 推定量のモーメントは比較的簡単に求めることができるのに対して、FGRR 推定量の正確なモーメントを求めることは困難であるという問題がある。これは、リッジ係数を決定するためのアルゴリズムがいくつかの確率変数に依存していることによる。この問題を扱った研究はそれほど多くなく、Dwivedi, Srivastava & Hall (1980) と Srivastava & Chaturvedi (1983) は先駆的な仕事といえる¹。本稿では、FGRR 推定量の正確なモーメントを数値評価することを目的とし、構成は以下のようである。まず 2 節では、モデルと推定量について述べ、次に 3 節では FGRR 推定量の 1, 2 次モーメントとクロスモーメントの具体的表現を与える。また、それらの数値評価を 4 節で行い、最後に 5 節で結論と展望を述べる。

¹Ohtani (1993) では FGRR 推定量の周辺密度関数と周辺分布関数が与えられている。Inoue (1999) もまた参照されたい。

2 モデルと推定量

以下の線形回帰モデルを考える:

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (1)$$

ここで、 Y は $n \times 1$ の応答変数ベクトルであり、 $X := [1, X_p]$ は $n \times (p+1)$ の説明変数行列とし、フルランク ($\text{rank}(X) = p+1$) と仮定する。なお、 $X_p'X_p$ が相関形式となるように標準化されているものとする。 $1 = [1, \dots, 1]' \in \mathbb{R}^n$, $X_p'1 = 0$ に注意しよう。また “'” はベクトル、行列の転置を表すものとする。次に、 $\beta := [\beta_0, \beta_p]'$ は未知の $(p+1)$ 次元回帰係数ベクトルであり、 β_0 は切片項とする。さらに ε は n 次元誤差ベクトルとし、 n 次元標準正規分布 $N(0, \sigma^2 I_n)$ に従うものとする。ここで、 n 次元ゼロベクトルを 0 で表し、 n 次元単位行列を I_n で表すものとする。なお、 σ^2 は未知の誤差分散である。

GRR 推定量に関して考察する際は、通常以下のような正準形式のモデル (1) が採用される:

$$Y = A\alpha + \varepsilon \quad (2)$$

なお、このようなモデルに変換することは、一般性を失うことなくいつでも行うことができることに注意しよう。ここで、

$$A := X\Gamma, \quad \alpha := \Gamma'\beta$$

であり、 Γ は、 $\Gamma'X'X\Gamma = \Lambda = \text{diag}(n, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ (対角行列) とする $(p+1)$ 次直交行列である。

$$X'X = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & X_p'X_p \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma_p \end{bmatrix}$$

に注意しよう。また、 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p (> 0)$ は、行列 $X_p'X_p$ の固有値であり、 $\Gamma_p := [\gamma_1, \dots, \gamma_p]$ は、 $\Gamma_p'X_p'X_p\Gamma_p = \Lambda_p = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ とする p 次直交行列である。ここで、

$$A := [a_0, a_1, \dots, a_p] := [1, X_p\gamma_1, \dots, X_p\gamma_p] = X\Gamma$$

であり、列ベクトル a_i ($i = 1, \dots, p$) は主成分 (principal component) とよばれる。

正準形式 (2) における回帰係数ベクトル α_p に対する OLS 推定量は、

$$\hat{\alpha}_p := \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p \end{bmatrix} := (A_p'A_p)^{-1} A_p'Y = \Lambda_p^{-1} A_p'Y = \begin{bmatrix} \frac{a_1'Y}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{a_p'Y}{\lambda_p} \end{bmatrix} \quad (3)$$

で定義される。OLS 推定量 $\hat{\alpha}_p$ は、誤差に関する仮定 $\varepsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ のもとで、 p 次元正規分布 $N_p(\alpha_p, \sigma^2 \Lambda_p^{-1})$ に従い、よって、その成分は互いに独立に $\hat{\alpha}_i \sim N(\alpha_i, \sigma^2/\lambda_i)$, $i = 1, \dots, p$ である。

回帰係数ベクトル α_p に対する GRR 推定量は、

$$\hat{\alpha}_p(K_p) := \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1(k_1) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p(k_p) \end{bmatrix} := (A_p'A_p + K_p)^{-1} A_p'Y = (\Lambda_p + K_p)^{-1} A_p'Y = \begin{bmatrix} \frac{a_1'Y}{\lambda_1 + k_1} \\ \vdots \\ \frac{a_p'Y}{\lambda_p + k_p} \end{bmatrix} \quad (4)$$

で定義される。ここで、 $\mathbf{K}_p := \text{diag}(k_1, \dots, k_p)$ であり、 $k_i, i = 1, \dots, p$ は非負の係数 (リッジ係数) である。GRR 推定量 $\hat{\alpha}_p(\mathbf{K}_p)$ は、 p 次元正規分布;

$$N_p((\Lambda_p + \mathbf{K}_p)^{-1} \Lambda_p \alpha_p, \sigma^2 (\Lambda_p + \mathbf{K}_p)^{-1} \Lambda_p (\Lambda_p + \mathbf{K}_p)^{-1})$$

に従い、よって、その成分は互いに独立に以下の分布に従う:

$$\hat{\alpha}_i(k_i) \sim N\left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k_i)} \alpha_i, \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k_i)^2} \sigma^2\right), \quad i = 1, \dots, p$$

回帰係数 α_i に対する GRR 推定量 $\hat{\alpha}_i(k_i)$ は正の係数 k_i を含んでおり、何らかの方法で決定しなければならない。この係数を選択するための標準的なアルゴリズムは、 $k_i = \sigma^2 / \alpha_i^2 =: k_i^*$ であり、これは平均 2 乗誤差

$$\begin{aligned} \rho_i(k_i) &:= \text{MSE}(\hat{\alpha}_i(k_i)) := E(\hat{\alpha}_i(k_i) - \alpha_i)^2 \\ &= V(\hat{\alpha}_i(k_i)) + \text{bias}(\hat{\alpha}_i(k_i))^2 \\ &= \frac{\lambda_i \sigma^2}{(\lambda_i + k_i)^2} + \frac{k_i^2 \alpha_i^2}{(\lambda_i + k_i)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

を最小にする。すなわち、

$$k_i^* = \arg \min_{k_i > 0} \rho_i(k_i)$$

である。このアルゴリズムは、未知母数 α_i, σ^2 に依存しているので、実際に使用する際には何からの推定量で置き換える必要がある。この推定量としては、 $\hat{\alpha}_i$ (α_i の OLS 推定量) と $\hat{\sigma}^2 := \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\alpha}\|^2 / (n - p - 1)$ (σ^2 の不偏推定量) が通常は利用され、よって $\hat{k}_i^* := \hat{\sigma}^2 / \hat{\alpha}_i^2$ が k_i のかわりに利用される。 $k_i = \hat{k}_i^*$ が GRR 推定量 $\hat{\alpha}_i(k_i)$ に差し込まれた (plug-in) とき、実行可能型一般化リッジ回帰 (Feasible GRR; FGRR) 推定量といわれ、 α_p に対する FGRR 推定量の定義は以下のように与えられる:

$$\hat{\alpha}_p^* := \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1^* \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p^* \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1(\hat{k}_1^*) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p(\hat{k}_p^*) \end{bmatrix} = \hat{\alpha}_p(\hat{\mathbf{K}}_p^*) = (\Lambda_p + \hat{\mathbf{K}}_p^*)^{-1} \mathbf{A}'_p \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{a}'_1 \mathbf{Y}}{\lambda_1 + \hat{k}_1^*} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{a}'_p \mathbf{Y}}{\lambda_p + \hat{k}_p^*} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{K}}_p^* := \text{diag}(\hat{k}_1^*, \dots, \hat{k}_p^*)$ であり、FGRR 推定量 $\hat{\alpha}_i^*, i = 1, \dots, p$ は正規分布に従わず、さらに互いに独立でもないことに注意しよう。

3 モーメント

まずはじめに、FGRR 推定量 $\hat{\alpha}_i^*$ は OLS 推定量 $\hat{\alpha}_i$ を (原点方向に) 縮小させたものであることが、以下のことによってわかることに注意しよう:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_p^* &= (\Lambda_p + \hat{\mathbf{K}}_p^*)^{-1} \Lambda_p \Lambda_p^{-1} \mathbf{A}'_p \mathbf{Y} = (\mathbf{I}_p + \Lambda_p^{-1} \hat{\mathbf{K}}_p^*)^{-1} \hat{\alpha}_p \\ \iff \hat{\alpha}_i^* &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \hat{k}_i^*} \hat{\alpha}_i, \quad \left(0 < \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \hat{k}_i^*} < 1\right) \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

ここで, $\varepsilon \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ であることから,

$$\hat{\alpha}_p \sim N(\alpha_p, \sigma^2 \Lambda_p^{-1}) \iff \hat{\alpha}_i \stackrel{\text{ind.}}{\sim} N\left(\alpha_i, \frac{\sigma^2}{\lambda_i}\right), i = 1, \dots, p$$

が成り立つことに注意しよう. ただし, “ $X_i \stackrel{\text{ind.}}{\sim} F_i$ ” ($i = 1, \dots, n$) は X_i が独立に分布 F_i に従うことを表している.

もし,

$$Z_i := \frac{\hat{\alpha}_i}{\sigma_{\hat{\alpha}_i}} \stackrel{\text{ind.}}{\sim} N(\tau_i, 1), i = 1, \dots, p, \quad V := \frac{\nu \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_\nu^2$$

なる確率変数を定義すると, $Z_i \perp\!\!\!\perp V$ (独立) となり, FGRR 推定量は以下のように表現できる:

$$\hat{\alpha}_i^* = \sigma_{\hat{\alpha}_i} \frac{Z_i^2}{Z_i^2 + V/\nu} Z_i \quad (7)$$

ここで, $\nu := n - p - 1$ は自由度であり,

$$\sigma_{\hat{\alpha}_i} := \sqrt{V(\hat{\alpha}_i)} = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_i}}; \quad \text{標準誤差}, \quad \tau_i := \frac{\alpha_i}{\sigma_{\hat{\alpha}_i}} = \frac{\alpha_i}{\sigma/\sqrt{\lambda_i}}; \quad \text{非心母数} \quad (8)$$

とおいた.

3.1 1, 2 次モーメント

FGRR 推定量のモーメントが存在することは単独に証明されるけれども, もしそれらを具体的に計算したいとすれば, 別途考える必要がある. Dwivedi, Srivastava & Hall (1980) では, 1, 2 次モーメントを以下のように与えている:

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}_i^*) &= \sigma_{\hat{\alpha}_i} \tau_i \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\ell \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B(\ell + \frac{\nu}{2}, m + \frac{5}{2})}{B(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2})} p(m; \tau_i^2/2) \\ &= \alpha_i \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\ell \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B(\ell + \frac{\nu}{2}, m + \frac{5}{2})}{B(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2})} p(m; \delta_i), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}_i^{*2}) &= \sigma_{\hat{\alpha}_i}^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\ell \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{B(\ell + \frac{\nu}{2}, m + \frac{7}{2})}{B(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2})} p(m; \tau_i^2/2) \\ &= \alpha_i^2 \frac{1}{2\delta_i} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\ell \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{B(\ell + \frac{\nu}{2}, m + \frac{7}{2})}{B(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2})} p(m; \delta_i) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, $\delta_i := \tau_i^2/2$ は非心母数 (non-centrality parameter) であり, $B(\cdot, \cdot)$ は, 以下で定義されるベータ関数 (beta function) である:

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (11)$$

ベータ関数とガンマ関数:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (12)$$

の間に

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (13)$$

なる関係が成り立つことに注意しよう. また, $p(m; \delta_i)$ はポアソン分布 $P_o(\delta_i)$ の確率関数である:

$$p(m; \delta_i) := \frac{\delta_i^m}{m!} e^{-\delta_i} \quad (14)$$

3.2 クロスモーメント

FGRR 推定量 $\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j$ ($i \neq j$) のクロスモーメントは, 地道 (2006) で以下のように与えられている:

$$E(\hat{\alpha}_i^* \hat{\alpha}_j^*) = \alpha_i \alpha_j \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\ell_1+\ell_2} \times \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_{\ell_1+1, \ell_2+1} \left(m_1 + \frac{5}{2}, m_2 + \frac{5}{2}, \ell_1 + \ell_2 + \frac{\nu}{2}\right)}{B\left(m_1 + \frac{3}{2}, m_2 + \frac{3}{2}, \frac{\nu}{2}\right)} p(m_1; \delta_i) p(m_2; \delta_j) \quad (15)$$

ここで,

$$B\left(m_1 + \frac{3}{2}, m_2 + \frac{3}{2}, \frac{\nu}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(m_1 + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(m_2 + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(m_1 + m_2 + 3 + \frac{\nu}{2}\right)}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_{\ell_1+1, \ell_2+1} \left(m_1 + \frac{5}{2}, m_2 + \frac{5}{2}, \ell_1 + \ell_2 + \frac{\nu}{2}\right) \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(1-t_1)^{\ell_2+1}} \frac{1}{(1-t_2)^{\ell_1+1}} t_1^{m_1+\frac{5}{2}-1} t_2^{m_2+\frac{5}{2}-1} (1-t_1-t_2)^{\ell_1+\ell_2+\frac{\nu}{2}-1} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (17)$$

であり, 領域 $\mathcal{D} := \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 > 0, t_1 + t_2 < 1\}$ は単体 (simplex) である.

注意 3.1. 1, 2 次モーメントに関する表現 (9), (10) を求める際に, 無限和と積分の順序交換が必要になる. このことに関する正当性 (妥当性) やこれらのモーメントの有界性の証明は, Jimichi (2005) または地道 (2006) で与えられていることに注意しよう. また, これらの文献ではクロスモーメント (15) に関する正当性と有界性についても詳しく論じられていることにも注意しよう.

4 数値評価

4.1 1, 2 次モーメント

現在のコンピュータ環境においては, 1, 2 次モーメントにおける級数 $\mu_1(\delta_i, \nu), \mu_2(\delta_i, \nu)$ を直接計算することはそれほど難しい問題ではない². これらの級数を数値的に評価するためには, 以下の有限級数を利用する:

$$\mu_1(L, M, \delta_i, \nu) := \sum_{\ell=0}^L \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^M \frac{B\left(\ell + \frac{\nu}{2}, m + \frac{5}{2}\right)}{B\left(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2}\right)} p(m; \delta_i), \quad (18)$$

$$\mu_2(L, M, \delta_i, \nu) := \frac{1}{2\delta_i} \sum_{\ell=0}^L (\ell+1) \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\ell} \sum_{m=0}^M (2m+1) \frac{B\left(\ell + \frac{\nu}{2}, m + \frac{7}{2}\right)}{B\left(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2}\right)} p(m; \delta_i) \quad (19)$$

この有限級数を計算するとき, ベータ関数の比に関するある種の漸化式を用いることによって計算を加速化することが可能である. たとえば, $\mu_1(L, M, \delta_i, \nu)$ の計算を行うときには, 以下のような漸化式を利用する:

$$\begin{aligned} \frac{B\left(\ell + 1 + \frac{\nu}{2}, m + \frac{5}{2}\right)}{B\left(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2}\right)} &= \frac{\ell + \frac{\nu}{2}}{\ell + m + \frac{\nu+5}{2}} \frac{B\left(\ell + \frac{\nu}{2}, m + \frac{5}{2}\right)}{B\left(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2}\right)}, \\ \frac{B\left(\ell + \frac{\nu}{2}, (m+1) + \frac{5}{2}\right)}{B\left(\frac{\nu}{2}, (m+1) + \frac{3}{2}\right)} &= \frac{\left(m + \frac{5}{2}\right) \left(m + \frac{\nu+3}{2}\right)}{\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \left(\ell + m + \frac{\nu+5}{2}\right)} \frac{B\left(\ell + \frac{\nu}{2}, m + \frac{5}{2}\right)}{B\left(\frac{\nu}{2}, m + \frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

²ここでは, Windows (Windows XP) または Linux (Vine Linux 3.1) 上の Maple バージョン 10 と R バージョン 2.3.1 の両方を利用して結果のチェックを行っている.

図1は、 $(\delta_i, \nu) = (50, 100)$ の場合の $L = M = 1, \dots, 100$ に対する $\mu_1(L, M, \delta_i, \nu)$ と $\mu_2(L, M, \delta_i, \nu)$ の値のプロットである。いずれの有限級数も上に有界であり、正項級数であることから単調増加である。さらに、この図より上限へ達していることが確認でき、収束していることがわかる。なお、数値的に調べると $\mu_1(L, M, 50, 100)$ は $L = M \geq 90$ に対して 0.9900042 という値に収束している。同様に、 $L = M \geq 92$ のとき、 $\mu_2(L, M, 50, 100) = 0.9903110$ であることがわかる。

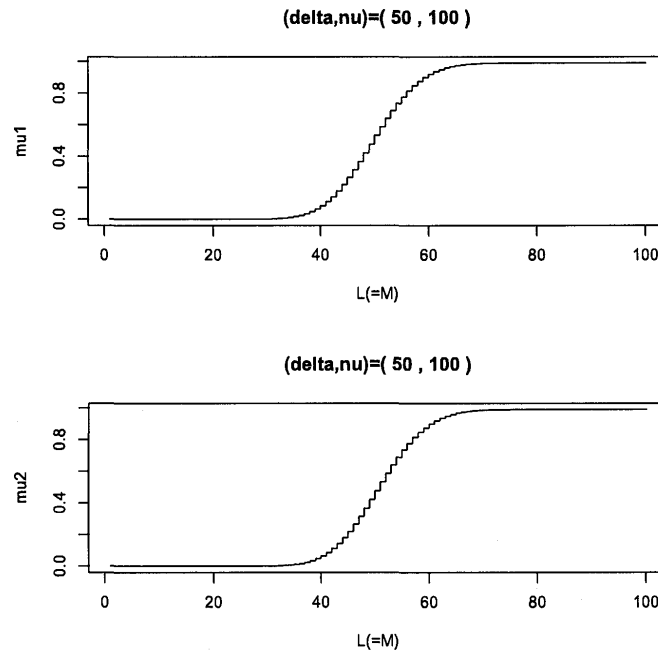


図1: $L(=M) = 1, \dots, 100$ に対する $\mu_1(L, M, \delta_i, \nu)$ と $\mu_2(L, M, \delta_i, \nu)$ のプロット: $(\delta_i, \nu) = (50, 100)$ のとき

注意 4.1. Dwivedi, Srivastava & Hall (1980) においても、1, 2 次モーメントの数値計算にもとづいて、平均 2 乗誤差に関する基準の数値計算を行っているけれども、当時の計算環境の限界³によるものと思われる理由から十分な精度が得られていない。なお、具体的な計算結果に関しては Jimichi (1999) を参照されたい。

4.2 クロスモーメント

クロスモーメント (15) の計算は、以下で与えられる級数を求めることと本質的に同じである:

$$\mu_{11}(\delta_i, \delta_j, \nu) := \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \left(\frac{\nu-1}{\nu} \right)^{\ell_1+\ell_2} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \mathcal{K}(\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu) p(m_1; \delta_i) p(m_2; \delta_j) \quad (20)$$

ただし、

$$\mathcal{K}(\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu) := \frac{B_{\ell_1+1, \ell_2+1} \left(m_1 + \frac{5}{2}, m_2 + \frac{5}{2}, \ell_1 + \ell_2 + \frac{\nu}{2} \right)}{B \left(m_1 + \frac{3}{2}, m_2 + \frac{3}{2}, \frac{\nu}{2} \right)} \quad (21)$$

³この理由としては、当時のガンマ関数に関する計算精度の限界に依存するものと思われる。

である。この級数を数値的に評価するときは、以下の有限級数を利用する：

$$\mu_{11}(L_1, L_2, M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu) := \sum_{\ell_1=0}^{L_1} \sum_{\ell_2=0}^{L_2} \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\ell_1+\ell_2} Q(\ell_1, \ell_2; M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu) \quad (22)$$

ここで、

$$Q(\ell_1, \ell_2; M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu) := \sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} \mathcal{X}(\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu) p(m_1; \delta_i) p(m_2; \delta_j) \quad (23)$$

とおいた。以下に上で定義された有限級数の評価を考える。

まずはじめに、ベータ関数の性質 (13) と (16) 式から以下のことが成り立つことに注意しよう：

$$B\left(m_1 + \frac{3}{2}, m_2 + \frac{3}{2}, \frac{\nu}{2}\right) = B\left(m_1 + \frac{3}{2}, m_2 + \frac{3}{2}\right) B\left(m_1 + m_2 + 3, \frac{\nu}{2}\right)$$

従って、(21) 式における $B\left(m_1 + \frac{3}{2}, m_2 + \frac{3}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ は通常のベータ関数を使って計算することができる。

次に、 $B_{\ell_1+1, \ell_2+1}\left(m_1 + \frac{5}{2}, m_2 + \frac{5}{2}, \ell_1 + \ell_2 + \frac{\nu}{2}\right)$ の数値評価を考察しよう。数値積分のための方法は数多くあるけれども、ここでは優良格子点法⁴ (method of good lattice points; GLP) を使って、 $B_{\ell_1+1, \ell_2+1}\left(m_1 + \frac{5}{2}, m_2 + \frac{5}{2}, \ell_1 + \ell_2 + \frac{\nu}{2}\right)$ における被積分関数

$$f_{\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu}(t_1, t_2) := \frac{1}{(1-t_1)^{\ell_2+1}} \frac{1}{(1-t_2)^{\ell_1+1}} t_1^{m_1+\frac{5}{2}-1} t_2^{m_2+\frac{5}{2}-1} (1-t_1-t_2)^{\ell_1+\ell_2+\frac{\nu}{2}-1}$$

を領域 \mathcal{D} 上で数値積分することを考える⁵。通常の GLP 法を用いた近似式は以下で与えられる：

$$B_{m_1, m_2}(N) := B_{m_1, m_2}(N; \ell_1, \ell_2, \nu) := \frac{1}{N} \sum_{k \in K} f_{\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu} \left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\}, \left\{ \frac{g_2^{(N)}}{N} k \right\} \right) \quad (24)$$

ここで、

$$N = F_n, \quad g_1^{(N)} = 1, \quad g_2^{(N)} = F_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

であり⁶、 F_n は以下によって定義される Fibonacci 数列である：

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Appendix A の表 2 に $n = 2, 3, \dots, 25$ に対する、 $N, g_1^{(N)}, g_2^{(N)}$ の値を与えているので参考にされたい。また、 $\{x\}$ は x の小数部分を表す記号であり、 $K \subset \{0, 1, \dots, N-1\}$ は、

$$\left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\}, \left\{ \frac{g_2^{(N)}}{N} k \right\} \right) \in \mathcal{D} = \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 > 0, t_1 + t_2 < 1\}$$

となるような添字集合である⁷。なお、 $n = 10, 15, 20, 25$ のときの単体 \mathcal{D} における優良格子点 $\left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\}, \left\{ \frac{g_2^{(N)}}{N} k \right\} \right)$ が図 2 で与えられるので併せて参照されたい。 $\ell_1, \ell_2 = 0, 10, 20, m_1, m_2 =$

⁴優良格子点法に関する簡単な説明を Appendix A に与えており、詳細な解説については、たとえば、杉原、室田 (1994) を参照されたい。

⁵Appendix B の図 8 に、 $\nu = 5$ で $\ell_1 = \ell_2 = 0, m_1, m_2 = 0, 10, 20$ と変化させたときの関数 $f_{\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu}(t_1, t_2)$ の 3 次元プロットを与えており、図 9 に、 $\nu = 5$ で $\ell_1 = \ell_2 = \ell = 0, 10, 20, m_1 = m_2 = m = 0, 10, 20$ と変化させたときの 3 次元プロットを与えているのであわせて参照されたい。

⁶ n はデータ数ではないことに注意しよう。

⁷ k, K はリッジ係数ではないことに注意しよう。

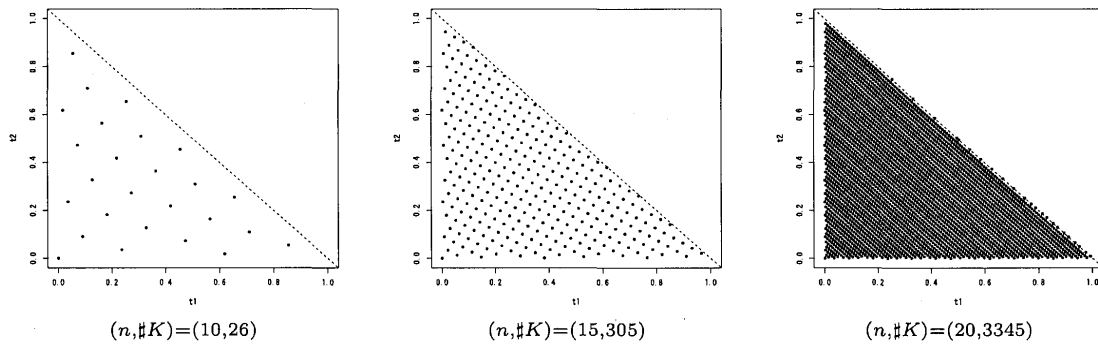


図 2: 単体 \mathcal{D} 上の優良格子点 $\left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\}, \left\{ \frac{g_2^{(N)}}{N} k \right\} \right)$

0, 10, 20, $\nu = 5$ の場合の $B_{\ell_1+1, \ell_2+1}(m_1 + \frac{5}{2}, m_2 + \frac{5}{2}, \ell_1 + \ell_2 + \frac{\nu}{2})$ の数値積分を GLP 法によって実行した結果を与える. まず, Appendix B の 図 10 は, $(\ell_1, \ell_2) = (0, 0)$ で固定し, $m_1, m_2 = 0, 10, 20$ と変化させたときの $n = 10, \dots, 25$ に対する $B_{m_1, m_2}(N)$ のプロットを表している. この図から, どの場合も $n \geq 17$ に対してほぼ収束していることがわかる. ここで考えているパターンのうち, ほとんどのものは $n = 17$ ($N = 1597$) とすることによって $B_{m_1, m_2}(N)$ の値は収束しているものとみなしても問題ないけれども, たとえば, $(\ell_1, \ell_2) = (20, 0), (m_1, m_2) = (0, 20)$ で固定したときは $n = 19$ ($N = 4181$) とした方がよい. (図 3 参照.)

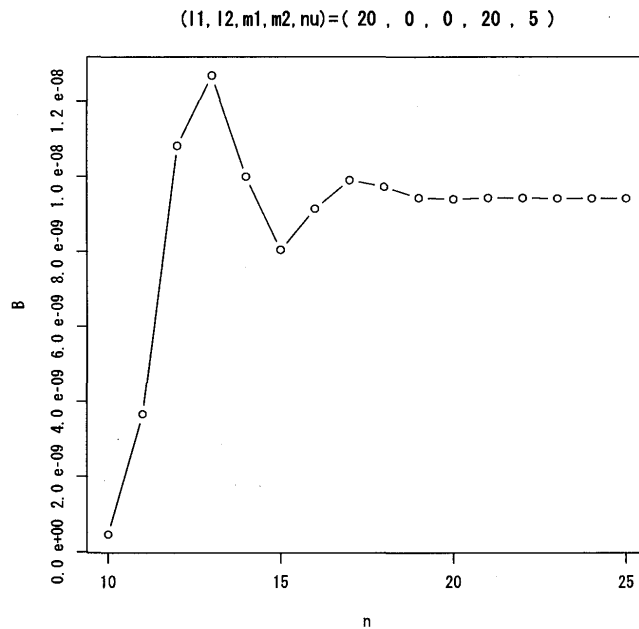


図 3: 近似 $B_{m_1, m_2}(N)$ の $n = 10, \dots, 25$ の値に対するプロット: $(\ell_1, \ell_2) = (20, 0), (m_1, m_2) = (0, 20), \nu = 5$ の場合

次に, (21) 式で定義される関数 $\mathcal{K}(\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu)$ を近似式 $B_{m_1, m_2}(N)$ を使って,

$$K_{m_1, m_2}(N) := K_{m_1, m_2}(N; \ell_1, \ell_2, \nu) := \frac{B_{m_1, m_2}(N)}{B\left(m_1 + \frac{3}{2}, m_2 + \frac{3}{2}, \frac{\nu}{2}\right)} \quad (25)$$

で近似することを考えよう. Appendix B の図 11 は $(\ell_1, \ell_2) = (0, 0)$ で固定し, $m_1, m_2 = 0, 10, 20$ と変化させたときの $n = 10, \dots, 25$ に対する $K_{m_1, m_2}(N)$ のプロットを表している. この図から, $K_{m_1, m_2}(N)$ と $B_{m_1, m_2}(N)$ の挙動がほぼ同じことがわかり, このことは $(\ell_1, \ell_2), (m_1, m_2)$ の他のパターンについても同様であることがわかる. よって, $n = 19$ ($N = 4181$) とすることによって $K_{m_1, m_2}(N)$ の精度は十分である.

さらに, (23) 式で定義される関数 $\mathcal{Q}(\ell_1, \ell_2; M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu)$ を $K_{m_1, m_2}(N)$ を使って以下のもの
で近似する:

$$Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2) := Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2; N, \delta_i, \delta_j, \nu) := \sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} K_{m_1, m_2}(N) p(m_1; \delta_i) p(m_2; \delta_j) \quad (26)$$

ここで, $Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2; N, \delta_i, \delta_j, \nu)$ は, 一種の「2 次形式」であり, $M_1, M_2 \rightarrow \infty$ としたときの収束は, ポアソン分布 $P_o(\delta_i)$ の確率関数 $p(m_1; \delta_i), p(m_2; \delta_j)$ の性質, 特に (δ_i, δ_j) の値に依存している. たとえば, $\delta_i = \delta_j = 1$ のときの確率関数 $p(m_1; \delta_i), p(m_2; \delta_j)$ は, 比較的小さな m_1, m_2 の値 (およそ 7 以上) で確率が急激に減少するため (図 4 の左のプロット参照.), 比較的小さな M_1, M_2 の値に対して 2 次形式 $Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2; N, \delta_i, \delta_j, \nu)$ も収束することが予想される.

一方, $\delta_i = \delta_j = 50$ のときの確率関数のプロット (図 4 の右のプロット参照.) をみるとわかるように, $\delta_i = \delta_j = 1$ の場合と比べて m_1, m_2 の大きな値 (およそ 50 付近) で確率が存在し, これより比較的大きな M_1, M_2 の値に対する評価が必要になる. これは, $\mu_{11}(L_1, L_2, M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu)$ の評価全体に必要な計算量を増加させることになり, 多大な計算能力が要求されることになる. 従って, ここでは, $\delta_i = \delta_j = 1$ という特別な場合に対して $Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2; N, \delta_i, \delta_j, \nu)$ の収束性を考える.

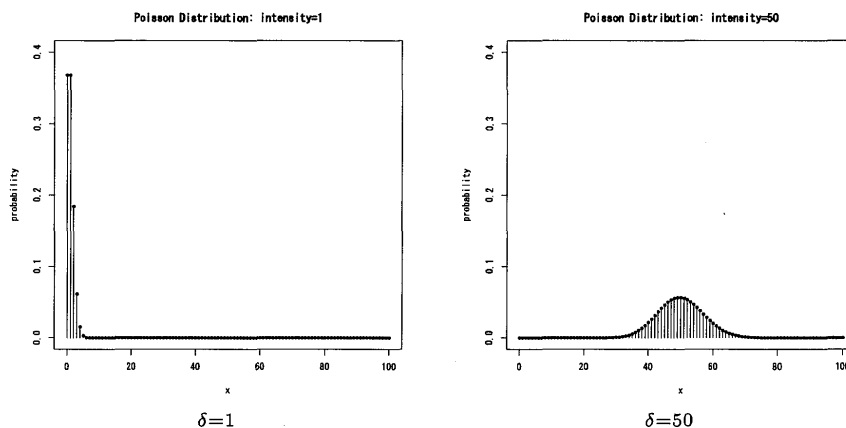


図 4: ポアソン分布 $P_o(\delta)$ の確率関数のプロット

Appendix B の図 12 は, $n = 19$ ($N = 4181$), $\ell_1, \ell_2 = 0, 10, 20$, $\delta_i = \delta_j = 1$, $\nu = 5$ で固定した場合の M ($:= M_1 = M_2$) $= 0, \dots, 20$ の値に対する近似 $Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2; N, \delta_i, \delta_j, \nu)$ のプロットである. この図から ℓ_1, ℓ_2 のすべての場合に対して, $M := M_1 = M_2 = 5$ 程度で収束していることがわかり, 数値的には $M \geq 11$ で小数点以下 8 桁の精度が保証されていることがわかる. (表 1 も参照されたい.)

表 1: $n = 19$ ($N = 4181$), $\ell_1, \ell_2 = 0, 10, 20$, $\delta_i = \delta_j = 1$, $\nu = 5$ の場合の M ($:= M_1 = M_2$) = $0, \dots, 20$ の値に対する近似 $Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2) := Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2; N, \delta_i, \delta_j, \nu)$ の値

M	$Q_{0,0}(M, M)$	$Q_{0,10}(M, M)$	$Q_{0,20}(M, M)$
0	0.02146937	0.00043979	0.00010248
1	0.11402933	0.00147042	0.00030360
2	0.20052074	0.00210082	0.00042034
3	0.23804520	0.00232401	0.00046265
4	0.24855265	0.00238239	0.00047403
5	0.25077728	0.00239459	0.00047644
6	0.25116164	0.00239671	0.00047687
7	0.25121803	0.00239703	0.00047693
8	0.25122523	0.00239707	0.00047694
9	0.25122605	.	.
10	0.25122613	.	.
11	0.25122614	.	.
⋮	⋮	⋮	⋮
20	0.25122614	0.00239707	0.00047694
M	$Q_{10,0}(M, M)$	$Q_{10,10}(M, M)$	$Q_{10,20}(M, M)$
0	0.00043978	0.00001977	0.00000513
1	0.00147040	0.00004514	0.00001030
2	0.00210078	0.00005303	0.00001162
3	0.00232396	0.00005441	0.00001183
4	0.00238233	0.00005459	0.00001185
5	0.00239454	0.00005461	0.00001186
6	0.00239666	.	.
7	0.00239697	.	.
8	0.00239701	.	.
⋮	⋮	⋮	⋮
20	0.00239701	0.00005461	0.00001186
M	$Q_{20,0}(M, M)$	$Q_{20,10}(M, M)$	$Q_{20,20}(M, M)$
0	0.00010248	0.00000513	0.00000136
1	0.00030361	0.00001030	0.00000239
2	0.00042034	0.00001162	0.00000259
3	0.00046265	0.00001183	0.00000261
4	0.00047403	0.00001185	.
5	0.00047644	0.00001186	.
6	0.00047687	.	.
7	0.00047693	.	.
8	0.00047694	.	.
⋮	⋮	⋮	⋮
20	0.00047694	0.00001186	0.00000261

以上の準備のもとで、級数 $\mu_{11}(L_1, L_2, M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu)$ の数値評価を考える。定義 (22) 式における $Q(\ell_1, \ell_2; M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu)$ を $Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2; N, \delta_i, \delta_j, \nu)$ で置き換えた

$$\mathcal{M}_{11}(L_1, L_2, M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu) := \sum_{\ell_1=0}^{L_1} \sum_{\ell_2=0}^{L_2} \left(\frac{\nu-1}{\nu} \right)^{\ell_1+\ell_2} Q_{\ell_1, \ell_2}(M_1, M_2; N, \delta_i, \delta_j, \nu) \quad (27)$$

で $\mu_{11}(L_1, L_2, M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu)$ を近似する。この近似式において $L = L_1 = L_2 = 0, 1, \dots, 25$ と変化させたときのプロットは、図 5 のようになる。この級数は、1, 2 次モーメントに関する級数同様、上に有界な単調増加級数であり、この図より上限へ達していることが確認でき、収束しているこ

とがわかる．なお、実際の収束値は $L_1 = L_2 \geq 22$ に対して以下のようになる：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11}(L_1, L_2, M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu) &= \mathcal{M}_{11}(L_1, L_2, 11, 11, 1, 1, 5) \\ &= 0.6100 = \mu_{11}(L_1, L_2, 11, 11, 1, 1, 5) \end{aligned} \quad (28)$$

なお、 $\mu_{11}(L_1, L_2, M_1, M_2, 1, 1, 5)$ の計算を (28) 式では $M_1 = M_2 = 11$ で評価したが、実際には $M_1 = M_2 = 10$ としても小数点以下 8 桁の数値は一致することに注意しよう．また、このクロスモーメントの数値計算において、グリッドシステム (Globus Toolkit 3.2) 上のプログラミング環境である LAM/MPI, Rmpi そして R を利用した．

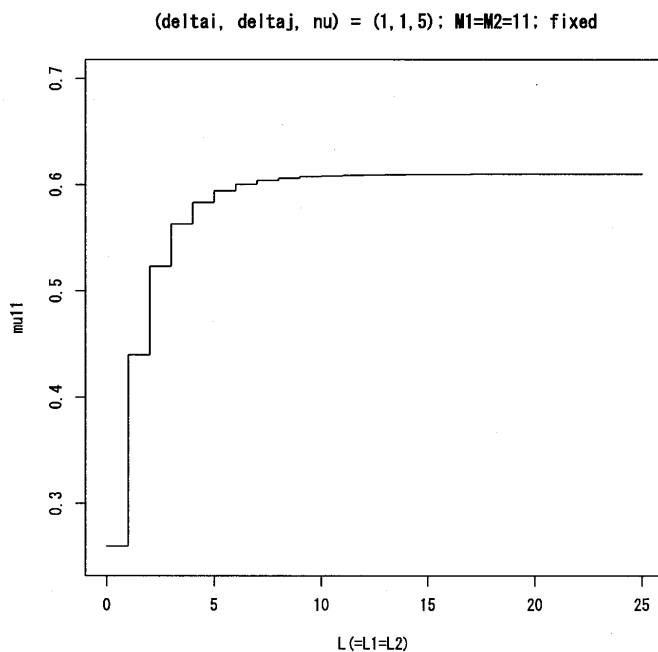


図 5: $L = (L_1 = L_2) = 0, \dots, 25$ に対する $\mathcal{M}_{11}(L_1, L_2, M_1, M_2, \delta_i, \delta_j, \nu)$ のプロット; $(\delta_i, \delta_j, \nu) = (1, 1, 5)$ とし、 $M_1 = M_2 = 11$ で固定されているものとする．

注意 4.2. Jimichi (2005) では、以下のような近似式で $\mathcal{B}_{\ell_1+1, \ell_2+1}$ の数値計算を行っている：

$$B'_{m_1, m_2}(N) := \frac{1}{N} \sum_{k \in K'} f_{\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu} \left(\phi_2 \left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\} \right), \phi_2 \left(\left\{ \frac{g_2^{(N)}}{N} k \right\} \right) \right) \phi_2 \left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\} \right) \phi_2 \left(\left\{ \frac{g_2^{(N)}}{N} k \right\} \right) \quad (29)$$

ここで、 $B'_{m_1, m_2}(N)$ は変数変換を施した場合の GLP 法⁸ による近似であり、 $K' \subset \{0, 1, \dots, N-1\}$ は、

$$\left(\phi_2 \left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\} \right), \phi_2 \left(\left\{ \frac{g_2^{(N)}}{N} k \right\} \right) \right) \in \mathcal{D} = \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 > 0, t_1 + t_2 < 1\}$$

⁸変数変換を用いた GLP 法については Appendix A を参照．

となるような添字集合である。なお、

$$\phi_2(x) := \frac{5!}{2!2!} \int_0^x u^2(1-u)^2 du = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3,$$

$$\dot{\phi}_2(x) = \frac{d\phi_2(x)}{dx} = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2$$

である。この近似式を用いた場合の結果も本稿で与えたものとほぼ同じであり、(28) 式の結果は全く同一である。ただし、 n が 17 または 19 以上の奇数の値に対して収束しているのに対して、偶数の場合は良くないため、本稿では通常の GLP 法を用いて詳細な数値評価を行った。

5 おわりに

本稿では、実行可能型一般化リッジ回帰推定量の正確なモーメントの数値的な評価を行った。とくに、実行可能型一般化リッジ回帰推量のクロスモーメントに対する数値評価は、通常の計算環境に関する理由から以前はなされていなかったことと思われる。ただし、本稿で与えられたクロスモーメントの計算結果は、非常に限定されたパラメータに関する結果であることを注意しておく。なお、一般的なパラメータの値（とくにポアソン分布のパラメータ δ_i が大きい場合）に対しては今回利用した計算環境を利用しても難しいものと思われる。さらに、本稿では標準化された線形回帰モデルにおける回帰係数の実行可能型一般化リッジ回帰推量について考察したが、通常の線形回帰モデルにおける回帰係数に関する一般化リッジ回帰推定量の平均 2 乗誤差基準を求めるためには、ここで考察したクロスモーメントに関する結果が必要であることに注意しよう。

謝辞

本研究の一部は、関西学院大学情報メディア教育センター指定研究プロジェクト「グリッドコンピューティング環境の構築と評価」の援助を受けており、同センターの武田 俊之氏よりグリッド・システムやプログラミングに関するご指導いただいたことに感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] Dwivedi, T. D., Srivastava, V. K. and Hall, R. L. (1980). Finite sample properties of ridge estimators. *Technometrics* **22**, 205–212.
- [2] Hemmerle, W. J. and Carey, M. B. (1983). Some properties of generalized ridge estimators. *Communications in Statistics. Computation and Simulation* **12**, 239–253.
- [3] Hoerl, A. E. and Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: biased estimation for non-orthogonal problems. *Technometrics* **12**, 55–67.
- [4] Inoue, T. (1999). Density function and relative efficiency of the modified generalized ridge regression estimators. *Journal of the Japan Statistical Society* **29**, 39–54.
- [5] Jimichi, M. (1999). Mean squared error criteria of feasible generalized ridge regression estimator. *International Review of Business* **4**, 61–74, The Society of Business Administration, Kwansei Gakuin University.

- [6] Jimichi, M. (2005) *Improvement of regression estimators by shrinkage under multicollinearity and its feasibility*, Osaka University, Ph.D. dissertation.
- [7] 地道 正行 (2006) 『実行可能型一般化リッジ回帰推定量の正確なモーメントとその妥当性』, 商学論究, 第 53 巻 第 4 号, pp 63–87, 関西学院大学商学研究会.
- [8] Ohtani, K. (1993). Distribution and density function of the feasible generalized ridge regression estimator. *Communications in Statistics. Theory and Method* **22**, 2733–2746.
- [9] Srivastava, V. K. and Chaturvedi, A. (1983). Some properties of the distribution of an operational ridge estimator. *Metrika* **30**, 227–237.
- [10] 杉原 正顯, 室田 一雄 (1994) 『数値計算法の数理』, 岩波 書店.

Appendices

A 優良格子点法

一般に, 優良格子点法とは, d 次元単位超立法体上で定義された関数 $f(\mathbf{x})$ の積分

$$I := \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

を以下の式で近似する数値積分法のことである:

$$I_N := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\}, \dots, \left\{ \frac{g_d^{(N)}}{N} k \right\} \right) \quad (30)$$

ここで, $\{x\}$ は x の小数部分を表し, $g_i^{(N)}$ は分点数 N に応じて決まる整数である. なお, 2 次元 ($d=2$) のときには, $(g_1^{(N)}, g_2^{(N)})$ は以下のように構成されることが知られている:

$$N = F_n, \quad g_1^{(N)} = 1, \quad g_2^{(N)} = F_{n-1}$$

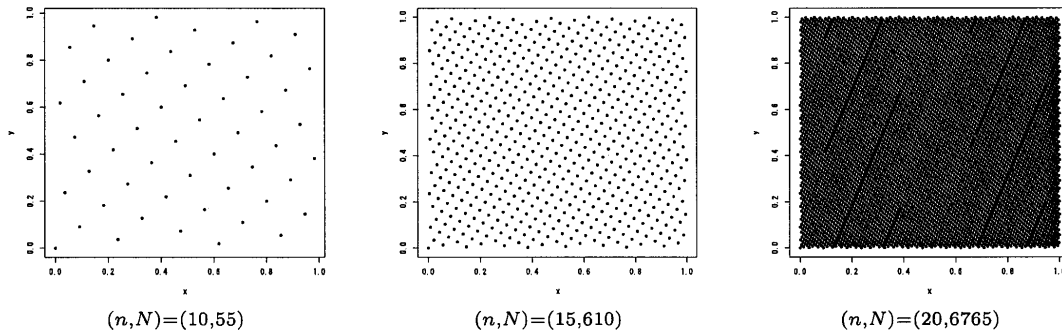
ここで, F_n は Fibonacci 数列である:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

表 2 は, $n = 2, \dots, 19$ に対する $(n, N, g_1^{(N)}, g_2^{(N)})$ の値である. また, 図 6 は, $n = 10, 15, 20, 25$ に対する 2 次元超立方体 (正方形) $[0, 1]^2$ 上の優良格子点 $\left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\}, \left\{ \frac{g_2^{(N)}}{N} k \right\} \right)$ のプロットである.

表 2: $n = 2, \dots, 25$ に対する $(n, N, g_1^{(N)}, g_2^{(N)})$ の値

n	$N(=F_n)$	$g_1^{(N)}$	$g_2^{(N)}$	n	$N(=F_n)$	$g_1^{(N)}$	$g_2^{(N)}$
2	1	1	1	14	377	1	233
3	2	1	1	15	610	1	377
4	3	1	2	16	987	1	610
5	5	1	3	17	1597	1	987
6	8	1	5	18	2584	1	1597
7	13	1	8	19	4181	1	2584
8	21	1	13	20	6765	1	4181
9	34	1	21	21	10946	1	6765
10	55	1	34	22	17711	1	10946
11	89	1	55	23	28657	1	17711
12	144	1	89	24	46368	1	28657
13	233	1	144	25	75025	1	46368

図 6: 2次元超立方体 (正方形) $[0, 1]^2$ 上の優良格子点: $n = 10, 15, 20, 25$

実際に、公式 (30) を用いるときに、変数変換 $x_i = \phi_p(y_i)$ ($i = 1, \dots, s$) を施してから適用するほうが良い場合があり、

$$I_N := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left(\phi_p \left(\left\{ \frac{g_1^{(N)}}{N} k \right\} \right), \dots, \phi_p \left(\left\{ \frac{g_d^{(N)}}{N} k \right\} \right) \right) \prod_{i=1}^d \phi_p' \left(\left\{ \frac{g_i^{(N)}}{N} k \right\} \right) \quad (31)$$

のようになる。ここで、関数 $f(x)$ が d 次元単位超立方体 $[0, 1]^d$ 上で高階偏導関数

$$\frac{\partial^{j_1 + \dots + j_d} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_d^{j_d}}(x_1, \dots, x_d) \quad (0 \leq j_1, \dots, j_d \leq p) \quad (p \geq 2)$$

をもち、それが連続であるときには、多項式変数変換

$$x_i = \phi_p(y_i) := \frac{(2p+1)!}{p!p!} \int_0^{y_i} u^p (1-u)^p du \quad (p \geq 2)$$

を用いるとよいことが知られている。なお, $p = 2$ のときは,

$$\phi_2(y) = 6y^5 - 15y^4 + 10y^3, \quad \phi_2'(y) = 30y^4 - 60y^3 + 30y^2$$

で与えられる。図 7 は, $p = 2$ のときの変数変換後の $n = 10, 15, 20, 25$ に対する 2 次元超立方体 (正方形) $[0, 1]^2$ 上の優良格子点 $\left(\phi_p\left(\left\{\frac{g_1^{(N)}}{N}k\right\}\right), \phi_p\left(\left\{\frac{g_2^{(N)}}{N}k\right\}\right)\right)$ のプロットである。

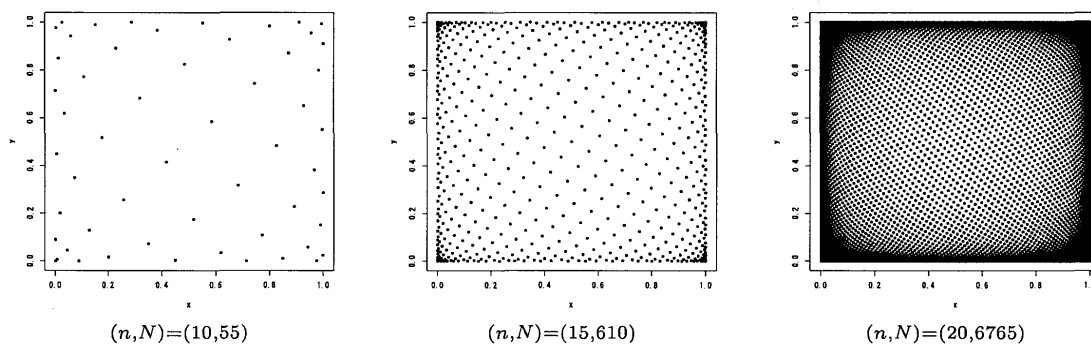


図 7: 変数変換後の 2 次元超立方体 (正方形) $[0, 1]^2$ 上の優良格子点: $n = 10, 15, 20, 25$

B 各種のプロット

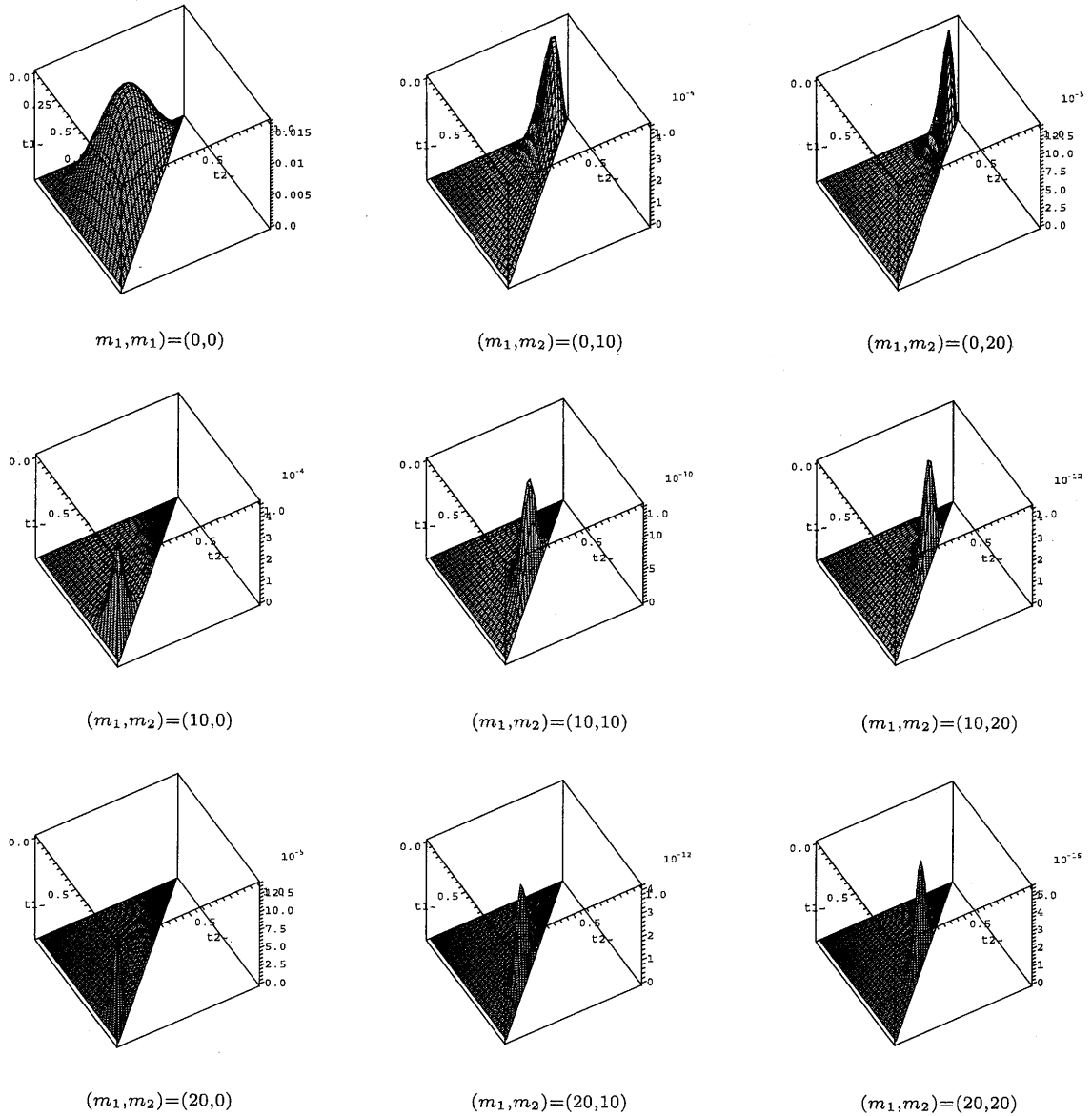


図 8: 関数 $f_{l_1, l_2, m_1, m_2, \nu}(t_1, t_2)$ の 3 次元プロット: $l_1 = l_2 = 0$, $m_1, m_2 = m = 0, 10, 20$, $\nu = 5$ の場合

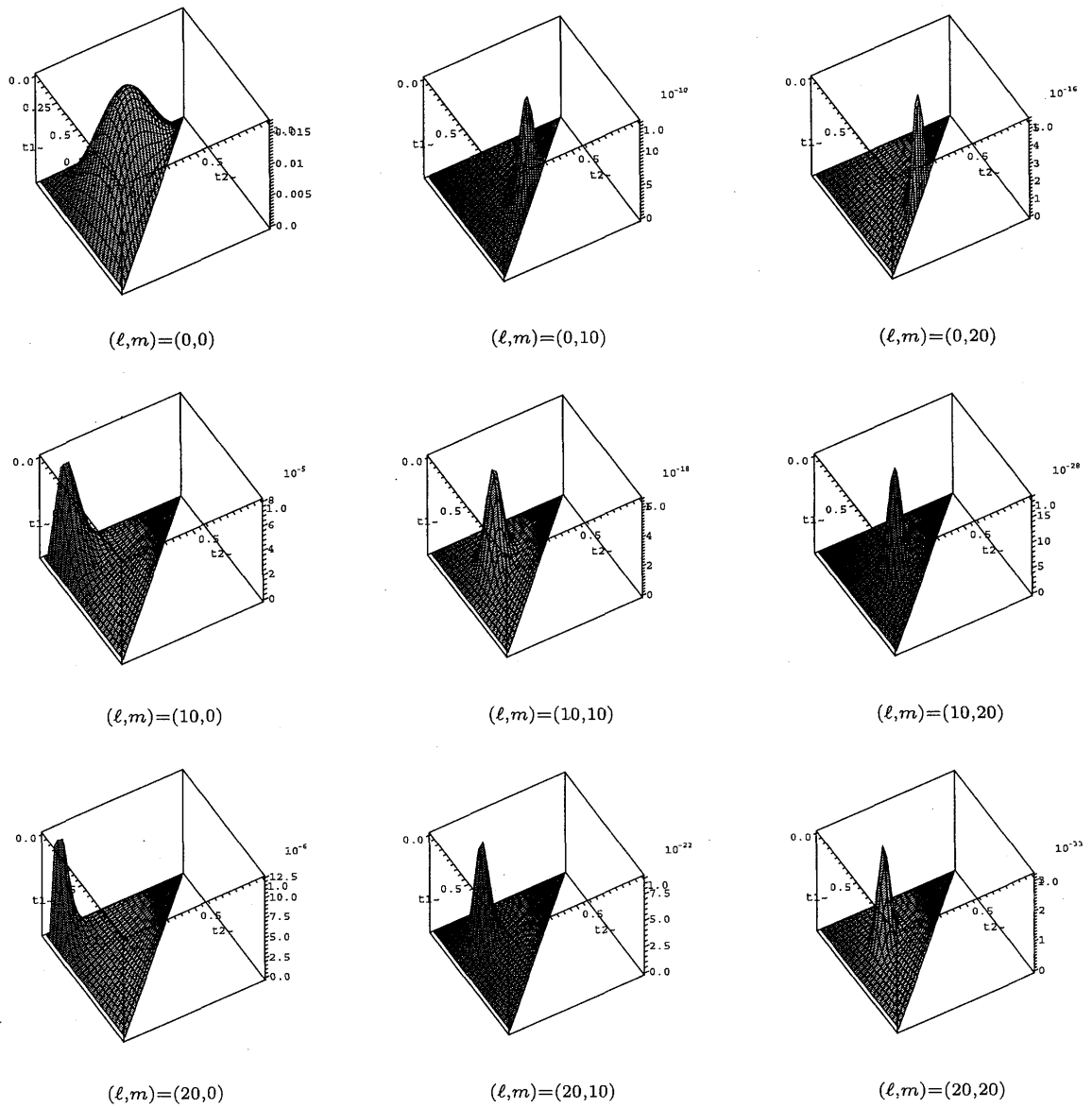


図 9: 関数 $f_{\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, \nu}(t_1, t_2)$ の 3 次元プロット: $\ell_1 = \ell_2 = \ell = 0, 10, 20$, $m_1 = m_2 = m = 0, 10, 20$, $\nu = 5$ の場合

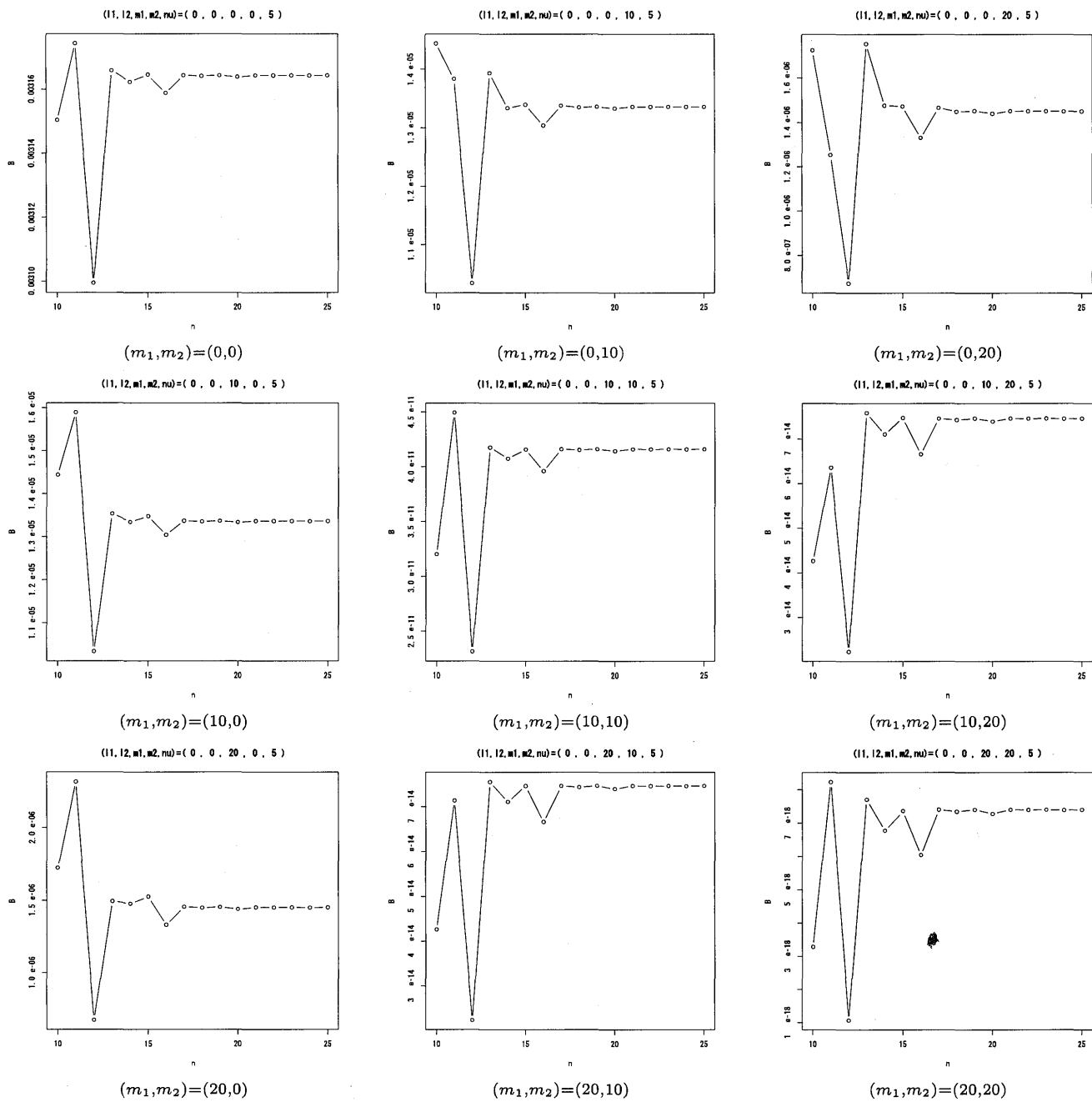


図 10: 近似 $B_{m_1, m_2}(N)$ の $n = 10, \dots, 25$ の値に対するプロット: $(l_1, l_2) = (0, 0)$, $m_1, m_2 = 0, 10, 20$, $\nu = 5$ の場合

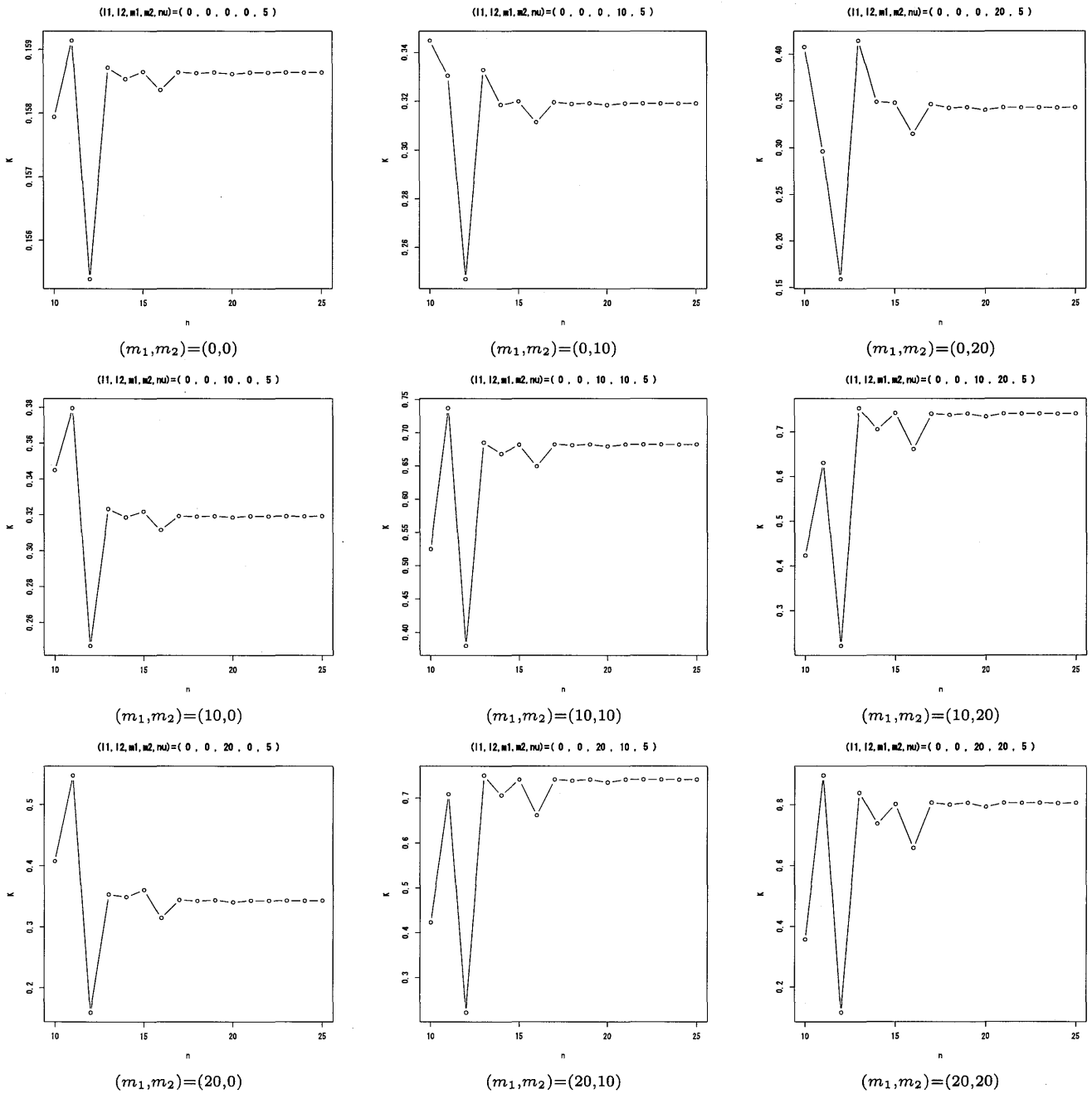


図 11: 近似 $K_{m_1, m_2}(N)$ の $n = 10, \dots, 25$ の値に対するプロット: $(l_1, l_2) = (0, 0)$, $m_1, m_2 = 0, 10, 20$, $\nu = 5$ の場合

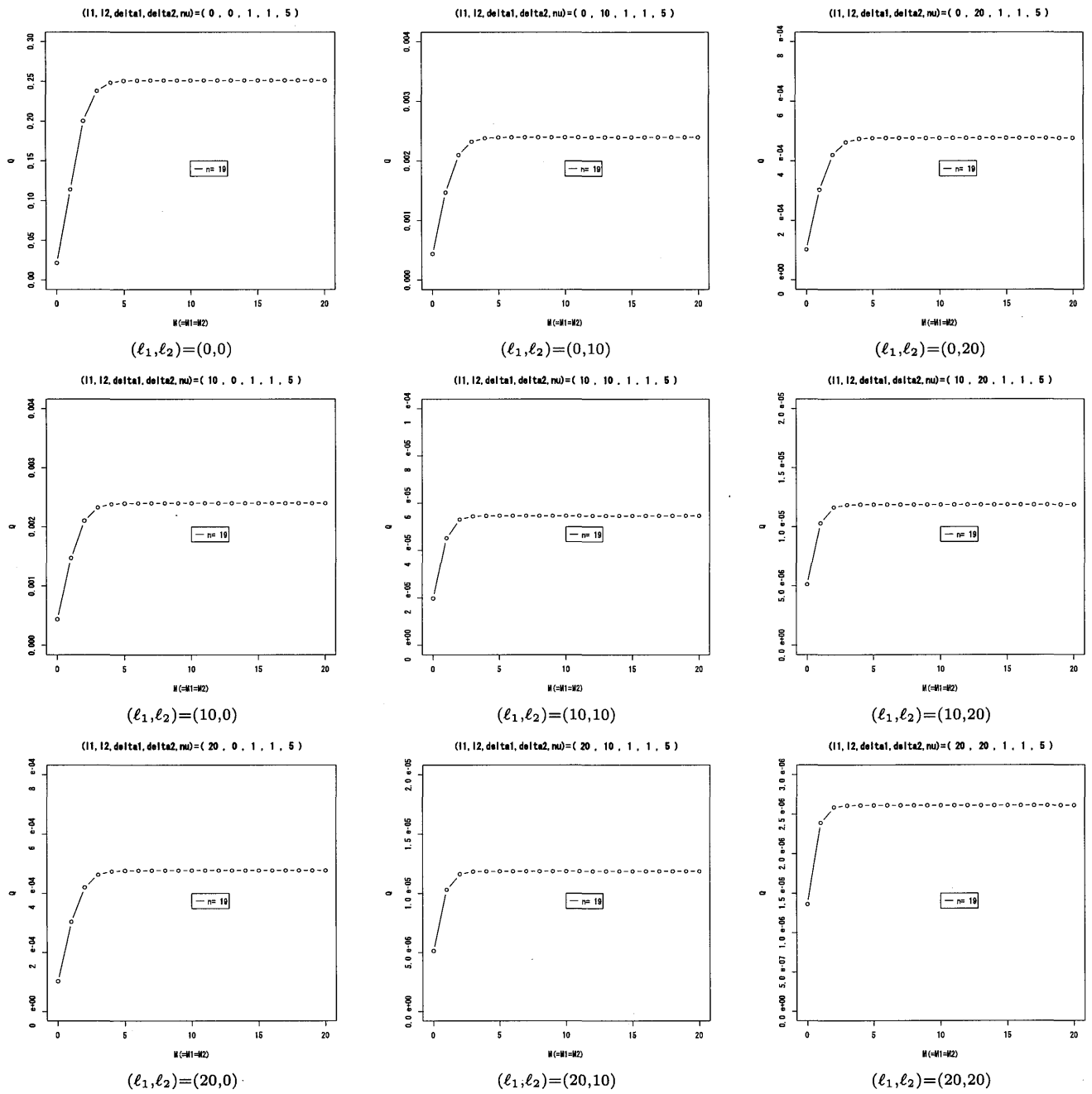


図 12: 近似 $Q_{\ell_1, \ell_2}(N; M_1, M_1, \delta_i, \delta_2, \nu)$ の $M(:= M_1 = M_2) = 0, \dots, 20$ の値に対するプロット:
 $n = 19$ ($N = 4181$), $\ell_1, \ell_2 = 0, 10, 20$, $\delta_i = \delta_j = 1$, $\nu = 5$ の場合