射影平面曲線の補空間の基本群について

関西学院大学大学院理工学研究科
物理学専攻　宮西研究室　土佐祥一

本論文では，複素射影平面 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上の平面 4 次曲線 $\overline{C} : F(X,Y,Z) = 0$ の補空間 $\mathbb{P}^2 \setminus \overline{C}$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{C})$ を計算することを目標とした。定義方程式 $F(X,Y,Z) = 0$ を既約多項式の積に分解したとき，重複因子は現れない（被約）と仮定する。

$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{C})$ を計算するには，次のような方法を組み合わせて行う。

- 定義方程式を標準形に書いて計算する方法。
- Zariski-van Kampen の定理を用いる方法。
- 管状近傍を用いる方法。
- ホモロジー計算を行う方法。
- ブローアップを行ってから計算する方法。

次数が 3 次以下の既約な曲線については，補空間の基本群は位数が曲線の次数に等しい巡回群（可換群）であるが，既約な 4 次曲線に関しては，次の定理があることが知られている。

定理　既約な射影平面 d（$d = 3, 4$）次曲線 $\overline{C}$ が特異点を持つとき，

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{C}) \cong \begin{cases} \left\langle a, b \middle| \, aba = bab, \, a^2b^2 = 1 \right\rangle & (d = 4 \text{ で，} \overline{C} \text{ が 3 つの尖点を持つとき}) \\ \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$\left\langle a, b \middle| \, aba = bab, \, a^2b^2 = 1 \right\rangle$ は位数が 12 の 2 面体群で，それは非可換群である。

本論文では，被約な複素射影平面 4 次曲線の分類のために必要な知識を最初から説明した。さらに，ところどころには文献の丁寧な解説と補足をしながら，これらの知識をもとにして，被約な複素射影平面 4 次曲線の分類を最初に行った。

1. $F(X,Y,Z) = 0$ が可約のときは，分類は 14 種類である。
2. $F(X,Y,Z) = 0$ が既約で特異点を持つ場合は特異点は高々3 個で，分類は 17 種類である。
3. $F(X,Y,Z) = 0$ が既約で非特異な場合は定理によって構造が分かる。

それぞれの場合の $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{C})$ を計算した結果について論じる。

文献

徳永浩雄 - 島田伊知朗：基本群と特異点，特異点の数理 4「代数曲線と特異点」の第 I 部，共立出版（2001）