インデックスファンド問題の対話型解法

仲川勇二*　関西大学
伊佐田百合子　関西学院大学
井垣伸子　関西学院大学

和文概要　この論文では，2つの非凸なポートフォリオ最適化問題，即ち取引コストを考慮したマーコヴィッツ平均分散問題とインデックスファンド問題に改良代理制約法に基づく対話型手法を適用する．これらの問題は，通常解くことが難しいとされているが，我々の手法を用いることで最適ポートフォリオを得ることができた．さらに，インデックスを常にアルファだけ上回る仮想インデックスに連動するようなファンドを求めるインデックス・プラス・アルファファンド問題を考え，それを解くことに成功した．

キーワード: 離散最適化, 代理制約法, ISC法, マーコヴィッツ平均分散モデル, ポートフォリオ最適化

1.　はじめに

0-1整数計画問題を解くために，グローバー [3] は，初めて代理制約法を提案した．代理制約法 [4] は，複数の制約を持つ原問題を解く代わりに，原問題を代替する制約条件が1つの問題を解く方法である．この方法では，代理ギャップがしばしば発生するため，原問題の厳密な最適解に到達することができず，問題を解くことが非常に困難である場合が多い．この代理ギャップを解消し，多次元非線形ナップザック問題を解くために，仲川 [9, 10] は改良代理制約（ISC）法を提案した．ISC法は，代理ギャップを閉じるために，原問題の最適解を含む領域を定め，その領域内の解を列挙する方法である．仲川 [10] は，ISC法を用いて，3制約1000変数，各変数毎の代替案数が20個の問題と8制約500変数，各変数毎の代替案数が50個の問題を解いた．本論文では，我々は，2つの非凸なポートフォリオ最適化問題，即ち，取引コストを考慮したマーコヴィッツ平均分散問題とインデックスファンド問題にISC法に基づく対話型手法を適用する．

インデックスファンド問題は，目的関数が線形で，かつ，株数が100以下でなければ，厳密に解くことは非常に難しいと言われている混合整数計画問題である [2]．インデックスファンド問題におけるリスクの基準は，マーコヴィッツ平均分散モデルが提案されて以降，標準偏差が使用されている．今野と山崎 [7] は，この問題を簡単にするために，2次の標準偏差の変わりに線形関数である絶対偏差をリスク基準として使用した．田畑と武田 [12] は，この問題を株数の最小化とポートフォリオとインデックスファンドの乖離を示すトラッキングエラーの最小化という2つの目的関数を持つ0-1の2次計画問題として定式化し，その局所解を求めるアルゴリズムを提案した．

現実規模の問題として，例えば，日経平均の銘柄である225の株式の中から50株を選択することを考えるならば，3.68×10^{50} もの組み合わせが考えられるので，厳密解を求めることはもちろん，品質の良い近似解を求めることでさえ困難である．この問題を解く方法として，タブー探索法，アニーリング法，遺伝的アルゴリズムのようなヒューリスティックな

*〒631-8501 大阪府高槻市霊仙寺町2丁目1番1号 TEL:06-6368-1121 E-Mail:nakagawa@res.kutc.kansai-u.ac.jp

手法 [1] を用いることが考えられる．しかし，これらの手法を用いて得られた解は最適解である保証がなく，大域的最適解から遠く離れた悪い局所解しか見出せないことも多い．

Gaivoronski ら [2] は次の 2 つの段階的手法を用いてインデックスファンド問題を解いた．
1) すべての n 個の株について異なる株の数における制約を何も与えずにポートフォリオ選択問題を解く．そして，すべての株の重みを求める．
2) 得られたポートフォリオの中で大きな重みを持つ n 個の株の部分集合を選択し，その部分集合に対してもう一度ポートフォリオ選択問題を解く．
この手法の手順 2) は，局所最適解を求めるヒューリスティックな選択手法であり，得られた解は，大域的最適解ではない可能性がある．

我々が提案する手法は ISC 法に基づく対話型の最適化手法であり，変数が離散値をとる 2 次計画問題の最適解を求める方法である．変数分離型の信頼性最適化問題 [5] の研究において, 変数分離可能ではない関数を一次近似を用いて変数分離型関数に変換する方法が提案された．この方法をインデックスファンド問題に適用したのが文献 [6] である．

本論文では，マーコヴィッツ平均分散問題を非線形取引コストを持つ分散最小化モデルとして定式化し，提案する手法を用いることにより，この問題に高品質な解を与えることができることを示す．また，インデックスファンド問題においても，東京株式市場における日経 225 の 1995 年 4 月から 1998 年 3 月までのデータを用いて，高品質な解が得られた．ここでは, 文献 [6] で取り扱ったインデックスファンド問題に加えて，インデックスプラスアルファファンド問題を扱った．ここで，インデックスファンドモデルとは，即ち，n 個の元になる株から q 種類の株とその取得割合を選択し，その市場指標に連動するように設計されたものであり，インデックス・プラス・アルファファンドモデルとは，インデックスファンドのうち，市場指標を α だけ上まわり連動するように設計されたものである．

2. 非凸最適化問題とキューブウォーク

次のような m 個の制約条件を持つ n 次元の非凸な変数非分離型計画問題を考える．

$$\begin{aligned} \mathbf{P}: \quad & \text{maximize} && f(\boldsymbol{\xi}) = r(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\xi_i), \\ & \text{subject to} && g_j(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} g_{ji}(\xi_i) \le b_j \quad (j \in M), \\ & && \xi_i^L \le \xi_i \le \xi_i^U \quad (i \in N), \end{aligned}$$

ここで，解空間 $\{\boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\}$ は離散である．また,$M \equiv \{1, 2, \ldots, m\}, N \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ で，$r(\boldsymbol{\xi})$ は，微分可能な変数非分離型の関数であり，$f_i(\xi_i)$，$g_{ji}(\xi_i)$ $(i \in N, j \in M)$ は，微分可能とは限らないとする．この問題については，凸性を仮定することが多いが，本論文では，凸性を特に仮定しない．ISC 法は，変数分離型問題を解く方法であるので，そのままでは，この方法を変数非分離型問題に適用することはできない．そこで，繰返しアルゴリズムの各ステップにおいて，そのときの暫定解の近傍に一辺の長さが ρ である多次元立方体（ハイパーキューブ）状の領域を考え，そこで，局所的な変数分離型問題を考える．このハイパーキューブの具体的な作り方は，l 番目のステップにおけるピボットの値 $\boldsymbol{\xi}^{(\ell)}$ $(\ell = 0, 1, 2, \ldots)$ を中心として，そこから n 次元の各軸に沿って 0.5ρ だけ離れたところまでの領域を考える．即ち，このハイパーキューブ領域内の点 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ は，$\left|\xi_i - \xi_i^{(\ell)}\right| \le 0.5\rho$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

を満たしている．この一辺の長さ ρ をキューブサイズと呼ぶ．次に，このハイパーキューブを各軸毎に t 個のセグメントに分割する．つまり，t^n 個の小ハイパーキューブに分割される．その時の格子点 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ は，

$$\xi_i = \xi_i^{(\ell)}(x_i, \rho, t) = \xi_i^{(\ell)} - 0.5\rho + \rho(x_i - 1)/t, x_i \in \{1, 2, \ldots, t+1\}, i = 1, 2, \ldots, n$$

と書ける．ここで，i 軸における格子点とのずれを $\Delta\xi(x_i, \rho, t) = \rho(x_i - 1)/t - 0.5\rho$ とおいておこう．つまり，$\xi_i = \xi_i^{(\ell)} + \Delta\xi(x_i, \rho, t)$ と書ける．このハイパーキューブ上で次の変数分離型の問題を考える．

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}^{(\ell)}, \rho, t) : \text{maximize } k^{(\ell)}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^{n} k_i^{(\ell)}(\xi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \partial r(\boldsymbol{\xi}^{(\ell)})/\partial \xi_i \cdot \Delta\boldsymbol{\xi}(x_i, \rho, t) + f_i(\xi_i^{(\ell)} + \Delta\boldsymbol{\xi}(x_i, \rho, t)) \right\}, \\
\text{subject to } g_j^{(\ell)}(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^{n} g_{ji}(\xi_i^{(\ell)} + \Delta\boldsymbol{\xi}(x_i, \rho, t)) \leq b_j \quad (j \in M), \\
\xi_i^L &\leq \xi_i^{(\ell)} + \Delta\xi(x_i, \rho, t) \leq \xi_i^U \quad (i \in N), \\
x_i &\in \{1, 2, \ldots, t+1\} \quad (i \in N).
\end{aligned}$$

この問題 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}^{(\ell)}, \rho, t)$ は，主問題の中の変数非分離型関数 $r(\boldsymbol{\xi})$ の代わりに変数分離型関数 $\sum_{i=1}^{n} \partial r(\boldsymbol{\xi}^{(\ell)})/\partial \xi_i \cdot \Delta\boldsymbol{\xi}(x_i, \rho, t)$ を用いており，非線形ナップサック問題である．この問題は，ハイパーキューブ内のすべての格子点の中から制約条件を満たし目的関数値が最大となる格子点を一つ見つける問題であり，ISC 法で厳密かつ高速に解くことが可能である．そのハイパーキューブ内での最も良い解（暫定解）が得られれば，キューブの中心を新たな暫定解に移動しキューブサイズ ρ および分割数 t を変化させて新たなキューブを作成し，よりよい解が暫定解の近傍にないか探索する．この対話的解法をキューブウォークと呼び，そのアルゴリズムを以下に示す．

[Step1]　主問題 $\mathbf{P}$，初期解 $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$，分割数 t，許容誤差 ϵ を入力する；
[Step2]　Set　$\ell \leftarrow 0$;
[Step3]　Set　$\ell \leftarrow \ell + 1$;
[Step4]　キューブサイズ ρ と分割数 t を決める;
[Step5]　代替問題 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}^{(\ell-1)}, \rho, t)$ を $\boldsymbol{\xi}^{(\ell-1)}$ を中心としたハイパーキューブ内で ISC 法を用いて $\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ を得る;
[Step6]　Set　$\xi_i^{(\ell)} \leftarrow \xi_i^{(\ell-1)} + \Delta\boldsymbol{\xi}(x_i^{(\ell)}, \rho, t)$　$(i = 1, 2, \ldots, n)$;
[Step7]　ρ が充分小さくかつ $\left| k(\boldsymbol{\xi}^{(\ell)}) - k(\boldsymbol{\xi}^{(\ell-1)}) \right| \leq \varepsilon$ ならば [Step3] へ戻る．そうでなければ [Step8] へ進む．;
[Step8]　$\boldsymbol{\xi}^{(l)}$ を出力する;

図 1 はキューブウォークのイメージを図解したものである．

3. マーコヴィッツ平均分散モデル

本論文では，非凸な変数非分離型計画問題の例として 2 種類のポートフォリオ最適化問題を考え，そこで，キューブウォークの有効性を論じる．まずここでは，取引コストを考慮し

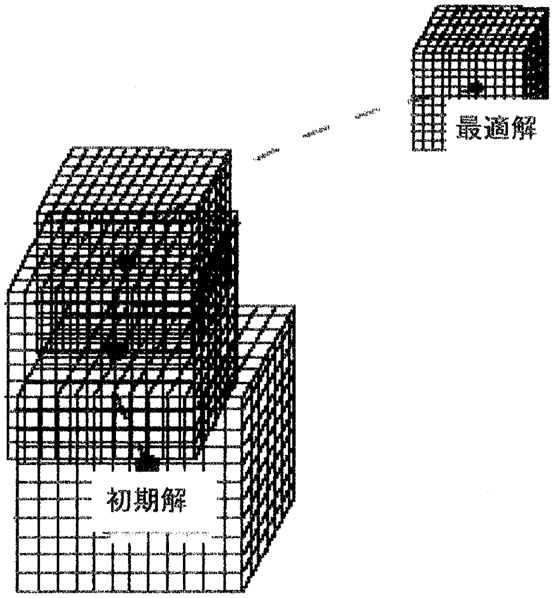

図 1: キューブウォークの視覚的イメージ

たマーコヴィッツ平均分散モデルを扱う．n 種類の株 $i \in \{1, ..., n\}$ を考える．株 i の収益率を Ri とおき，株 i の重みを ξ_i とする $(\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1)$．総投資額 C に対する収益率の平均 r と標準偏差 σ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
r &= E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[R_i\right] \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \xi_i, \\
\sigma &= \sqrt{E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} R_i \xi_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i \xi_i\right]\right\}^2\right]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \sigma_{is} \xi_i \xi_s},
\end{aligned}
$$

ここで，$E[\cdot]$ は変数 $\cdot$ の平均値を表し，μ_i は株 i の平均収益率 $E[R_i]$ を表す．また，σ_{is} は，株 i と株 s の共分散 $E[(R_i - \mu_i)(R_s - \mu_s)]$ を表す．取引コストを考慮したマーコヴィッツ平均分散モデルは次式で表される．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P^A}: \quad & \text{minimize} && \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \sigma_{is} \xi_i \xi_s, \\
& \text{subject to} && \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1, \\
& && \sum_{i=1}^{n} (\mu_i C \xi_i - h_i(C\xi_i)) \geq \theta C, \\
& && 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}
$$

ここで，θ は最小収益率，$h_i(C\xi_i)$ は総投資額 C に対する取引コストである．ISC 法では等号制約を扱うことができないので，上記のマーコヴィッツ平均分散問題の等号制約条件式を次の 2 つの不等号制約式に置き換え ISC 法を適用する．

$$
1) \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq 1, \quad 2) \sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq 1
$$

具体的には，キューブウォークのアルゴリズム[Step5]において，この2つの不等号制約を切替えながらISC法を用いる．問題$\mathbf{P^A}$の例題として，表1に示した9つの株についてのデータを用いた2つの問題を取り上げる．表2に示した取引コストは，日本の証券会社によって使用されているものである．

例題1:取引コスト$h_i(y)=0$（単位：100万円）の場合
$\theta=0.005312870$とおく．この値は，例題2のθの値0.0012に0.004112870を足したものであるが，これは問題2を解いて得られた時の取引コストである．例題1と例題2を同じレベルで比較するためにθの値にあらかじめ取引コスト分を上乗せしている．

例題2：取引コスト$h_i(y)>0$の場合
$\theta=0.0012, C=100$（単位：100万円）とおく．取引コスト$h_i(y)$は表2に示す.

例題1は，取引コストが0であるので，問題$\mathbf{P^A}$の条件式部分が簡単になり，EXCELソルバーを用いて解くことができる．そこでは，キューブウォークで解いて得られた結果と同じものが得られた．一方，取引コストがある場合は，EXCELソルバーでは解くことができない．しかし，キューブウォークを用いた場合，1時間以内で解を得ることができた．その解が表3のポートフォリオ3である．EXCELソルバーでは，取引コストがない場合しか解くことができないので，取引コストがある場合でも，取引コストがない場合の解を用いるしか方法がない．そこで，ここでは，例題1のポートフォリオ1を用い，それに取引コストを考慮したものと比較する．例題2において，ポートフォリオ1の時の収益は0.06783（単位：100万円），取引コストが0.4634である．ポートフォリオ3の時の収益は，0.12，取引コストが0.411287である．ポートフォリオ3では，取引コストを考慮しているため，扱う株が4銘柄に減っている．従って，例題2のポートフォリオ1と比較して，低い取引コストになっている．ポートフォリオ3の収益と取引コストを足すと0.531287となり，ポートフォリオ2の収益と一致する．

あるキューブサイズρにおいて同じ解が得られた場合，ρをさらに小さくし解の探索を続ける．ρが充分小さくなればそこで解の探索を終了する．表4は，例題2におけるキューブウォークによる解探索の状況を示したものである．

4. インデックスファンド問題

ここでは，もう一つのポートフォリオ最適化問題としてインデックスファンド問題を取り上げる．インデックスファンド問題とは，銘柄数を指定して，例えば，日経225などのインデックスに連動するようなポートフォリオを見つけ出す問題である．インデックスファンド問題も非凸の計画問題として定式化できるが，その制約条件式はなだらかではなく一般には扱いにくい．また，インデックスの構成銘柄数が大きなものは，一般に，過去のデータを直接使用する方法では解くことができない[11]．たとえば，過去36か月分の月次データを用いてインデックスファンド問題を解く場合，共分散行列の次元が36であることから，36以下の銘柄数で最適ポートフォリオを構成してしまう．この問題を解決するためには，マルチファクターモデルを使用する方法があるが，その方法では適切なファクターの設定が難しく，かつ，計算量も膨大であるという難点がある[8]．しかし，キューブウォークを用いると，過去のデータだけを直接使用して，任意の銘柄数で最適ポートフォリオを構成すること

表 1: 9 個の株の平均収益率と共分散

s		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	σ_{1s}	0.0968603	-0.0043274	0.0248268	-0.0001196	-0.0027374	-0.0050872	-0.0054762	0.0368303	-0.0002028
	σ_{2s}	-0.0043274	0.0034759	-0.0006917	0.0025366	0.0026727	0.0025228	0.0022296	-0.0011005	0.0005767
	σ_{3s}	0.0248268	-0.0006917	0.0118839	0.0019899	0.0000869	-0.0007141	-0.0004485	0.0135044	0.0000012
	σ_{4s}	-0.0001196	0.0025366	0.0019899	0.0042978	0.0031978	0.0028226	0.0037204	0.0018567	0.0010271
σ_{is}	σ_{5s}	-0.0027374	0.0026727	0.0000869	0.0031978	0.0058643	0.0038417	0.0045625	0.0004330	0.0005773
	σ_{6s}	-0.0050872	0.0025228	-0.0007141	0.0028226	0.0038417	0.0059692	0.0057708	-0.0008117	0.0007222
	σ_{7s}	-0.0054762	0.0022296	-0.0004485	0.0037204	0.0045625	0.0057708	0.0087390	-0.0004513	0.0009612
	σ_{8s}	0.0368303	-0.0011005	0.0135044	0.0018567	0.0004330	-0.0008117	-0.0004513	0.0204319	0.0001085
	σ_{9s}	-0.0002028	0.0005767	0.0000012	0.0010271	0.0005773	0.0007222	0.0009612	0.0001085	0.0007982
μ_s		-0.00262	0.01469	-0.01005	0.01204	0.02921	0.02012	0.03464	-0.00384	0.00159

表 2: 取引コスト

約定金額（百万円）			取引手数料（百万円）		
	～	0.5	1.40%		
0.5	～	0.7	1.10 %	+	0.0015
0.7	～	1	0.90 %	+	0.0029
1	～	3	0.85%	+	0.0034
3	～	5	0.80%	+	0.0049
5	～	10	0.68%	+	0.0109
10	～	30	0.55%	+	0.0239
30	～	50	0.25%	+	0.1139
50	～		0.10%	+	0.1889

表 3: 例題の解

		例題 1 (取引コストなし)		例題 2 (取引コストあり)	
		Portfolio 1 (Excel Solver)	Portfolio 2 (Cube Walk)	Portfolio 1	Portfolio 3 (Cube Walk)
株式の購入割合	1	0.0076751	0.0076784	0.0076751	0.0120479
	2	0.0928814	0.0928792	0.0928814	0.0404247
	3	0.0303053	0.0303041	0.0303053	0.0
	4	0.0	0.0	0.0	0.0
	5	0.0987238	0.987194	0.0987238	0.1174520
	6	0.0	0.0	0.0	0.0
	7	0.0049755	0.0049800	0.0049755	0.0
	8	0.0	0.0	0.0	0.0
	9	0.7654390	0.7654389	0.7654390	0.8300754
分散		7.9874792E-04	7.9874792E-04	7.9874792E-04	8.1124813E-04
収益率		0.0053129	0.0053129	0.0006783	0.0012000
収益（百万円）		0.5312870	0.5312870	0.0678341	0.1200000
取引手数料（百万円）		0.0	0.0	0.4634529	0.4112870

表 4: キューブウォークによる解探索状況

繰り返し回数	ρ	$k(\boldsymbol{\xi})$	株式の購入割合 ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9
0			0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
1	0.5	1.119901453E-03	0.005	0.34	0.05	0.045	0	0.06	0	0	0.5
2	0.1	9.849503606E-04	0.014	0.292	0.056	0	0.024	0.035	0.029	0	0.55
3	0.1	9.223913111E-04	0.013	0.245	0.053	0	0.046	0.006	0.037	0	0.6
4	0.1	8.815725242E-04	0.012	0.219	0.037	0	0.046	0.001	0.035	0	0.65
5	0.1	8.514437142E-04	0.01	0.175	0.026	0	0.053	0.001	0.035	0	0.7
6	0.1	8.319789954E-04	0.011	0.13	0.014	0	0.061	0	0.035	0	0.749
7	0.1	8.232654741E-04	0.011	0.116	0.001	0	0.075	0	0.017	0	0.78
8	0.1	8.183741082E-04	0.015	0.092	0	0	0.085	0	0.017	0	0.791
9	0.1	8.157555715E-04	0.015	0.079	0.001	0	0.102	0	0.007	0	0.796
10	0.1	8.136463383E-04	0.013	0.065	0	0	0.108	0	0.004	0.001	0.809
11	0.1	8.126471224E-04	0.014	0.048	0	0	0.117	0.001	0	0.001	0.819
12	0.1	8.126471224E-04	0.014	0.048	0	0	0.117	0.001	0	0.001	0.819
13	0.01	8.114442026E-04	0.0127	0.0491	0.0001	0	0.1156	0	0	0	0.8225
14	0.01	8.113144777E-04	0.0123	0.0453	0.0001	0	0.1164	0	0	0	0.8259
15	0.01	8.112794704E-04	0.0121	0.0434	0.0001	0	0.1168	0	0	0	0.8276
16	0.01	8.112643664E-04	0.0119	0.0415	0.0001	0	0.1172	0	0	0	0.8293
17	0.01	8.112643664E-04	0.0119	0.0415	0.0001	0	0.1172	0	0	0	0.8293
18	0.001	8.112518889E-04	0.0122	0.04103	0.00001	0	0.11738	0	0	0	0.82938
19	0.001	8.112487314E-04	0.01204	0.04091	0	0	0.11732	0	0	0	0.82973
20	0.001	8.112484877E-04	0.01202	0.04072	0	0	0.11736	0	0	0	0.8299
21	0.001	8.112484877E-04	0.01202	0.04072	0	0	0.11736	0	0	0	0.8299
22	0.0001	8.112482310E-04	0.012055	0.040643	0	0	0.117398	0	0	0	0.829904
23	0.0001	8.112481981E-04	0.012051	0.040605	0	0	0.117406	0	0	0	0.829938
24	0.0001	8.112481732E-04	0.012047	0.040567	0	0	0.117414	0	0	0	0.829972
25	0.0001	8.112481558E-04	0.012051	0.040533	0	0	0.117425	0	0	0	0.829991
26	0.0001	8.112481417E-04	0.012047	0.040495	0	0	0.117433	0	0	0	0.830025
27	0.0001	8.112481373E-04	0.012056	0.040463	0	0	0.117446	0	0	0	0.830035
28	0.0001	8.112481332E-04	0.012054	0.040444	0	0	0.11745	0	0	0	0.830052
29	0.0001	8.112481310E-04	0.012052	0.040425	0	0	0.117454	0	0	0	0.830069
30	0.0001	8.112481310E-04	0.012052	0.040425	0	0	0.117454	0	0	0	0.830069
31	0.00001	8.112481931E-04	0.0120482	0.040428	6E-07	0	0.117452	0	0	0	0.8300715
32	0.00001	8.112481267E-04	0.0120481	0.040427	0	0	0.1174516	0	0	0	0.8300737
33	0.00001	8.112481267E-04	0.0120479	0.0404247	0	0	0.117452	0	0	0	0.8300754

ができる．ここで例えば，日経225のようなインデックスの収益率をR_0とし，Rをポートフォリオ$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$の収益率$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \xi_i$とする．ここで，各$R_i$は，銘柄$i$に対する収益率である$(i = 1, 2, \ldots, n)$．また，$\mu_i$は株$i$の平均収益率$E[R_i]$を表し，$\sigma_{is}$は，株$i$と株$s$の共分散$E[(R_i - \mu_i)(R_s - \mu_s)]$を表す．このとき，インデックスファンド問題$\mathbf{P^B}$は次式のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P^B} : \text{minimize} \quad S(\boldsymbol{\xi}) &= E[(R_0 - R)^2] \\
&= \mu_0^2 + \sigma_{00} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(\mu_i\mu_s + \sigma_{is})\xi_i\xi_s - 2\sum_{i=1}^{n}(\mu_0\mu_i + \sigma_{0i})\xi_i, \\
\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n}\xi_i &= 1, \\
\sum_{i=1}^{n} z_i(\xi_i) &= q, \\
\xi_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}
$$

ここで，インデックスに対する銘柄番号を0とし，

$$\mu_0 = E[R_0], \sigma_{0s} = E[(R_0 - \mu_0)(R_s - \mu_s)] \quad (s = 0, 1, \cdots, n)$$

とおいた．また，銘柄iの株が選択されるかされないかを表す関数を，

$$z_i(\xi_i) = \begin{cases} 0(\xi_i = 0) \\ 1(\xi_i > 0) \end{cases}$$

とし，選択する株の銘柄数をqとおいた．上記のインデックスファンド問題は2つの等号制約条件式を持つので，前節と同様に，それらを4つの不等号制約条件式に置き換えることによりISC法を適用する．

$$
\begin{aligned}
&1) \sum_{i=1}^{n}\xi_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} z_i(\xi_i) \leq q \quad 2) \sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} z_i(\xi_i) \leq q \\
&3) \sum_{i=1}^{n}\xi_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} z_i(\xi_i) \geq q \quad 4) \sum_{i=1}^{n}\xi_i \geq 1, \sum_{i=1}^{n} z_i(\xi_i) \geq q
\end{aligned}
$$

表5は，1995年4月から1998年3月までの36ヶ月分の月次収益率データを用いて，銘柄数を50に指定してキューブウォークで求めた日経225に連動する最適ポートフォリオである．繰り返しになるが，通常は36ヶ月分の月次データからは36銘柄数以下のポートフォリオしか求めることはできない．逆に，50銘柄のポートフォリオを構成するためには，一般に，50か月分の月次データが必要である．図2は，表5の日経225の36ヶ月間の月次収益率の変化と最適ポートフォリオの結果を示したものである．また，それらの差をグラフにしたものが図3である．これを見ると，$\pm$ 0.0001の範囲内で日経225に連動するポートフォリオが得られていることがわかる．マルチファクターモデルを用いた場合，$\pm$ 0.3程度の範囲で連動するポートフォリオしか得られない現状から考えれば，$\pm$ 0.0001の精度は非常に高いといえるであろう．実際，このとき得られた目的関数値 の値は，0.34×10^{-9}であり，ほぼ完璧に日経225に連動している．

表 5: 銘柄数 50 の時の最適ポートフォリオ

極洋	フジタ	ハザマ	明治製菓	明治乳業
0.002088273	0.00470026	0.00464829	0.01244593	0.014413948
アサヒビール	ホーネン	ユニチカ	富士紡績	東レ
0.01966492	0.00047292	0.009010957	0.02889641	0.01601386
クラレ	北越新聞	コニカ	東燃	日本電工
0.01590738	0.02785044	0.031024825	0.01178447	0.00731215
三井金属	東邦亜鉛	三菱マテリアル	古河機械金属	古川電工
0.04493017	0.011930388	0.006691728	0.00468365	0.003317503
オークマ	井関農機	クボタ	千代田化工建設	日本ピストンリング
0.015782296	0.018327406	0.043699771	0.002065204	0.022285869
光洋電子工業	三菱電機	沖電気	シャープ	ソニー
0.014703646	0.03491079	0.00041926	0.018233999	0.00811874
パイオニア	トヨタ	日野	マツダ	スズキ
0.056174238	0.009019787	0.022639504	0.011492036	0.010138051
キャノン	リコー	凸版印刷	東京三菱銀行	三和銀行
0.02402694	0.048597397	0.030843864	0.01768322	0.04817458
三菱信託銀行	野村證券	三菱地所	小田急電鉄	東京電力
0.035395272	0.008974804	0.02151214	0.02502803	0.01165208
中部電力	関西電力	東京ガス	大阪ガス	東京ドーム
0.00344808	0.030293517	0.005100127	0.06962056	0.05385032

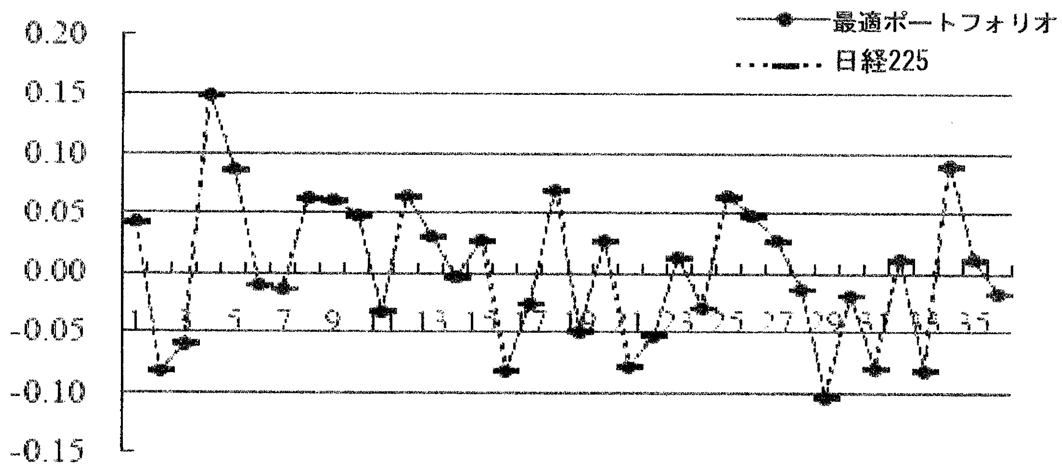

図 2: 日経 225 の 36ヶ月間の月次収益率の変化と最適ポートフォリオ

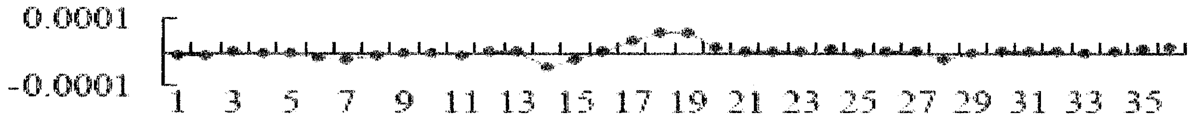

図 3: 日経 225 の月次収益率の変化と最適ポートフォリオの差

5. インデックス＋αファンド問題

前節では，非常に高い精度でインデックスに連動するポートフォリオが得られることを示した．一般に，このように高い精度でインデックスに連動するポートフォリオを組むだけでも非常に難しいことであるが，キューブウォークを用いると，インデックスに対する常勝ファンド（インデックスを常に上回るようなポートフォリオ）を求めることも可能である．この問題をインデックス $+\alpha$ ファンド問題と呼ぼう．すなわち，この問題は，前節の問題 $\mathbf{P^B}$ において，インデックスの月次収益率 R_0 を $R_0+\alpha$ で置き換えたものである．このとき，α の値をどのように設定するかが問題である．通常は 0 から少しずつ増加させ，それ以上増加させると連動するような解が得られない状態になるまで繰り返し問題を解くという方法が考えられる．しかし，この方法は，効率的ではない．そこで，この問題の目的関数が，

$$S(\boldsymbol{\xi}) = V[R_0 - R] + (E[R_0] - E[R])^2$$

と，書き換えられることに注目し，その第一項の分散 $V[R_0-R]$ だけを最小にするようなポートフォリオを求める．すると，もちろん第二項は無視して解くわけであるから，平均は異なるが分散だけがインデックスと連動するようなポートフォリオが得られる．このとき，平均がインデックスより上回るものがあれば，その差が α の最小値の目安となる．また，平均がインデックスより上回るものがない場合は，そのポートフォリオを構成している銘柄のうち，常にインデックスを下回っているようないくつかの銘柄を強制的に解からはずすことにより，平均がインデックスを上回るようなポートフォリオを得ることができる可能性がある．

図 4 は，日経 225 の 36ヶ月間の月次収益率と，それを常に上回り，かつ，連動するようにキューブウォークで得られた二つのポートフォリオの結果を示している．図 4 の中のポートフォリオ 1 は，α の値を 0.004 に指定して求めたインデックス＋αファンドの解であり，ポートフォリオ 2 は，分散のみを最小化して求めたインデックス＋αファンドの解である．このケースでは，分散のみを最小化するだけでインデックスを大きく上回るような解（ポートフォリオ 2）が得られた．これらの結果とインデックスとの差をグラフにしたものが図 5 である．これを見ると，どの時点においても，非常に安定した形で日経 225 を上回るポートフォリオが求められていることがわかる．実際，このとき得られた目的関数値 $S(\boldsymbol{\xi})$ の値は，ポートフォリオ 1 の場合は 0.57×10^{-9}，ポートフォリオ 2 の場合は 0.32×10^{-9} と，ほぼ完璧に日経 225$+\alpha$ と連動しており，すなわち，日経 225 よりも平均それぞれ 0.004，0.0045 程度上回る月次収益率が得られている．

6. むすび

この論文では，二つのタイプの非凸のポートフォリオ最適化問題を対話型改良代理制約法を用いて解いた．一つ目のマーコヴィッツ平均分散問題は，従来の方法では解くことが非常に難しいと考えられていたが，我々が提案した手法を用いることで，このタイプの問題を効果的に解くことができることを示した．もう一つのインデックスファンド問題においても我々の手法の有効性を示すことができた．しかし，今回はキューブサイズを経験的に決定したが，将来の課題として，システマティックにキューブサイズを決定する手法の開発が残されている．

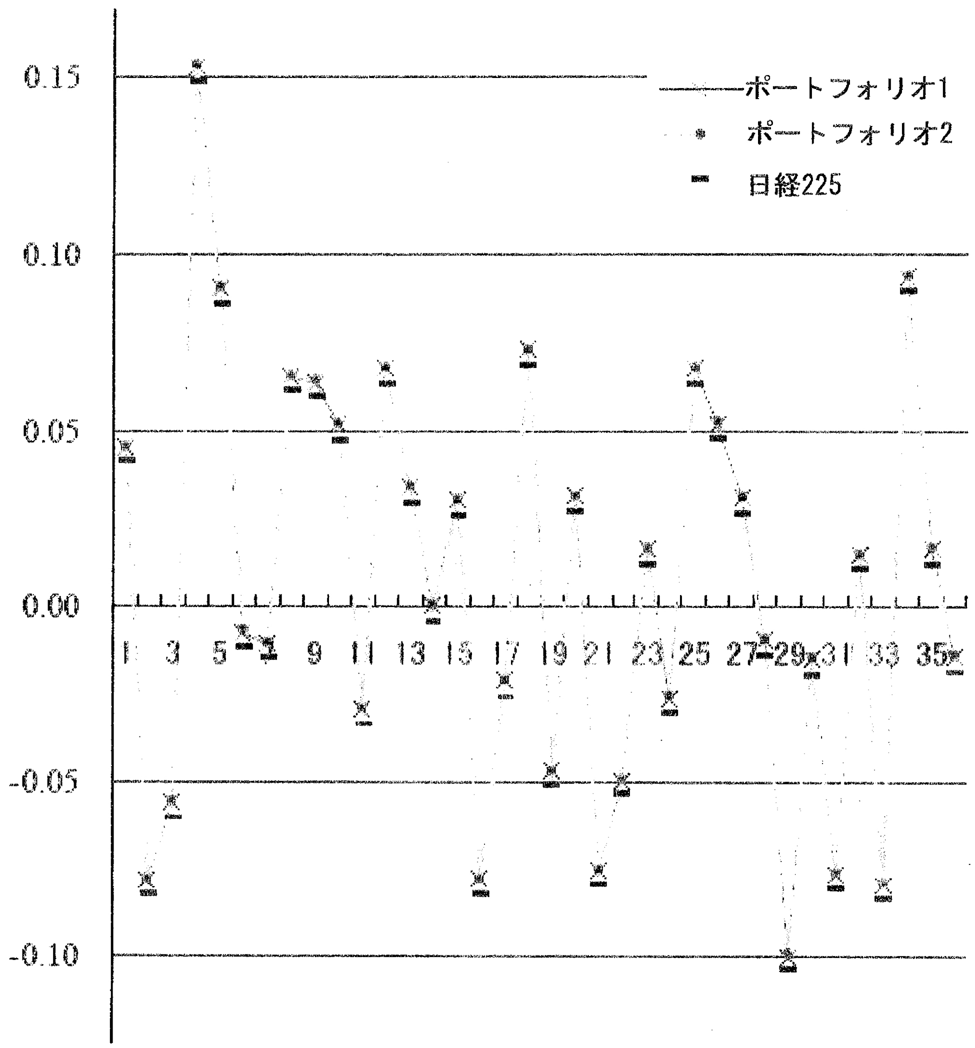

図 4: 日経 225 の 36ヶ月間の月次収益率の変化とその常勝ポートフォリオ

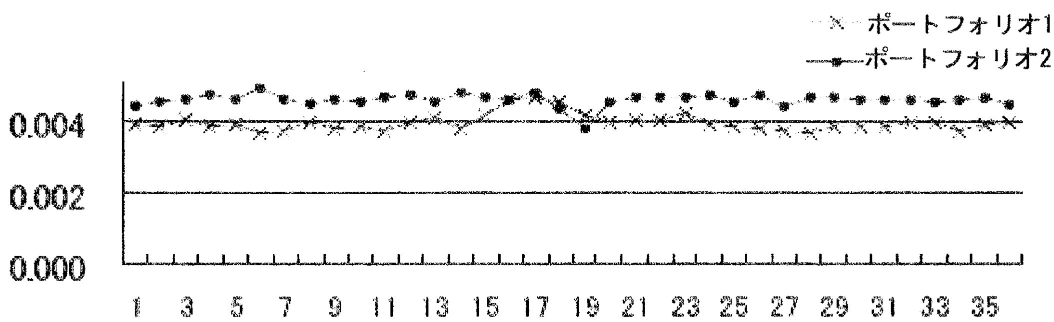

図 5: 日経 225 の月次収益率の変化と常勝ポートフォリオの差

参考文献

[1] J. E. Beasley, N. Meade, T.-J. Chang: An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *European Journal of Operational Research*, **148** (2003), 621?643.

[2] A. A. Gaivoronski, S. Krylov, N. van der Wijst: Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. *European Journal of Operational Research*, **163** (2005), 115-131.

[3] F. Glover: A Multiphase-Dual algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem. *Oper. Res.*, **13** (1965), 879-919.

[4] F. Glover: Surrogate constraints. *Oper. Res.*, **16** (1968), 741-749.

[5] M. Hikita, Y. Nakagawa, K. Nakashima, H. Narihisa: Reliability optimization of systems by a surrogate-constraints algorithm. *IEEE Transactions on Reliability*, **R-41** (1992), 473-480.

[6] 甲斐良隆, 仲川勇二, 田畑吉雄: 改良代理制約法の非分離形非凸計画問題への応用. 電子情報通信学会論文誌, **J88-A** (2005), 422-424.

[7] H. Konno, H. Yamazaki: Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market. *Management Sci.*,**37** (1991), 519-531.

[8] 今野浩：理財工学〈1〉—平均・分散モデルとその拡張（日科技連出版社，1995）

[9] Y. Nakagawa: A reinforced surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming. *RIMS, Kyoto University*, **1068** (1998), 194-202.

[10] Y. Nakagawa: An improved surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming. *Journal of Operations Research Society of Japan*, **46** (2003), 145-163.

[11] 野村証券株式会社金融研究所: 株式運用と投資戦略—株式ポートフォリオ運用の理論と実務 (金融財政事情研究会， 2002)

[12] Y. Tabata, E.Takeda: Bicriteria optimization problem of designing an index fund. *Journal of the Operations Research Society*, **46** (1995), 1023-1032.