I(d)変数（d > $\frac{1}{2}$）を含む回帰モデルの統計的推定 †

杉 原 左右一 ††

We derive the limiting nonstandard distributions of OLS (Ordinary Least Squares Estimators) for the following three kinds of regression models; (1) both independent variable and error term follow I(d) (d > $\frac{1}{2}$) process, (2) independent variable follows I(d) (d > $\frac{1}{2}$) process and error term follows stationary process, (3) independent variable follows stationary process and error term follows I(d) (d > $\frac{1}{2}$) process. We also consider the statistical estimation method of d in the frequency domain.

KEY WORDS : I(d) process (d > $\frac{1}{2}$), weak convergence of probability measure, (d-1) fold integrated Brownian motion, pseudo spectral density function.

I. はじめに

次数dの和分過程（Integrated process of order d.以後I(d)過程と略記する）のうち、特に｜d｜< $\frac{1}{2}$ を満たす和分過程は定常な長期記憶型時系列の分析に適しており、これまでにも各種の時系列分析に重要な役割を果たしていることは周知の通りである。

本稿では次数dがd > $\frac{1}{2}$ を満たす非定常なI(d)過程を取り扱うことにし、I(d)過程を含む回帰モデルの未知母数の統計的推定問題を中心に考察したい。以下ではまず(1)攪乱項と独立変数が共にI(d)過程（d > $\frac{1}{2}$）に従う場合（II節）、(2)攪乱項が定常過程に従い、独立変数がI(d)過程（d > $\frac{1}{2}$）に従う場合（III節）、(3)独立変数が定常過程に従い、攪乱項がI(d)過程（d > $\frac{1}{2}$）に従う場合（IV節）の3つの場合を取り上げて、それぞれの場合について未知母数のOLSの極限分布を導出する。最後にI(d)過程の次数dの推定方法について簡単に考察したい（V節）。

なお上記3種類の場合の中でも特に攪乱項が定常過程に従い、独立変数がI(d)過程（d > $\frac{1}{2}$）に従う場合が実証分析に於いて重要な役割を果たすものと思われる。今後統計的理論、実証の両側面から引き続き考察する予定である。

II. 攪乱項、独立変数がそれぞれI(d_1)、I(d_2) 過程（$d_1 > \frac{1}{2}$、$d_2 > \frac{1}{2}$）に従う場合

攪乱項u_t、独立変数x_tがそれぞれ独立なI(d_1)過程、I(d_2)過程($d_1 > \frac{1}{2}$、$d_2 > \frac{1}{2}$)に従う次式で表わされる切片項を含む単回帰モデルを考える。

---

† Statistical Estimation of the Regression Model with I(d) Variables(d > $\frac{1}{2}$).

†† Soichi Sugihara. Professor of School of Business Administration, Kwansei Gakuin University, Nishinomiya, Hyogo Pref., Japan.

$$y_t=\alpha+\beta x_t+u_t \quad t=1,2,\cdots\cdots, T$$
（１） $(1-L)^{d1}u_t=\eta_t$、$\eta_t=\theta(L)v_t$
$(1-L)^{d2}x_t=\omega_t$、$\omega_t=\psi(L)\varepsilon_t$

Ｌはラグ演算子を意味し、上記モデルに次の仮定１、２、３を設定する。

仮定１　$d_1>\frac{1}{2}$． $\theta(L)=\sum_{i=0}^{\infty}\theta_i L^i(\theta_0=1)$，$\sum_{i=0}^{\infty} i\mid\theta_i\mid<\infty$であり、

$\theta(z)=0$の根は単位円外にある。

仮定２　$d_2>\frac{1}{2}$． $\psi(L)=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i L^i(\psi_0=1)$，$\sum_{i=0}^{\infty} i\mid\psi_i\mid<\infty$であり

$\psi(z)=0$の根は単位円外にある。

仮定３　$\begin{pmatrix} v_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim IID\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}\right)$

特に仮定１、２で$d_1>\frac{1}{2}$、$d_2>\frac{1}{2}$としている点に注意したい。$d_1=d_2=1$とした場合については Phillips［４］によって所謂“見せかけの回帰問題”として既にその特性が明らかにされているが、仮定１、２はｄを$d>\frac{1}{2}$の任意の実数に拡張したものである。但し、$d=\frac{1}{2}$の場合は、以下の議論とは異なった規格化が必要となるためここではこれを除くことにする。またη_t、ω_tは通常の線形過程に従うものとする。なお議論の本質的な部分を明確にするために、やや制約的ではあるが仮定３でv_tとε_tは独立であるものとする。相関のある場合への拡張は比較的容易である。

以後の便宜のために(1)式を次の様にベクトル・行列表示しよう。

（２） $y=X\theta+u$

但し、ｙ，Ｘ，ｕ，θはそれぞれ次式で与えられる。

$$y=(y_1 y_2,\cdots, y_T)' \quad u=(u_1, u_2, \cdots, u_T)'$$

（３） $X=\begin{pmatrix} 1, & 1,\cdots, & 1 \\ x_2, & x_2\cdots, & x_T \end{pmatrix}' \qquad \theta=(\alpha, \beta)'$

さて、以下の議論に次の補題１が有効である。

補題１

(1)　$u_T(r)$, $x_T(r)$ をそれぞれ次式で定義される部分和過程とする。

$$u_T(r)=\frac{1}{T^{d_1-\frac{1}{2}}}u_t+T\left(r-\frac{t}{T}\right)\frac{1}{T^{d_1-\frac{1}{2}}}(u_t-u_{t-1})$$

$$x_T(r)=\frac{1}{T^{d_2-\frac{1}{2}}}x_t+T\left(r-\frac{t}{T}\right)\frac{1}{T^{d_2-\frac{1}{2}}}(x_t-x_{t-1})$$

$$\left(\frac{t-1}{T}\leqq r\leqq\frac{t}{T};\ t=1,2,\cdots, T\right)$$

そうすれば、

$$u_T(r) \Rightarrow F_{u,\,d_1-1}(r) \equiv \frac{\theta(1)\sigma_v}{\Gamma(d_1)} \int_0^r (r-s)^{d_1-1}\, dW_v(s)$$

$$x_T(r) \Rightarrow F_{x,\,d_2-1}(r) \equiv \frac{\psi(1)\sigma\varepsilon}{\Gamma(d_2)} \int_0^r (r-s)^{d_2-1}\, dW\varepsilon(s)$$

が成立する。ここで $\Rightarrow$ は関連する確率測度の $T\to\infty$ の場合の弱収束を意味し、$F_{u,\,d_1-1}(r)$、$F_{x,\,d_2-1}(r)$ はそれぞれ (d_1-1) 重及び (d_2-1) 重和分ブラウン運動である。また $W_v(s)$, $W\varepsilon(s)$ は確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ で定義された互いに独立な標準ブラウン運動である。

(2)

$$\frac{1}{T^{d_1+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} u_t \Rightarrow \int_0^1 F_{u,\,d_1-1}(r)\,dr$$

$$\frac{1}{T^{d_2+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_t \Rightarrow \int_0^1 F_{x,\,d_2-1}(r)\,dr$$

(3)

$$\frac{1}{T^{2d_1}}\sum_{t=1}^{T} u_t^2 \Rightarrow \int_0^1 F^2_{u,\,d_1-1}(r)\,dr$$

$$\frac{1}{T^{2d_2}}\sum_{t=1}^{T} x_t^2 \Rightarrow \int_0^1 F^2_{x,\,d_2-1}(r)\,dr$$

(4)

$$\frac{1}{T^{d_1+d_2}}\sum_{t=1}^{T} x_t u_t \Rightarrow \int_0^1 F_{x,\,d_2-1}(r)F_{u,\,d_1-1}(r)\,dr$$

上記補題1は Tanaka［6］の $d>\frac{1}{2}$ の場合への拡張を与えるものである。

さて、$\hat{\theta}$ を θ の OLS

（4）$\hat{\theta}=(\hat{\alpha},\hat{\beta})'=(X'X)^{-1}X'y$

とし、D^* を $\hat{\theta}$ の規格化行列

（5）$D^*=\frac{1}{T^{d_1}}D=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}-d_1} & \\ & T^{d_2-d_1}\end{pmatrix}$,　$D=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & \\ & T^{d_2}\end{pmatrix}$

としよう。そうすれば、

（6）$D^*(\theta-\theta)=(D^{-1}X'XD^{-1})^{-1}\frac{1}{T^{d_1}}D^{-1}X'u$

となることに注意して、上記補題1を用いれば、上式右辺の $D^{-1}X'XD^{-1}$, $\frac{1}{T^{d_1}}D^{-1}X'u$ がそれぞれ下記の様に弱収束することがわかる。

$$(7)\quad D^{-1}X'XD^{-1}=\begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{T^{d_2+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t \\ *, & \frac{1}{T^{2d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_t^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1, & \int_0^1 F_{x,\,d_2-1}(r)\,dr \\ *, & \int_0^1 F^2_{x,\,d_2-1}(r)\,dr \end{bmatrix} \equiv H$$

$$(8)\quad \frac{1}{T^{d_1}}D^{-1}X'u=\begin{bmatrix} \frac{1}{T^{d_1+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}u_t \\ \frac{1}{T^{d_1+d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_t u_t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_0^1 F_{u,\,d_1-1}(r)\,dr \\ \int_0^1 F_{x,\,d_2-1}(r)F_{u,\,d_1-1}(r)\,dr \end{bmatrix} \equiv J$$

従って、

$$(9)\quad D^{*}(\hat{\theta}-\theta)=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}-d_1}(\hat{\alpha}-\alpha) \\ T^{d_2-d_1}(\hat{\beta}-\beta) \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1}J$$

が成立することがわかる。

なお、$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$の規格化係数が、$\lim_{T\to\infty}{}^{\frac{1}{2}-d_1}=0$, $d_2>d_1>\frac{1}{2}$なら$\lim_{T\to\infty}T^{d_2-d_1}=\infty$, $d_1>d_2>\frac{1}{2}$ なら $\lim_{T\to\infty}T^{d_2-d_1}=0$ となることに注意したい。また上式で特に $d_1=d_2=1$ とした場合が Phillips [4] の結果に対応している。

III. 攪乱項が定常過程に従い、独立変数が $I(d_2)$ 過程 $(d_2>\frac{1}{2})$ に従う場合

次に、攪乱項u_tが定常過程に従い、独立変数x_tが$I(d_2)$過程 $(d_2>\frac{1}{2})$ に従う次式で表わされる単回帰モデルを考えよう。

$$(10)\quad \begin{aligned} &y_t=\alpha+\beta x_t+u_t \\ &u_t=\eta_t,\quad \eta_t=\theta(L)v_t \\ &(1-L)^{d_2}x_t=\omega_t,\quad \omega_t=\psi(L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

即ち、前節の仮定2、3はここでも同様に成立するが、仮定1で$d_1=0$となっている場合である。ところで、以下では主にθの OLS と GLS の諸性質について考察することにし、より簡単に

$$(11)\quad \theta(L)=\frac{1}{\phi(L)}$$

$$\phi(L)=1-\phi L \qquad |\phi|<1$$

とした場合を中心に考察することにする。分析はやや複雑なものとなるが、(10) 式のより一般的な場合についても以下の議論が同様に成立する。

上記モデルは例えば非定常時系列の分析に重要な役割を果たすモデルと言えよう。

以下の議論では補題1と共に次の補題2が有効である。

補題2

$$\frac{1}{T^{2d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_t u_t \Rightarrow \frac{\sigma_v}{\phi(1)}\int_0^1 F_{x,\,d_2-1}(r)\,dW_v(r)$$

さて、θの OLS を(4)式で与えられる$\hat{\theta}$とし、$\hat{\theta}$の規格化行列を(5)式のDとする。
そうすれば

$$(12)\quad D(\hat{\theta}-\theta)=(D^{-1}X'XD^{-1})^{-1}D^{-1}X'u$$

に注意して、上記補題1、2を用いれば、

$$(13)\quad D^{-1}X'XD^{-1}\Rightarrow\begin{bmatrix} 1, & \int_0^1 F_{x,\,d_2-1}(r)\,dr \\ *, & \int_0^1 F^2_{x,\,d_2-1}(r)\,dr \end{bmatrix}\equiv H$$

$$(14)\quad D^{-1}X'u=\begin{pmatrix} \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}u_t \\ \frac{1}{T^{d_2}}\sum_{t=1}x_t u_t \end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\sigma_v}{\phi(1)}\begin{pmatrix} W_v(1) \\ \int_0^1 F_{x,\,d_2-1}(r)\,dW_v(r) \end{pmatrix}\equiv\frac{1}{\phi(1)}K$$

となることがわかる。従って、OLS について、

(15)　$$D(\hat{\theta}-\theta)=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}-\alpha) \\ T^{d_2}(\hat{\beta}-\beta) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\phi(1)}\ H^{-1}K$$

が成立することがわかる。

次に θ の GLS について考えよう。

Σ を u の分散行列とする。

(16)　$$\Sigma=E(uu')$$
$$=\frac{\sigma_v{}^2}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \cdots\cdots & \phi^{T-1} \\ \phi & 1 & \cdots\cdots & \phi^{T-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi^{T-1} & \phi^{T-2} & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix} \equiv \sigma_v{}^2\Omega$$

Ω^{-1}は

(17)　$\Omega^{-1}=M'M$

と分解できる。但しMは次式で与えられる。

(18)　$$M=\begin{pmatrix} (1-\phi^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\ -\phi & 1 \cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & -\phi\, 1 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots -\phi\ \ 1 \end{pmatrix}$$

さて、θ の GLS を $\tilde{\theta}$

(19)　$\tilde{\theta}=(\tilde{\alpha}、\tilde{\beta})'=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$

とすれば、

(20)　$D(\tilde{\theta}-\theta)=(D^{-1}X'M'MXD^{-1})^{-1}D^{-1}X'M'Mu$

となる。そこで、補題1、2を用いれば、

(21)　$$D^{-1}X'M'MXD^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{(1-\phi^2)+(1-\phi^2)(T-1)}{T}, & \dfrac{(1-\phi^2)x_1+(1-\phi)\sum_{t=2}^{T}(1-\phi L)x_t}{T^{d_2+\frac{1}{2}}} \\ * & , \dfrac{(1-\phi^2)x_1{}^2+\sum_{t=1}^{T}((1-\phi L)x_t)^2}{T^{2d_2}} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \phi^2(1)H$$

(22)　$$D^{-1}X'M'Mu=\begin{pmatrix} \dfrac{(1-\phi^2)u_1+(1-\phi)\sum_{t=1}^{T}v_t}{T^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{(1-\phi^2)x_1u_1+\sum_{t=2}^{T}((1-\phi L)x_t)v_t}{T^{d_2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(1)K$$

となることがわかる。

但し、上式で T →∞で 0 に確率収束する部分は無視している。

従って、GLS$\tilde{\theta}$についても(15)式と同様に

$$(23)\quad D(\tilde{\theta}-\theta)=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}}(\tilde{\alpha}-\alpha) \\ T^{d_2}(\tilde{\beta}-\beta) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\phi(1)}H^{-1}K$$

が成立することがわかる。即ちθのOLSとGLSが共に同一の極限分布$\frac{1}{\phi(1)}H^{-1}K$を持つことが明らかとなった。

なおKramer［3］，Phillips and Park［5］は$d=1$の場合についてOLSとGLSの漸近的同等性を示しているが、上記の結果はその$d>\frac{1}{2}$の場合への拡張となっていることに注意したい。またGrenander and Rosenblatt［2］は、所謂Grenander条件の下でOLSとGLSの漸近的同等性を明らかにしたが、上記の結果はそれと同様の結果を与えるものにもなっている。

一般にϕは未知であるからGLS$\tilde{\theta}$は実行可能推定量ではない。ϕはOLS残差をもとに通常の2段階法により推定すれば良いであろう。また、$D(\hat{\theta}-\theta)$と$D(\tilde{\theta}-\theta)$の各成分について次式が成立することに注意したい。

$$(24)\quad T^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}-\alpha),\ T^{\frac{1}{2}}(\tilde{\alpha}-\alpha) \Rightarrow \frac{\sigma_v}{\phi(1)}\frac{\int_0^1 F^*_{x,d_2-1}(r)dW_v(r)}{\int_0^1 F^{*2}_{x,d_2-1}(r)dr}$$

$$(25)\quad T^{d_2}(\hat{\beta}-\beta),\ T^{d_2}(\tilde{\beta}-\beta) \Rightarrow \frac{\sigma_v}{\phi(1)}\frac{\int_0^1 P(r)dW_w(r)}{\int_0^1 P^2(r)dr}$$

但し上式で$F^*_{x,d_2-1}(r)$，$P(r)$はそれぞれ以下で与えられる。

$$(26)\quad F^*_{x,d_2-1}(r)\equiv F_{x,d_2-1}(r)-\int_0^1 F_{x,d_2-1}(r)dr$$

$$(27)\quad P(r)\equiv 1-\left(\frac{\int_0^1 F_{x,d_2-1}(r)dr}{\int_0^1 F^2_{x,d_2-1}(r)dr}\right)F_{x,d_2-1}(r)$$

IV．独立変数が定常過程に従い、攪乱項が$I(d_1)$過程$(d_1>\frac{1}{2})$に従う場合

最後に、独立変数x_tが定常過程に従い、攪乱項u_tが$I(d_1)$過程$(d_1>\frac{1}{2})$に従う次式で表される単回帰モデルを考えよう。

$$\begin{aligned} &y_t=\alpha+\beta x_t+u_t \\ (28)\ &(1-L)^{d_1}u_t=\eta_t,\quad \eta_t=\theta(L)v_t \\ &x_t=\omega_t,\quad \omega_t=\psi(L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

即ち、II節の仮定1、3は同様に成立するが、仮定2で$d_2=0$となっている場合である。

以下の議論に補題1と共に次の補題3が有効である。

補題3

$$\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t \Rightarrow \psi(1)\sigma_\varepsilon W_\varepsilon(1)$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_t^2 \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2\left(\sum_{t=0}^{\infty}\psi_t^2\right)$$

$$\frac{1}{T^{d_1}}\sum_{t=1}^{T}x_t u_t \Rightarrow \psi(1)\ \sigma_\varepsilon \int_0^1 F_{u,\,d_1-1}(r)\,dW_\varepsilon(r)$$

さて、(4)式の $\hat{\theta}$ を θ の OLS とし、K、D を

$$(29)\quad K=\begin{pmatrix} T^{d_1} & \\ & T^{d_1-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},\quad D=T^{\frac{1}{2}}I_2$$

として、$K^{-1}D$

$$(30)\quad K^{-1}D=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}-d_1} & \\ & T^{1-d_1} \end{pmatrix}$$

を $\hat{\theta}$ の規格化行列としよう。そうすれば、

$$(31)\quad K^{-1}D(\hat{\theta}-\theta)=(K^{-1}(D^{-1}X'XD^{-1})K)^{-1}K^{-1}D^{-1}X'u$$

となることに注意し、補題1、3を用いれば上式右辺の $K^{-1}(D^{-1}X'XD^{-1})K$, $K^{-1}D^{-1}X'u$ がそれぞれ下記の様に弱収束することがわかる。

$$(32)\quad K^{-1}(D^{-1}X'XD^{-1})K=\begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t \\ \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t, & \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_t^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \psi(1)\sigma_\varepsilon W_\varepsilon(1), & \sigma_\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i^2 \end{bmatrix} \equiv L$$

$$(33)\quad K^{-1}D^{-1}X'u=\begin{bmatrix} \frac{1}{T^{\frac{1}{2}+d_1}}\sum_{t=1}^{T}u_t \\ \frac{1}{T^{d_1}}\sum_{t=1}^{T}x_t u_t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_0^1 F_{u,\,d_1-1}(r)\,dr \\ \psi(1)\ \sigma_\varepsilon \int_0^1 F_{u,\,d_1-1}(r)\,dW_\varepsilon(r) \end{bmatrix} \equiv M$$

従って

$$(34)\quad K^{-1}D(\hat{\theta}-\theta)=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}-d_1}(\hat{\alpha}-\alpha) \\ T^{1-d_1}(\hat{\beta}-\beta) \end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1}M$$

が成立することがわかるのである。

なお、$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$ の規格化係数が $\lim_{T\to\infty}T^{\frac{1}{2}-d}=0$, $\frac{1}{2}<d_1<1$ なら $\lim_{T\to\infty}T^{1-d_1}=\infty$, $1<d_1$ なら $\lim_{T\to\infty}T^{1-d_1}=0$ となることに注意したい。

V．次数 d の推定方法

以上本稿では3つのモデルを取り上げて、それらの未知母数の OLS の極限分布を導出した。最後に本節では I(d) 過程 $(d>\frac{1}{2})$ の次数 d の推定方法について簡単に考察することにしたい。そのために次式で表される I(d) 過程 $(d>\frac{1}{2})$ を考えよう。

$$(35)\quad (1-L)^d x_t=\omega_t,\quad \omega_t=\psi(L)\varepsilon_t$$

但し、ここでもII節と同様に次の仮定を設定する。

仮定 4

$$d>\frac{1}{2}.\quad \psi(L)=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i L^i\ (\psi_0=1),\quad \sum_{i=0}^{\infty} i\,|\,\psi_i\,|<\infty$$

であり、$\psi(z)=0$ の根は単位円外にある。

仮定 5

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$$

さて、上式で表される I(d) 過程の周波数 λ に於ける擬似スペクトル密度関数を $f(\lambda)$ $(\lambda\neq 0)$ とすれば、

$$(36)\quad f(\lambda)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\ \frac{1}{|\,1-e^{ix}\,|^{2d}}\ |\,\psi(e^{i\lambda})\,|^2\ (\lambda\neq 0)$$

となる。ところで、$\lambda=0$ の近辺で $f(\lambda)$ が

$$(37)\quad f(\lambda)\cong\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\ \frac{1}{\lambda^{2d}}\ \psi^2(1)$$

と近似出来ることに注意すれば、$\lambda=0$ の近辺で

$$(38)\quad \log f(\lambda)\cong -2\,d\log\lambda+\log\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\psi^2(1)$$

と近似出来る。従って $f(\lambda)$ に対応するピリオドグラムを $I_T(\lambda)$ として、$\lambda=0$ の近辺で $\log I_T(\lambda)$ を従属変数とし、$-2\log\lambda$ を独立変数とする定数項を含む回帰分析を実行することにより d を最小 2 乗推定出来ることがわかる。但し、上記の方法を含め、d の推定、検定方法については未だ十分に検討されていない様に思われる。この問題は今後に残された研究課題の一つであると言えよう。

VI. おわりに

本稿では独立変数ないし攪乱項、ないしその両方が I(d) 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従う 3 種類の単回帰モデルを取り上げて、未知母数の OLS の極限分布を導出し、次数 d の推定方法について簡単に考察した。

本稿で考察したモデルの中でも特に攪乱項が定常過程に従い、独立変数が I(d) 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従う回帰モデルは非定常時系列分析の分野に於て重要な役割を果たすことが期待されるが、同種のモデルについては例えば $d=\frac{1}{2}$ の場合や、攪乱項が $|\,d\,|<\frac{1}{2}$ の I(d) 過程に従う場合の考察、また動的回帰モデルへの拡張、小標本理論の展開等さらに検討しなければならない課題も数多く残されている。これらの諸問題について統計的理論、実証の両側面から今後さらに考察する予定である。

[参考文献]

[1] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures,* John Wiley, New York.

[2] Grenander, U. and Rosenblatt, M. (1957), *Analysis of Stationary Time Series,* John Wiley, New York.

[3] Kramer, W. (1986), "Least Squares Regression When the Independent Variable follows an ARIMA Process," *Journal of the American Statistical Association,* 81, 150-154.

[4] Phillips, P.C.B. (1986), "Understanding Spurious Regressions in Econometrics," *Journal of Econometrics,* 33, 311-340.

[5] Phillips, P. C. B. and Park, J.Y. (1988), "Asymptotic Equivalence of Ordinary Least Squares and Generalized Least Squares in Regressions with Integrated Regressors," *Journal of the American Statistical Association,* 83, 111-115.

[6] Tanaka, K. (1996), *Time Series Analysis; Nonstationary and Noninvetible Distribution Theory,* John Wiley, New York.