非ガウス型構造VARモデルの最尤推定
—モンテカルロ実験による有限標本パフォーマンスの評価*—

永　田　修　一

要　旨

近年、構造VARモデルの撹乱項が通常と異なる性質を持っている場合に、それを利用して制約を置くことなくモデルの識別や推定を行う研究が盛んである。本稿では（Lanne et. al. 2015）によるモデルの撹乱項に非ガウス型分布を仮定した最尤推定に注目し、その有限標本での性質をモンテカルロ実験により調べる。さまざまな標本サイズ設定の下で、非ガウス性や独立同一分布に従うといったモデルの撹乱項についての条件を緩めた場合の推定と関連する検定のパフォーマンスについて調べ、結果を報告する。

キーワード：非ガウス型構造VARモデル（Non-Gaussian Structural VAR Model）

I　はじめに

Sims（1980）以来、VAR（Vector-Auto-Regressive）モデルはファイナンスやマクロ経済の計量分析における最も標準的な分析ツールの１つである。VARモデルおよびそれに基づくインパルス応答分析やGrangerの因果性の検定といった方法は、経済学に限らず社会科学や自然科学のさまざまな分野で、複数の時系列間の関係を分析する際に広く用いられている。

ただし、VARモデルは各変数について他の変数の過去の値からの影響をモデリングしていることには注意が必要である。つまり、変数間に同時点で

* 本論文の作成に当たり、前川功一教授、Peter Phillips教授から貴重なご指摘をいただいた。記して感謝する。

の影響がある場合には VAR モデルによる分析では十分ではない。たとえば（Hyvärinen et. al. 2010）にあるように、変数間に同時点での影響がある場合にこれを無視して VAR 分析を行うと、実際には存在しない影響を検出する場合がある。したがって経済やファイナンスの時系列データのように同時点間になんらかの関係が想定されるようなデータの分析を行う場合、VAR モデルではなく構造 VAR モデルを用いて同時点での変数間の関係も考慮に入れた分析を行うほうがより望ましいといえよう[1)]。

正規分布を仮定する構造 VAR モデルは、構造方程式モデリング（Structural Equation Modeling, SEM）においてよく知られている通り、識別性（Identification）の問題を抱えている。ここでの識別性とは、同じようなデータを生成できるモデルの候補が複数あり、モデルを一意的に特定できないことをいう。通常、この問題をクリアするために先験的な情報や経済学的な観点から、変数の序列、係数の符号や値に何らかの制約をおく。しかし（前川・小村・永田 2015）の冒頭で述べられているように、本来 VAR モデルを分析に用いる利点は、データが持つ情報を利用することで経済学的な理論に対して中立な立場から検証を行うことにあり、先験的な情報や経済理論から導いた仮定の利用はその趣旨からは矛盾しているといえる。したがって実際の分析に際して、構造 VAR モデルを構築する段階ではできるだけ制約をおかない、あるいはもし制約をおくのであれば、その妥当性をデータを用いて検定をしたいというのは自然な発想であろう。

この要請に対して、これまでさまざまな角度から構造 VAR モデルの識別性を確保する方法が研究されてきた。たとえば撹乱項の分散に不均一性を仮定することで、モデルの識別が可能になることが知られている。ファイナンスや経済で取り扱う時系列データの分散不均一性は古くから指摘されており、この特徴は、（単純な均一分散の場合と比べ）データの分析を難しくする要

1） もちろん同時点の影響は撹乱項に含め、撹乱項に相関がある VAR モデルとして分析を進めてもよいが、それは構造 VAR モデルを考えるのと本質的に同じであることを２節で示す。

因と考えられてきた。ところが、構造 VAR モデルの撹乱項の性質としてみた場合、この不均一分散というデータの特異ともいうべき性質が問題の解決につながるという事実は大変興味深い。このアプローチに関する代表的な研究には、外生的に分散が変動するモデルを扱った（Rigobon 2003)、撹乱項が多変量 GARCH（Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity）モデルに従うと仮定することで識別を可能にした（Normandin and Phaneuf 2005）がある。これらの手法はよく引用されており、それぞれの手法についてそれらをさらに発展させた方法が研究されている。そのほか、撹乱項の分散がマルコフ・スイッチング・モデルに従っていると仮定することにより識別性を確保しようとする研究もある。これら一連の構造 VAR モデルの識別と撹乱項分散の不均一性に関する研究については（Lütkepohl 2013）や（Lütkepohl and Velinov 2016）で解説がなされている。

本稿では、構造 VAR モデルの識別性を確保する方法として撹乱項の非ガウス性を利用するアプローチについて議論する。このアプローチではモデルの撹乱項が非ガウス型分布、すなわち何らかの正規分布ではない分布に従うと仮定することで、識別や最尤推定が可能になる。この非正規な分布を利用する方法は、撹乱項の性質が特異であることを識別に積極的に利用するという意味では、形は違えど上述の不均一分散を利用する研究と類似のアイデアともいえよう。

ここでは特に、（Lanne et. al. 2015）によるモデルの撹乱項に非ガウス型分布を仮定した最尤推定に注目する。非ガウス型分布を識別に利用する研究は（Lanne et. al. 2015）が初めてではなく、信号の分離や SEM の識別に関する研究として独立成分分析（ICA）とよばれる分野で盛んに行われてきた。近年 ICA は時系列分析への応用もなされており、例えば（Shimizu et al. 2006）が SEM の枠組みで提案した LiNGAM と呼ばれる手法を構造 VAR モデルの枠組みに拡張した（Hyvarinen et. al. 2010）による VAR-LiNGAM がある。（Moneta et. al. 2013）は実証分析によりミクロ・マクロどちらの経済時系列データの分析においても VAR-LiNGAM が有用であることを示してい

る。ただし、注意したいのは（Hyvarinen et. al. 2010）の SVAR 推定方法は構造行列は下三角行列であるとしている点で、これは再帰的構造と呼ばれやや制約的な仮定である。（Lanne et. al. 2015）の方法は彼ら自身が述べているように、この下三角行列の仮定を緩め、より一般の構造行列でも識別と推定が可能であることを示したところに大きな特徴があるといえる。

本稿の目的は（Lanne et. al. 2015）の方法について、シミュレーション実験により、現実的な状況における利用可能性を明らかにする事である。（Lanne et. al. 2015）は彼らの提案手法について、通常の最尤推定に関する研究と同様、漸近的、すなわち標本が非常に大きいときの妥当性を解析的に証明している。しかしファイナンスやマクロ経済の実証分析で実際に手に入るデータの標本の大きさは有限であり、したがって、標本が小さいとき上記の推定方法がどのような振る舞いをするのか調べておくことは一定の意味があると考えられる。シミュレーションではそのほか３つの観点から（Lanne et. al. 2015）の手法の有効性を調べる。

第１の観点は非正規性の程度がパフォーマンスへ与える影響の評価である。（Lanne et. al. 2015）では非ガウス性の程度と手法のパフォーマンスの関係は特に論じられていない。しかし撹乱項に非正規性を仮定することで成立する方法である以上、非正規性の程度がこの手法のパフォーマンスに影響をもたらすはずであり、したがって、どの程度の非ガウス性があるときにこの手法は“使える”手法といえるのか、明らかにすることも本稿の目的である。具体的には構造撹乱項が独立に Student の t 分布に従う場合を考え、t 分布の自由度を調節することで分布の非正規の程度を操作し、その推定パフォーマンスへの影響をみる。

第２の観点は独立同一な非正規分布という条件がパフォーマンスへ与える影響の評価である。経済やファイナンスの時系列の分布は撹乱項が分散不均一性をもっていることがしばしば指摘されるが、分散が不均一であれば、その分布は非正規分布になる。たとえば撹乱項が GARCH 過程である場合、条件付分布は正規分布であっても、無条件分布はより裾が厚い分布になること

が知られている。したがって、残差の分布が一見非正規であったとしても、それは独立同一な非正規分布からの実現値ではなく、GARCH 過程の実現値である可能性もあるといえる。そこで、本稿では撹乱項が独立な非正規分布ではなく GARCH 過程である場合に（Lanne et. al. 2015）の手法を適応した場合のパフォーマンスをシミュレーションにより評価する。この分析は、非ガウス型分布を仮定した最尤推定が、その前提条件を満たさない場合にどの程度有効であるのかその頑健性を調べることが目的である。この分析では（Normandin and Phaneuf 2005）による多変量 GARCH 過程の性質を利用した最尤法をベンチマークとして、これと比較する。つまりここでの目的は、構造パラメータの推定を考えるとき、撹乱項分布の非正規性にのみ注目をすれば十分なのか、あるいは GARCH 構造をしているのならばやはりそれを踏まえつつ推定するべきなのか、調べることにある。

第 3 は、統計的検定を行った場合のパフォーマンスの評価である。一般に、パラメータについて最尤推定が実行可能で一致性や漸近正規性が成立するとき、対応するワルド（Wald）検定、尤度比（likelihood ratio）検定、そしてラグランジュ乗数（Lagrange multiplier）検定の 3 つの検定が構成可能である。ここではこれらの検定の応用例として、変数が再帰的構造をもつかどうかの検定を考える。この検定は（Hyvarinen et. al. 2010）による VAR-LiNGAM が適応可能か、つまり真の構造行列に下三角であるという制約条件をおく妥当性を検定する。ここでは上記の 3 つの漸近的検定について、標本数が有限である場合に検定の実際のサイズや検出力はどうなのか、そのパフォーマンスをシミュレーション実験により評価する。

本稿の残りの構成は以下の通りである。第 2 節では構造 VAR モデルとその推定方法について紹介する。ここでは非正規分布を仮定した方法と多変量 GARCH を仮定した方法の 2 つを扱う。第 3 節ではシミュレーションの設定を説明したのち、実験の結果を報告する。実験のデータ生成方法として構造撹乱項が独立な t 分布に従う場合と多変量 GARCH 過程にしたがう場合を考え、それぞれのデータについて（Lanne et. al. 2015）の方法を用いた場合の

構造行列の推定の精度を調べる。4 節は本稿のまとめである。

II　構造 VAR モデルとその推定方法

2.1　構造 VAR モデル

K 変量の p 次構造 VAR モデルは以下のように定められる。

$$y_t = \mu + \Gamma_0 y_t + \Gamma_1 y_{t-1} + \ldots + \Gamma_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{1}$$

ただし、構造撹乱項 ε_t は $E[\varepsilon_t] = 0,\ E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma_\varepsilon$ である確率変数ベクトルであるとする。Σ_ε は対角行列、すなわち ε_t の各変数間は無相関であるとする。

前節で述べたように構造 VAR モデルと撹乱項に相関がある VAR モデルは密接な関係がある。上記の右辺第 1 項を移項すると

$$(I_K - \Gamma_0) y_t = \mu + \Gamma_1 y_{t-1} + \ldots + \Gamma_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

とかけ、$B = (I_K - \Gamma_0)^{-1}$ とおくと

$$y_t = B\mu + B\Gamma_1 y_{t-1} + \ldots + B\Gamma_p y_{t-p} + B\varepsilon_t$$

となる。$A_\mu = B\mu,\ A_i = B\Gamma_i$ とすれば、(1)式で与えられたモデルの誘導形

$$y_t = A_\mu + A_1 y_{t-1} + \ldots + A_p y_{t-p} + u_t \tag{2}$$

が得られる。ただし $u_t = B\varepsilon_t$ である。このように SVAR モデルは誘導形で表現した場合に VAR モデルとなるが、(1)の構造撹乱項 ε_t とは違い、誘導形の撹乱項 u_t の系列間には相関があることには注意が必要である。

ここでキーとなるのは、構造行列 B の推定である。誘導形(2)の各パラメータ行列 $A_\mu,\ A_1,\ \ldots,\ A_p$ は通常の VAR モデル同様、最小 2 乗法で推定可能である。つまり行列 B が正しく識別でき、推定可能であればその結果を用いて構造形のパラメータ $\mu,\ \Gamma_0,\ \Gamma_1,\ \ldots,\ \Gamma_p$ の推定も行うことができる。

2.2　非ガウス撹乱項を仮定した最尤法

(Lanne et. al. 2015) は K 変量の撹乱項 ε_t が独立に非正規な分布に従うと仮定することにより、モデル(1)が識別可能であり、係数が最尤推定できることを示した[2)]。彼らは論文内で構造 VAR モデルのパラメータすべてを一度

に推定する方法と、まず VAR パラメータのみを最小 2 乗推定しその結果得られる残差系列 $\hat{u}_t$ から構造パラメータ B のみを推定する 2 段階の推定方法の 2 つを論じているが、ここでは後者のみを紹介する。

今、行列 B の各成分など興味のあるパラメータをまとめたベクトルを θ とし i 番目の変数の撹乱項の密度関数と分散はそれぞれ $f_i(x)$, σ_i^2 とする。このとき最尤推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$ は以下のように定義される。

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\mathop{\mathbf{arg\,max}}_{\theta} L(\theta),$$

ただし $L(\theta)$ はモデルの尤度関数で、この関数を最大化する $\hat{\theta}$ は以下の対数尤度関数 $l(\theta)$ を最大化すると $\hat{\theta}$ と同じである。

$$l(\theta)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{K}\log f_i(\sigma_i \iota' B^{-1}\hat{u}_t)-T\log(\det B)-T\sum_{i=1}^{k}\log(\sigma_i)$$

であり ι は $K\times 1$ の単位ベクトルである。

以下ではこの方法を非ガウス型の最尤法と呼ぶことにする。

2.3　GARCH 撹乱項を仮定した最尤法

ここでは、(Normandin and Phaneuf 2005) による多変量 GARCH モデルを用いた最尤法を解説する。

今、誘導形撹乱項 u_t の t 期の条件付分散 $\Sigma_{u,t|t-1}$ は

$$\Sigma_{u,t|t-1}=B\Sigma_{\varepsilon,t|t-1}B'$$

である。ただし $\Sigma_{\varepsilon,t|t-1}$ は対角行列でその (k, k) 成分は

$$\sigma_{k,t|t-1}^2=w_k+\sum_{j=1}^{p}\alpha_{kj}\sigma_{k,t-1|t-2}^2+\sum_{j=1}^{q}\beta_{kj}\epsilon_{k,t-1}^2$$

である。このような独立な GARCH 系列の線形結合による多変量時系列のモデリングは、(van der Weide 2002) に従って GO-GARCH モデルと呼ばれる。

ここで、興味のあるパラメータ (GARCH パラメータと行列 B の各成分)

2) より厳密には、撹乱項の各分布は非ガウス型であれば異なる分布でよく、さらに正規分布に従う撹乱項の系列が 1 つだけであれば含まれていてもよい。詳細は (Lanne et. al. 2015) を参照。

をすべてまとめたベクトルを η とする。

したがって、このとき最尤推定量 $\hat{\eta}_{\mathrm{GARCH}}$ は以下のように定義される。

$$\hat{\eta}_{\mathrm{GARCH}}=\underset{\eta}{\arg\max}\, L^G(\eta),$$

ただし $L^G(\eta)$ はモデルの尤度関数で、この関数を最大化する $\hat{\eta}$ は以下の対数尤度関数 $l^G l(\eta)$ を最大化する $\hat{\eta}$ と同じである。

$$l^G(\eta)=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\log\det(B\Sigma_{\varepsilon,t|t-1}B')+\hat{u}_t'(B\Sigma_{\varepsilon,t|t-1}B')\hat{u}_t\right]$$

である。

以下ではこの方法を GARCH 型の最尤法と呼ぶことにする。

Ⅲ　シミュレーション実験

3.1　実験の概要

この節ではまずシミュレーション実験を全体通して共通となる設定について説明をする。ここではもっとも単純なケースとして、以下のような $K=2$ で定数項がないラグ 1 の構造 VAR モデルを扱う

$$y_t=\Gamma_0 y_t+\Gamma_1 y_{t-1}+\varepsilon_t.$$

前節で議論したように構造 VAR モデルは $B=(I_2-\Gamma_0)^{-1}$、$A_1=B\Gamma_1$ とすることで、撹乱項に相関がある VAR モデル（誘導形）として書ける。

$$y_t=A_1 y_{t-1}+u_t$$

$$u_t=B\varepsilon_t,$$

このシミュレーション分析では誘導形のパラメータ行列を

$$A_1=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ 0.5 & 0.4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix} \tag{3}$$

と設定して分析を行う。

シミュレーション分析を通して A_1 行列の各成分および B の対角成分と（1, 2）成分は上記の値に固定する。B の非対角成分 b については、その値の影響もみるために 2 種類の値（0.2, 0.4）を用いてそれぞれ結果を報告する。

本シミュレーションでは第1節で述べたように ε_t の分布として、代表的な非ガウス型の分布である Student の t 分布を採用する。t 分布の自由度 v をさまざま変えることにより、データの非ガウス性の程度を操作し、推定方法と分布の非ガウス性の程度の関係を調べる。

標本の大きさは $T=(50, 100, 200, 400)$ とし、これらについて最尤法を用いる。シミュレーションは数値計算ソフトウェア Matlab を用いて行い、反復回数は2000回である。以下、シミュレーションの内容と結果を3つの小節に分けて報告する。

3.2　分析1

まず、前節で紹介した非ガウス型の最尤法のパフォーマンスを調べる。$b=(0.2, 0.4)$ の2つの設定について実験を行う。

表1：推定の結果（$b=0.4$）

v	5		10		15		20	
T	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$
(bias)								
50	0.055	−0.007	0.149	−0.067	0.173	−0.079	0.198	−0.095
100	0.024	−0.001	0.097	−0.035	0.148	−0.066	0.168	−0.086
200	0.009	0.000	0.050	−0.015	0.092	−0.034	0.135	−0.063
400	−0.001	0.005	0.021	−0.002	0.047	−0.011	0.081	−0.031
(MSE)								
50	0.132	0.105	0.264	0.184	0.282	0.196	0.316	0.216
100	0.068	0.055	0.176	0.126	0.241	0.165	0.262	0.177
200	0.024	0.022	0.101	0.082	0.169	0.124	0.232	0.158
400	0.008	0.008	0.053	0.044	0.106	0.084	0.154	0.116

表1は $b=0.4$ の場合の実験結果であり、推定の良さとして各セッティングの下でのバイアスと MSE（Mean Squared Error）を示している。（真値の大きさの違いは推定のパフォーマンスにあまり影響を及ぼさなかったので、$b=0.2$ のケースについては掲載しない。）表1からわかるように、$b_{2,1}$、$b_{1,2}$ どちらについても自由度が小さい、すなわちデータの非ガウス度が強い場合、

推定はうまくいく。また自由度に関わらず標本が大きくなるほど推定の精度は高くなり、これは理論的な結果と整合的である。

ところが自由度 v が大きくなるにつれパフォーマンスが低下する点には、注意が必要である。ここではその現象を指摘するにとどめ、実際の分析において非ガウスの程度が分析にどれほど影響を与えるのかは、分析３で検定のパフォーマンスについての実験を行うので、そこで議論する。

3.3 分析２

つづいて（Lanne et. al. 2015）が仮定した、撹乱項は独立同一な非正規分布に従うという条件が非ガウス型の最尤法のパフォーマンスへ与える影響を考える。第１節で述べたように、経済やファイナンスの時系列は撹乱項がGARCH 過程のような分散不均一性を示すと指摘されることが多々あるが、そのとき無条件分布は非正規分布になる。したがって、モデルの残差の分布（ヒストグラム）が一見非正規であったとしても、それは独立同一な非正規分布からの実現値ではなく、実際はたとえばGARCH 過程の実現値ということもあり得る。

この分析２では、非ガウス型分布を仮定した最尤推定が、その前提条件を満たさない場合にどの程度有効であるのかその頑健性を調べる。具体的には撹乱項がGARCH 過程である場合に非ガウス型の最尤法を適応した場合のパフォーマンスを評価する。つまりここでは、構造パラメータの推定を考える場合に撹乱項分布の非正規性にのみ注目をすれば十分なのか、それともGARCH 構造をしているのであれば、やはりそこに注目をするべきなのか、シミュレーションにより調べることにある。

GARCH 過程に従うような確率変数の無条件分布はわかっていないが、（Francq and Zakoian 2010）にあるように、その定常条件やパラメータとモーメントの関係はわかっている。

例えば、１変量時系列 x_t が GARCH(1, 1) モデルに従っているとする。

$$x_t = \sigma_t z_t \qquad z_t \sim \text{i.i.d.}(0,\ 1)$$

$$\sigma_t^2=\gamma+\alpha\sigma_{t-1}^2+\beta\epsilon_{t-1}^2$$

ただし、$\alpha>0,\ \beta>0,\ (\alpha+\beta)<1$ とする。このとき x_t の無条件の 2 次と 4 次のモーメントは以下の通り。

$$E[x_t^2]=\frac{\gamma}{(1-\alpha-\beta)},\quad E[x_t^4]=\frac{\gamma^2\kappa(1-(\alpha+\beta)^2)}{(1-\alpha-\beta)^2(1-\alpha^2\kappa-2\alpha\beta-\beta^2)}$$

ただし、κ は z_t の 4 次モーメントである。

したがって x_t の尖度は

$$k_x=\frac{\kappa(1-(\alpha+\beta)^2)}{(1-(\alpha+\beta)^2-(\kappa-1)\alpha^2)}$$

である。

ここでは z_t を標準正規分布とした上で上記の結果を適応し、先ほどの実験で用いた自由度 $v=(5,\ 10,\ 15,\ 20)$ の t 分布と同程度の無条件分布の尖度をもつ独立な 2 変量 GARCH(1, 1) 過程を生成し、これをモデルの撹乱項 ε_t として分析に用いた。

表 2-1：2 つの手法による推定のバイアスと MSE の比率（$b=0.4$）

v	5		10		15		20	
T	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$
(abs. bias ratio)								
100	1.76	0.26	3.51	0.67	4.99	1.44	4.35	1.18
200	0.99	0.25	4.68	1.03	5.33	1.57	8.94	2.42
400	0.70	0.12	5.46	0.93	10.99	2.37	14.46	3.84
800	0.02	0.03	1.67	1.69	6.03	7.04	6.18	3.84
(MSE ratio)								
100	1.32	0.89	2.02	1.47	2.74	1.97	3.18	2.47
200	0.75	0.50	1.86	1.41	3.30	2.45	4.51	3.51
400	0.27	0.21	1.47	1.19	3.85	3.19	6.19	5.07
800	0.05	0.05	0.74	0.74	3.70	3.31	9.38	8.43

表 2-1 と表 2-2 はそれぞれ $b=0.4$、$b=0.2$ の場合の実験結果である。ここでは標本の大きさは $T=(100,\ 200,\ 400,\ 800)$ としている。表内の各値は (1) 非ガウス型の最尤法、(2) GARCH 型の最尤法についてそれぞれバイア

表 2-2：2 つの手法による推定のバイアスと MSE の比率（b＝0.4）

v	5		10		15		20	
T	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$	$b_{2,1}$	$b_{1,2}$
（abs. bias ratio）								
100	0.75	0.06	1.13	0.14	2.43	0.76	1.41	0.37
200	0.38	0.09	0.97	0.34	1.21	0.37	1.77	0.78
400	0.04	0.04	0.48	0.14	1.01	0.44	1.04	0.35
800	0.02	0.02	0.34	0.07	0.41	0.03	1.13	0.33
（MSE ratio）								
100	0.84	0.81	1.21	1.21	1.67	1.59	1.90	1.94
200	0.46	0.41	0.95	0.94	1.59	1.60	2.17	2.15
400	0.14	0.16	0.64	0.66	1.36	1.34	2.29	2.36
800	0.03	0.04	0.34	0.36	1.06	1.10	2.48	2.51

スと MSE（Mean Squared Error）を計算し、その比をとったものである。バイアスについては絶対値をとっている。分母は GARCH 型の最尤法とした比率であり、したがって値が小さいほど、非ガウス型の最尤法が相対的によいことを示す。

表 2-1 と表 2-2 のどちらからもわかる通り、非ガウス度が大きいときには非ガウス型の最尤法はよいパフォーマンスを示す。この結果は撹乱項に強い非正規性が想定できる場合、時系列構造（GARCH）があることを無視して非ガウス型の最尤法で構造行列を推定してもうまくいく事を示している。

一方、非ガウス度が小さい場合、非ガウス型の最尤法はパフォーマンスが著しく低くなるが、もちろんその場合にも GARCH 型の最尤法は適応可能である。MSE を規準としてみた場合、構造パラメータの真値が大きいほど（b＝0.4）、より非ガウス性が小さい場合にも GARCH 型の最尤法が比較的よい。この結果から、実際のデータ分析を行う場合、撹乱項の非正規性が想定されてもその非正規の程度がそれほど強くない場合には時系列的な構造を調べてみるべきであり、GARCH 構造が想定できる場合には GARCH 型の最尤法を適応するべきであるといえる。

3.4　シミュレーション分析 3

最後に、非ガウス型の最尤法に基づいて統計的検定を行った場合のパフォーマンスについて評価を行った結果について報告する。撹乱項は分析 1 と同様 2 つの系列とも独立同一な t 分布から生成する。具体的には非ガウス型の最尤法に対応するワルド検定、尤度比検定、そしてラグランジュ乗数検定の 3 つの検定について、それらの有限標本でのサイズの精度や検出力の大きさを調べる。

ここではこれらの検定の 1 つの応用例として、非対角成分 $b_{1,2}$ が 0 であるかどうか、すなわち帰無仮説は $b_{1,2}=0$ の検定を行い、構造パラメータ行列が下三角行列かどうかを調べる。つまりこれは変数間に再帰的構造が仮定できるかどうかの検定であり、（Hyvarinen et. al. 2010）や（Moneta et. al. 2013）で使われている再帰的構造を仮定した VAR-LiNGAM を行ってよいかどうか、妥当性をチェックする検定であるともいえる。

パラメータ行列の真値は(3)式で定義した通りであり、撹乱項の分布は 2 つの系列とも独立同一な t 分布に従うとし、分析 1 同様、非ガウス性の程度を自由度を調節することで操作し、影響を調べる。

検出力を計算するために、ここでは以下のような 2 種類の帰無仮説に従わない状況を考えた。

ケース 1　　　　　ケース 2

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B_2=\begin{pmatrix}1 & b\\ b & 1\end{pmatrix}$$

ケース 1 は帰無仮説とは逆に、系列 2 の撹乱項が系列 1 に影響を与えているようなケース、ケース 2 は系列 1 の撹乱項から系列 2 へ影響があり、同時に系列 2 の撹乱項も系列 1 に影響を与えているようなケースである。これらケース 1 、ケース 2 について(3)式の B の代わりにそれぞれ B_1、B_2 を採用したデータのもとで検出力を計算して結果を報告する。

$b=0.4$ の場合について、分析結果をまとめたものが表 3-1 である。（真値

表3：検定のサイズ（b＝0.4）

v	5			10			15		
T	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM
（10%）									
50	0.56	0.14	0.98	0.60	0.07	0.94	0.59	0.02	0.94
100	0.53	0.14	0.99	0.61	0.12	0.96	0.63	0.06	0.96
200	0.49	0.13	0.99	0.59	0.13	0.99	0.64	0.11	0.98
400	0.49	0.12	1.00	0.58	0.13	1.00	0.64	0.12	1.00
（5%）									
50	0.49	0.08	0.98	0.55	0.02	0.94	0.54	0.00	0.94
100	0.45	0.07	0.99	0.55	0.05	0.96	0.58	0.02	0.96
200	0.41	0.07	0.99	0.52	0.06	0.99	0.59	0.05	0.98
400	0.42	0.07	1.00	0.52	0.07	1.00	0.59	0.06	1.00
（1%）									
50	0.38	0.01	0.98	0.44	0.00	0.94	0.45	0.00	0.94
100	0.33	0.01	0.98	0.43	0.00	0.96	0.49	0.00	0.95
200	0.30	0.02	0.99	0.42	0.01	0.99	0.50	0.01	0.98
400	0.29	0.01	1.00	0.39	0.02	1.00	0.48	0.01	1.00

の大きさの違いによるサイズの精度への影響はみられなかったので b＝0.2のケースについては掲載を省略した。）名目サイズを10%、5%、1%と設定した場合の、実際のサイズをシミュレーションによって求めている。

表3-1から明らかなように、シミュレーションの結果、検定のサイズの正確性という観点からは尤度比検定が最も安定した結果を示した。残りの２つの手法については、シミュレーションによるサイズと名目サイズが大きく乖離している。したがって、ここでは尤度比検定のみに絞り詳しくみてみる。尤度比検定はデータの自由度が5、すなわち最も非ガウス性が強いときはパフォーマンスは比較的良好である。しかし、非ガウス性が弱まるごとにサイズの精度は悪化し、自由度が15の場合には標本が大きい時のみ、良好なサイズが得られた。

表4-1と表4-2はケース１について、それぞれ b＝0.4と b＝0.2の場合のサイズ調整済み検出力の結果をまとめたものである。まず３つの検定を比較してみると、多くの設定のもとではサイズの正確性と同様に尤度比検定がもっ

表 4-1：サイズ調整済み検出力の結果（ケース 1，b＝0.4）

v	5			10			15		
T	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM
（10%）									
50	0.08	0.18	0.06	0.02	0.07	0.03	0.02	0.07	0.05
100	0.26	0.43	0.07	0.03	0.11	0.05	0.02	0.07	0.05
200	0.71	0.75	0.19	0.06	0.25	0.13	0.02	0.11	0.09
400	0.97	0.97	0.38	0.14	0.49	0.32	0.05	0.23	0.21
（5%）									
50	0.03	0.13	0.02	0.01	0.04	0.01	0.01	0.04	0.02
100	0.07	0.34	0.05	0.01	0.07	0.03	0.01	0.04	0.03
200	0.52	0.67	0.13	0.02	0.17	0.07	0.01	0.07	0.04
400	0.94	0.95	0.35	0.05	0.38	0.24	0.01	0.17	0.14
（1%）									
50	0.01	0.04	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00
100	0.00	0.21	0.01	0.00	0.03	0.01	0.00	0.01	0.01
200	0.06	0.46	0.04	0.01	0.09	0.01	0.00	0.01	0.00
400	0.75	0.85	0.23	0.00	0.21	0.06	0.00	0.06	0.05

表 4-2：サイズ調整済み検出力の結果（ケース 1，b＝0.2）

v	5			10			15		
T	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM
（10%）									
50	0.04	0.06	0.04	0.02	0.03	0.02	0.02	0.04	0.02
100	0.07	0.12	0.06	0.02	0.04	0.03	0.02	0.04	0.04
200	0.21	0.28	0.09	0.03	0.08	0.04	0.03	0.04	0.03
400	0.52	0.54	0.15	0.04	0.13	0.07	0.04	0.07	0.03
（5%）									
50	0.02	0.04	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01
100	0.02	0.08	0.03	0.01	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02
200	0.11	0.19	0.06	0.02	0.04	0.02	0.01	0.03	0.01
400	0.41	0.44	0.11	0.02	0.08	0.04	0.02	0.04	0.02
（1%）									
50	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
100	0.00	0.03	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
200	0.01	0.07	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01
400	0.13	0.23	0.03	0.00	0.03	0.01	0.00	0.01	0.00

表 5-1：サイズ調整済み検出力の結果（ケース２，b＝0.4）

v	5			10			15		
T	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM
（10%）									
50	0.24	0.18	0.18	0.15	0.06	0.02	0.17	0.06	0.01
100	0.45	0.42	0.31	0.13	0.12	0.01	0.15	0.08	0.00
200	0.85	0.74	0.80	0.15	0.26	0.02	0.13	0.11	0.00
400	0.99	0.97	0.94	0.32	0.47	0.11	0.13	0.24	0.00
（5%）									
50	0.16	0.14	0.07	0.12	0.03	0.01	0.14	0.04	0.00
100	0.21	0.34	0.17	0.10	0.07	0.00	0.12	0.05	0.00
200	0.74	0.67	0.56	0.08	0.18	0.00	0.10	0.07	0.00
400	0.98	0.94	0.94	0.12	0.35	0.01	0.07	0.17	0.00
（1%）									
50	0.08	0.03	0.01	0.08	0.01	0.00	0.09	0.01	0.00
100	0.04	0.21	0.03	0.09	0.03	0.00	0.11	0.01	0.00
200	0.23	0.47	0.13	0.05	0.09	0.00	0.08	0.01	0.00
400	0.92	0.85	0.89	0.02	0.20	0.00	0.05	0.07	0.00

表 5-2：サイズ調整済み検出力の結果（ケース２，b＝0.2）

v	5			10			15		
T	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM	Wald	LR	LM
（10%）									
50	0.07	0.06	0.10	0.07	0.03	0.07	0.07	0.03	0.05
100	0.08	0.12	0.18	0.06	0.05	0.07	0.06	0.04	0.05
200	0.25	0.28	0.42	0.05	0.07	0.07	0.05	0.04	0.04
400	0.58	0.54	0.85	0.03	0.12	0.15	0.05	0.07	0.02
（5%）									
50	0.05	0.03	0.05	0.06	0.01	0.03	0.05	0.02	0.02
100	0.03	0.08	0.09	0.04	0.02	0.04	0.04	0.02	0.02
200	0.14	0.19	0.26	0.03	0.04	0.03	0.04	0.03	0.01
400	0.46	0.44	0.73	0.03	0.07	0.04	0.04	0.04	0.01
（1%）									
50	0.01	0.01	0.01	0.02	0.00	0.01	0.02	0.00	0.01
100	0.01	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.02	0.00	0.00
200	0.01	0.07	0.06	0.01	0.02	0.00	0.03	0.00	0.00
400	0.17	0.23	0.20	0.01	0.03	0.01	0.02	0.01	0.00

ともよいパフォーマンスを示した。

分析 1 と同様に 3 つの検定に共通して、非ガウス性の程度は結果に影響を与えている。非ガウス性が大きい設定である $v=5$ の場合、ワルド検定や尤度比検定は標本が大きくなるほど、検出力は大きくなる。従って、非ガウス性が大きい場合にはこれらの検定はうまく動作することが確認できたといえよう。

ところが、$v=15$ のように非ガウス性の程度が低い場合をみると、検定の検出力は著しく低い。従って、分析 1 での推定に関する議論と合わせて考えるとすれば、非正規性がそれほどない場合、推定のみであれば実行することは可能であるが、検定のような漸近分布に基づく統計的推測を行うには不十分であることが明らかになったといえる。

加えて、構造パラメータ行列の真の値の大きさも結果へ影響を与えることが明らかになった。ワルド検定と尤度比検定について表 4-1 と表 4-2 を比較すると、$b=0.2$ の場合である表 4-2 の各値は $b=0.4$ の表 4-1 の対応する値に比べて、総じて低い。このような構造パラメータ行列の真値の大きさと検出力の結果について、理論的な考察を行うことは将来への課題である。

表 5-1、表 5-2 はケース 2 の場合の検出力の結果であるが、これらからも上記の表 4-1、表 4-2 において観察された事とほぼ同様の考察が得られた。

Ⅳ　おわりに

本稿では、(Lanne et. al. 2015) による非ガウス型の分布を仮定した SVAR モデルの最尤推定の有限標本でのパフォーマンスについて、モンテカルロ実験によりいくつかの観点から評価した。

非ガウス型分布の一つである Student の t 分布を用いて分析を行った結果、推定の有限標本でのパフォーマンスは特に非ガウスの程度に大きく影響を受けることが明らかになった。この結果の理論的な説明、さらにはより大きな次元でどうなるのか調べることは次の研究テーマである。

本分析は、非ガウス型分布を仮定した最尤推定が、その前提条件を満たさ

ない場合にどの程度有効であるのかその頑健性についても調べた。経済やファイナンスの時系列の分布は非正規分布であることがしばしば指摘されるが、その原因として分散不均一性の存在が指摘されることも多々ある。そこで、実際には誤差が独立な非正規分布ではなく GARCH 過程である場合に（Lanne et. al. 2015）による手法を適応した場合のパフォーマンスをシミュレーションにより評価した。その結果、データが独立同一分布に従っていなくても非正規の程度が大きい場合は非ガウス型の最尤法のパフォーマンスは良好であることがわかった。VAR-LiNGAM や（Lanne et. al. 2015）の非ガウス型の最尤法を用いて実証分析を行いたいものにとって、この結果は有意義な情報であるといえよう。ただし、非正規性の程度が小さい場合には、（Lanne et. al. 2015）の手法は GARCH を仮定した手法に比べてパフォーマンスが大きく低下する。したがってここでの結論としては、データの非ガウス性が強い場合は非ガウス型の最尤法を利用することには問題はないが、非ガウス性が弱い場合には、撹乱項系列の時系列特性を調べて、もしなんらか識別に役立つ時系列性質があるならば、それを生かした最尤法を行うことが望ましいといえる。

最後に、実際の応用を念頭に置いたシミュレーションとして対応する３つの検定のパフォーマンスを調べた結果、尤度比検定がもっともよいパフォーマンスを示した。また３つの検定に共通して、非ガウスの程度に加えて構造パラメータ行列の真の値の大きさも結果へ影響を与えることが明らかになった。これらの結果についての理論的な考察も検討したい。

今後の課題についてであるが、上記で既に述べた今回の結果についての理論的な検証はもちろん、本手法を経済データの実証分析で実際に応用することによりその実用性を確認したい。例えば日本の金融政策の検証や株価や為替の関係性といったテーマは、本稿で議論した手法を用いる事により新たな知見を得られる可能性がある。

（筆者は関西学院大学商学部助教）

参考文献

［１］前川功一，小村衆統，永田修一（2015）「VAR モデルによる日本の金融緩和政策効果の検証―2009年～2014年の期間について―」，『経済研究論集』，38巻２号，pp. 1-20頁.

［２］Francq, C. and Zakoian, J. M.（2010）*GARCH Models,* Wiley.

［３］Lanne, M., Meitz, M., and P. Saikkonen,（2015）"Identification and estimation of non-Gaussian structural vector autoreg」ressions," *CREATES Research Papers 2015-16,* University of Aarhus.

［４］Hyvärinen, A., K. Zhang, S. Shimizu, and P. O. Hoyer（2010）"Estimation of a structural vector autoregression model using non-Gaussianity," *Journal of Machine Learning Research,* 11, pp. 1709-1731.

［５］Lütkepohl, H.（2013）"Identifying structural vector autoregressions via changes in volatility," *Advances in Econometrics* Vol. 32, pp. 169-203.

［６］Lütkepohl, H. and A. Velinov（2016）"Structural Vector Autoregres-sions: Checking Identifying Long-Run Restrictions via Heteroskedas-ticity," *Journal of Economic Surveys* Vol. 30, No. 2, pp. 377-392.

［７］Moneta A., Entner D., Hoyer P. O., and A. Coad（2013）"Causal in-ference by independent component analysis: theory and applications, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics,* 75, pp. 705-730.

［８］Normandin, M. and Phaneuf, L.（2004）"Monetary policy shocks: test-ing identification conditions under timevarying conditional volatility," *Journal of Monetary Economics,* Vol. 51, pp. 1217-1243.

［９］van der Weide, R.（2002）"GO-GARCH: a multivariate generalized orthogonal GARCH model," *Journal of Applied Econometrics* 17, pp. 549-564.

［10］Rigobon, R.（2003）"Identication through heteroskedasticity," *Review of Economics and Statistics,* 85, pp. 777-792.

［11］Shimizu, S. Hoyer, P. O. Hyvärinen, A. and A. Kerminen（2006）"A linear non-Gaussian acyclic model for causal discovery," *Journal of Machine Learning Research* 7, pp. 2003-2030.

［12］Sims, C. A.（1980）. "Macroeconomics and reality," *Econometrica* 48, pp. 1-48.