

# ネットワーク DEA モデル

瀬 見 博

## I はじめに

多種類のインプットを投入して多種類のアウトプットを産出する、同質的な活動を行っている事業体群のそれぞれの相対的効率性を評価・測定するために、包絡分析法 (Data Envelopment Analysis ; 以下、DEA と略す) と呼ばれるノンパラメトリックな手法が、1978年に Charnes, Cooper, Rhodes によって提案された<sup>1)</sup>。その後、DEA は、理論面で一層の精緻化が図られるとともに、応用面でもさまざまな分野に適用され、その有用性が認められてきた<sup>2)</sup>。

ところで、DEA に関する多くの伝統的な研究では、事業体 (Decision Making Unit ; 以下、DMU と略す) の効率性を測定する際に、DMU を単一の部門から構成されるシステム、すなわち、その内部がブラックボックスになっているシステムであると見なして分析が行われてきた。しかし、現実に見受けられる多くの DMU は、相互に関連するさまざまな部門が結びついたネットワーク構造をその内部に形成しており、個々の部門はそれぞれ、その部門独自のインプットとアウトプットをもち、また、部門間ではインプット、アウトプットの形で中間財のやりとりが行われている。したがって、このよ

1) Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E. (1978), Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, pp. 429-444.

2) 例えば、Cook, W. D., Seiford, L. M. (2009), Data envelopment analysis (DEA)-Thirty years on, *European Journal of Operational Research*, 192, pp. 1-17 を参照されたい。

うな場合には、DMUの内部に存在する個々の部門の活動を考慮しながら、システム全体の効率性とそれぞれの部門の効率性を同一モデルの中で同時に測定することが求められる。

この問題を解決するために、これまでに、Färe and Grosskopf<sup>3)</sup>を始め多くのネットワークDEAに関する研究がなされてきた。それらの中でも、特に全体効率性と部門効率性の関係を統合的に取り扱っている代表的なモデルとして、Kaoの関係性DEAモデル (relational network DEA model)<sup>4)</sup>とTone and TsutsuiのNSBMモデル (network slacks-based measure model)<sup>5)</sup>を挙げることができる。そこで本稿において、この2つのモデルを取り上げ、それらがどのような手法であるのかを概観するとともに、簡単な数値例を用いて比較・検討してみることにする。

## II 関係性DEAモデル

まず、従来の伝統的なDEAモデル、その中でも規模の収穫一定 (constant returns to scale) を仮定した最も基本的なCCRモデルを提示しておくことにする。

いま、事業体DMU<sub>j</sub> ( $j=1, \dots, n$ ) の  $i$  番目のインプットと  $r$  番目のアウトプットを、それぞれ  $X_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ) と  $Y_{rj}$  ( $r=1, \dots, s$ ) で表すことにすれば、特定の事業体DMU<sub>k</sub> の効率性  $E_k^{CCR}$  を測定するための乗数形式のインプット指向型CCRモデルは、

$$E_k^{CCR} = \text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad (j=1, \dots, n) \quad (3)$$

- 
- 3) Färe, R., Grosskopf, S. (1996), *Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA*, Kluwer Academic Publishers., Färe, R., Grosskopf, S. (2000), *Network DEA*, *Socio-Economic Planning Sciences*, 34, pp. 35-49.
- 4) Kao, C. (2009), Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model, *European Journal of Operational Research*, 192, pp. 949-962.
- 5) Tone, K., Tsutsui, M. (2009), Network DEA: A slacks-based measure approach, *European Journal of Operational Research*, 197, pp. 243-252.

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad (r=1, \dots, s, i=1, \dots, m) \quad (4)$$

と定式化することができる。ここに、 $u_r$  と  $v_i$  は、それぞれ、 $r$  番目のアウトプットと  $i$  番目のインプットの加重値、 $\varepsilon$  は非常に小さな正数を意味する非アルキメデス無限小定数である。また、このモデル(1)~(4)式の双対形は、包絡形式のインプット指向型 CCR モデルと呼ばれており、 $\theta$  と  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) を双対変数とすれば、

$$E_k^{CCR} = \text{Min} \quad \theta - \varepsilon (\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+) \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{ij} + s_i^- = \theta X_{ik}, \quad (i=1, \dots, m) \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_{rj} - s_r^+ = Y_{rk}, \quad (r=1, \dots, s) \quad (7)$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad (j=1, \dots, n, i=1, \dots, m, r=1, \dots, s) \quad (8)$$

で与えられることがわかる。ここに、 $\theta$  には符号制約がない。また、 $s_i^-$  と  $s_r^+$  は、それぞれインプット  $i$  の余剰とアウトプット  $r$  の不足を表すスラック変数である。

ところで、効率性の分析対象である現実の事業体 DMU は、多くの場合、複数の部門をその構成要素にもつネットワークシステムとして把握することができる。そこでは、ある部門で生産され他の部門で消費される中間財を介して相互に結びついている部門や他の部門が利用する中間財を生産することなしに独立に活動している部門などが混在している。このような事業体 DMU に対して、上記の乗数型や包絡型モデルを適用すれば、要素部門がすべて効率的でないにもかかわらず、システム全体としての DMU は効率的であると評価されたり、DMU 間の相互比較ではより高い効率値をもっている、要素部門間の相互比較ではすべて効率値が劣っていると判定される等、整合性のとれない結果がもたらされる可能性がある。

そこで、Kao は DMU のシステム全体としての効率性と各部門の効率性の間に整合的（数学的）な関係を見いだすことができ、しかも、それらが同じモデルの中で同時に導きだせるネットワーク DEA モデル、すなわち、関係性 DEA モデルを提案した。また、現実のネットワークシステムは複雑でさまざまな構造をもっているが、実際に活動を行わないダミー部門を適切に用

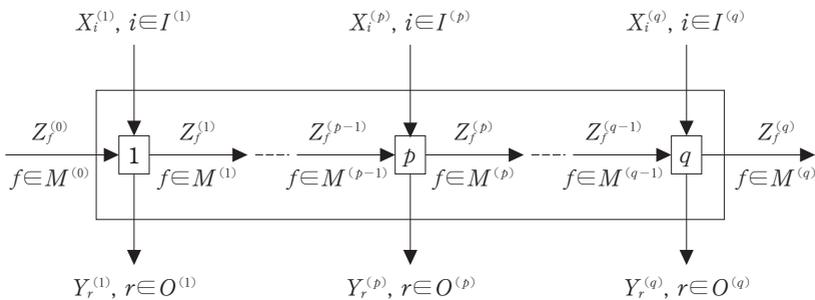
いることによって、すべてのネットワークシステムは、実在の部門とダミー部門を構成要素とする並列型構造 (parallel structures) のシステムが、直列型構造 (series structures) のサブシステムになっているような多段階システムとして表現できることを示した。

したがって、以下では、ネットワークシステムの基本的な構成要素である、直列型構造と並列型構造をもつシステムに関する関係性 DEA モデルについて概観してみることにする。

### 1. 直列型構造

直列型システムは、図1に示すように、 $q$  部門が中間財によって順次結びつけられている構造をもっている。部門  $p$  ( $p=1, \dots, q$ ) は、インプット  $X_i^{(p)}$ ,  $i \in I^{(p)}$  と直前の部門 ( $p-1$ ) で生産された中間財  $Z_f^{(p-1)}$ ,  $f \in M^{(p-1)}$  を投入して、アウトプット  $Y_r^{(p)}$ ,  $r \in O^{(p)}$  と次の部門 ( $p+1$ ) のインプットになる中間財  $Z_f^{(p)}$ ,  $f \in M^{(p)}$  を産出する。特に、部門1で用いられる中間財  $Z_f^{(0)}$ ,  $f \in M^{(0)}$  は外生的なインプットの一つ、部門  $q$  で生みだされる中間財  $Z_f^{(q)}$ ,  $f \in M^{(q)}$  は最終アウトプットの一つと見なされる。また、 $I = \{1, \dots, m\}$ ,  $O = \{1, \dots, s\}$ ,  $M = \{1, \dots, l\}$  は、それぞれ、インプットの数、アウトプットの数、中間財の数を表す添数集合であり、同様に、 $I^{(p)} \subset I$ ,  $O^{(p)} \subset O$ ,  $M^{(p)} \subset M$  は、それぞれ、部門  $p$  におけるインプットの数、アウト

図1 直列型システム



プットの数、中間財の数を表す添数集合である。さらに、各事業体  $DMU_j$  に関して、 $X_{ij} = \sum_{p=1}^q X_{ij}^{(p)}$  と  $Y_{rj} = \sum_{p=1}^q Y_{rj}^{(p)}$  が成り立つ。

さて、システム全体の効率性と各部門の効率性を同時に測定できる直列型システムの関係性 DEA モデルは、事業体  $DMU_k$  が分析の対象になっているとき、次のように定式化される。

$$E_k = \text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} \tag{9}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1 \tag{10}$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad (j=1, \dots, n) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & (\sum_{r \in O^{(p)}} u_r Y_{rj}^{(p)} + \sum_{f \in M^{(p)}} w_f Z_{fj}^{(p)}) \\ & - (\sum_{i \in I^{(p)}} v_i X_{ij}^{(p)} + \sum_{f \in M^{(p-1)}} w_f Z_{fj}^{(p-1)}) \leq 0, \\ & \quad (p=1, \dots, q, j=1, \dots, n) \end{aligned} \tag{12}$$

$$u_r \geq \varepsilon, v_i \geq \varepsilon, w_f \geq \varepsilon, \quad (r=1, \dots, s, i=1, \dots, m, f=1, \dots, t) \tag{13}$$

したがって、上記モデル(9)~(13)式によって得られた最適な乗数を  $u^*$ ,  $v_i^*$ ,  $w_f^*$  とすれば、事業体  $DMU_k$  のシステム全体の効率性  $E_k$  と各部門の効率性  $E_k^{(p)}$  は、

$$E_k = \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik} = 1 - s_k^* \tag{14}$$

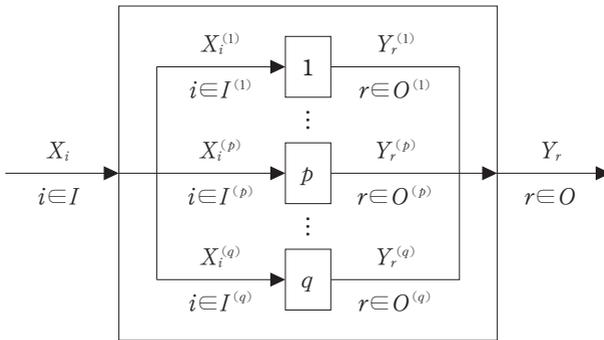
$$\begin{aligned} E_k^{(p)} &= (\sum_{r \in O^{(p)}} u_r^* Y_{rk}^{(p)} + \sum_{f \in M^{(p)}} w_f^* Z_{fk}^{(p)}) / \\ & \quad (\sum_{i \in I^{(p)}} v_i^* X_{ik}^{(p)} + \sum_{f \in M^{(p-1)}} w_f^* Z_{fk}^{(p-1)}) \\ &= 1 - s_k^{(p)*} / (\sum_{i \in I^{(p)}} v_i^* X_{ik}^{(p)} + \sum_{f \in M^{(p-1)}} w_f^* Z_{fk}^{(p-1)}) \\ &= 1 - \hat{s}_k^{(p)*}, \quad (p=1, \dots, q) \end{aligned} \tag{15}$$

により求められることがわかる。ここに、 $s_k^*$  はシステムの制約条件(11)式に関するスラック変数であり、システム全体の非効率性を表している。また、 $s_k^{(p)*}$  は部門  $p$  の制約条件(12)式に関するスラック変数である。なお、部門  $p$  の非効率性は  $\hat{s}_k^{(p)*}$  によって与えられる。さらに、制約条件(12)式の  $q$  部門の総和は、システムの制約条件(11)式に等しくなるので、 $s_k^* = \sum_{p=1}^q s_k^{(p)*}$  が成り立つ。

### 2. 並列型構造

並列型システムは、図2に示されるように、 $q$ 部門の活動が互いに独立して並列的に行われる構造をもっている。各部門  $p(p=1, \dots, q)$  はインプット  $X_i^{(p)}, i \in I^{(p)}$  を投入してアウトプット  $Y_r^{(p)}, r \in O^{(p)}$  を産出する。また、 $q$ 部門のインプット  $X_i^{(p)}$  とアウトプット  $Y_r^{(p)}$  の総和は、それぞれ、システムのインプット  $X_i$  とシステムのアウトプット  $Y_r$  に等しい。すなわち、各事業体  $DMU_j$  に関して、 $X_{ij} = \sum_{p=1}^q X_{ij}^{(p)}$  と  $Y_{rj} = \sum_{p=1}^q Y_{rj}^{(p)}$  が成り立つ。

図2 並列型システム



並列型システムに対しても、直列型システムの場合と同様に、システム全体の効率性と各部門の効率性を同時に求めることが可能な関係性 DEA モデルを定式化することができる。いま、事業体  $DMU_k$  が分析対象になっているとき、それは、

$$E_k = \text{Max } \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} \tag{16}$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1 \tag{17}$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad (j=1, \dots, n) \tag{18}$$

$$\sum_{r \in O^{(p)}} u_r Y_{rj}^{(p)} - \sum_{i \in I^{(p)}} v_i X_{ij}^{(p)} \leq 0, \tag{19}$$

( $p=1, \dots, q, j=1, \dots, n$ )

$$u_r \geq \varepsilon, v_i \geq \varepsilon, \quad (r=1, \dots, s, i=1, \dots, m) \tag{20}$$

と表される。

それ故、上記モデル(16)～(20)式によって得られた最適解  $u^*$ ,  $v_i^*$  を用いれば、事業体  $DMU_k$  のシステム全体の効率性  $E_k$  と各部門の効率性  $E_k^{(p)}$  を、

$$E_k = \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik} = 1 - s_k^* \quad (21)$$

$$\begin{aligned} E_k^{(p)} &= \sum_{r \in O^{(p)}} u_r^* Y_{rk}^{(p)} / \sum_{i \in I^{(p)}} v_i^* X_{ik}^{(p)} \\ &= 1 - s_k^{(p)*} / \sum_{i \in I^{(p)}} v_i^* X_{ik}^{(p)} = 1 - \hat{s}_k^{(p)*}, \quad (p=1, \dots, q) \end{aligned} \quad (22)$$

から求めることができる。ここに、 $s_k^*$  はシステムの制約条件(18)式に関するスラック変数であり、システム全体の非効率性を表している。また、 $s_k^{(p)*}$  は部門  $p$  の制約条件(19)式に関するスラック変数である。なお、部門  $p$  の非効率性は  $\hat{s}_k^{(p)*}$  によって与えられる。さらに、制約条件(19)式の  $q$  部門の総和は、システムの制約条件(18)式に等しくなるので、 $s_k^* = \sum_{p=1}^q s_k^{(p)*}$  が成り立つ。このことは、すべての部門が効率的である場合に限り、システムも効率的であることを意味する。また、部門  $p$  に関する加重値  $\omega^{(p)}$  を、

$$\omega^{(p)} = \sum_{i \in I^{(p)}} v_i^* X_{ik}^{(p)} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik} \quad (23)$$

と定義すれば、 $q$  部門の効率性の加重平均は、システム全体の効率性に等しくなる。すなわち、

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^q \omega^{(p)} E_k^{(p)} \\ &= \sum_{p=1}^q [(\sum_{i \in I^{(p)}} v_i^* X_{ik}^{(p)} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}) (\sum_{r \in O^{(p)}} u_r^* Y_{rk}^{(p)} / \sum_{i \in I^{(p)}} v_i^* X_{ik}^{(p)})] \\ &= \sum_{p=1}^q (\sum_{r \in O^{(p)}} u_r^* Y_{rk}^{(p)} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}) = \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik} = E_k \end{aligned} \quad (24)$$

さらに、(21), (22)式から、システムの非効率性  $s_k^*$  と部門  $p$  の非効率性  $\hat{s}_k^{(p)*}$  の間に、

$$s_k^* = \sum_{p=1}^q [\sum_{i \in I^{(p)}} v_i^* X_{ik}^{(p)}] \hat{s}_k^{(p)*} = \sum_{p=1}^q \hat{w}^{(p)} \hat{s}_k^{(p)*} \quad (25)$$

の関係が成り立つことがわかる。

### III NSBM モデル

従来の DEA モデルは、事業体  $DMU_j$  の効率性を測定する際に主としてラ

ディアル尺度 (radial measure) を用いてきたが、インプット値とアウトプット値が非比例的に変化する問題の分析にはあまり適していなかった。そこで、これを解決するために、Tone は効率値を非ラディアル尺度 (non-radial measure) により求めることができる SBM (slacks-based measure) アプローチを提案した<sup>6)</sup>。その後、Tone and Tsutsui は、この SBM アプローチを、さらにネットワーク構造をもつ事業体 DMU<sub>j</sub> の効率性分析に適用可能な NSBM (network SBM) モデルへと発展させた。

いま、 $K$  部門 ( $k=1, \dots, K$ ) から構成される  $n$  個の事業体 DMU<sub>j</sub> ( $j=1, \dots, n$ ) が分析の対象であるとしよう。また、部門  $k$  のインプット項目数とアウトプット項目数を、それぞれ、 $m_k$  と  $r_k$ 、部門  $k$  から部門  $h$  へのリンクを  $(k, h)$ 、リンクの集合を  $L$  とする。さらに、部門  $k$  における DMU<sub>j</sub> へのインプットを  $x_j^k \in R_+^{m_k}$  ( $j=1, \dots, n; k=1, \dots, K$ )、部門  $k$  における DMU<sub>j</sub> からのアウトプットを  $y_j^k \in R_+^{r_k}$  ( $j=1, \dots, n; k=1, \dots, K$ )、DMU<sub>j</sub> の部門  $k$  から部門  $h$  への中間財を  $z_j^{(k,h)} \in R_+^{t_{(k,h)}}$  ( $j=1, \dots, n; (k,h) \in L$ ) で表すことにする。なお、 $t_{(k,h)}$  はリンク  $(k, h)$  の項目数である。

このとき、規模の収穫一定を仮定すれば、生産可能集合  $\{x^k, y^k, z^{(k,h)}\}$  は、

$$x^k \geq \sum_{j=1}^n x_j^k \lambda_j^k, \quad (k=1, \dots, K) \quad (26)$$

$$y^k \leq \sum_{j=1}^n y_j^k \lambda_j^k, \quad (k=1, \dots, K) \quad (27)$$

$$z^{(k,h)} = \sum_{j=1}^n z_j^{(k,h)} \lambda_j^k, \quad (\forall (k,h)) \text{ (部門 } k \text{ からのアウトプットとして)} \quad (28)$$

$$z^{(k,h)} = \sum_{j=1}^n z_j^{(k,h)} \lambda_j^h, \quad (\forall (k,h)) \text{ (部門 } h \text{ へのインプットとして)} \quad (29)$$

$$\lambda_j^k \geq 0, \quad (\forall j, k) \quad (30)$$

によって定義することができる。また、効率性の評価対象である特定の事業体 DMU<sub>o</sub> の活動は次のように表される<sup>7)</sup>。

$$x_o^k = X^k \lambda^k + s^{k-}, \quad (k=1, \dots, K) \quad (31)$$

6) Tone, K. (2001), A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 130, pp. 498-509.

7) 規模の収穫可変 (variable returns to scale) を想定すれば、 $\sum_{j=1}^n \lambda_j^k = 1$ , ( $k=1, \dots, K$ ) がモデルに追加される。

$$y_o^k = Y^k \lambda^k - s^{k+}, \quad (k=1, \dots, K) \tag{32}$$

$$\lambda^k \geq 0, s^{k-} \geq 0, s^{k+} \geq 0, \quad (\forall k) \tag{33}$$

ここに、 $X^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in R^{m_k \times n}$ ,  $Y^k = (y_1^k, \dots, y_n^k) \in R^{r_k \times n}$  であり、 $s^{k-}$  と  $s^{k+}$  は、それぞれ、インプットとアウトプットに関するスラック変数のベクトルである。

また、部門間のリンク  $(k, h)$  に関する制約条件として、

$$z^{(k, h)} \lambda^h = z^{(k, h)} \lambda^k, \quad (\forall (k, h)) \tag{34}$$

を設定する<sup>8)</sup>。ここに、 $z^{(k, h)} = (z_1^{(k, h)}, \dots, z_n^{(k, h)}) \in R^{l(k, h) \times n}$  である。34式は、インプットとアウトプットの連続性だけが維持されるための条件を示している。

さて、以上の条件下で、インプット指向型の NSBM モデルを適用した場合、事業体  $DMU_o$  の効率性  $\theta_o^*$  は、以下の線形計画問題を解くことにより求められる<sup>9)</sup>。

$$\theta_o^* = \text{Min} \quad \sum_{k=1}^K w^k [1 - (1/m_k) (\sum_{i=1}^{m_k} s_i^{k-} / x_{io}^k)] \tag{35}$$

$$\text{s.t.} \quad (31), (32), (33), (34)$$

ここに、 $w^k$  は部門  $k$  の重要度を表し、 $\sum_{k=1}^K w^k = 1, w^k \geq 0, (\forall k)$  を満たす。したがって、 $\theta_o^* = 1$  のとき、 $DMU_o$  はインプット指向型モデルにおいて全体効率的であるといわれる。さらに、インプット指向型モデルにおける部門  $k$  の効率性は、

$$\theta_k = 1 - (1/m_k) (\sum_{i=1}^{m_k} s_i^{k-*} / x_{io}^k), \quad (k=1, \dots, K) \tag{36}$$

により定義することができ、 $\theta_k = 1$  のとき、 $DMU_o$  は部門  $k$  において（部門）効率的であるといわれる。ここに、 $s_i^{k-*}$  は35式で求められた最適なインプットに関するスラック変数の値である。また、全体効率値  $\theta_o^*$  と部門効率値  $\theta_k$  の間には、

- 8) リンク  $(k, h)$  における活動が固定されているケースについては、Tone and Tsutsui, 前掲論文, p. 246 を参照されたい。
- 9) インプット指向型以外のアウトプット指向型、無指向型の効率性については、Tone and Tsutsui, 前掲論文, p. 247 を参照されたい。

$$\theta_o^* = \sum_{k=1}^K w^k \theta_k \tag{37}$$

の関係が成り立っている。

#### IV 結びにかえて～数値例による比較～

図3に示されるようなネットワーク構造をもち、インプットの数値、アウトプットの数値、中間財の数値が表1で与えられている7個の事業体 A, B, C, D, E, F, G の全体効率性と部門効率性を、Kao の関係性 DEA モデルと Tone and Tsutsui の NSBM モデルを適用することによって求めてみることにする<sup>10)</sup>。

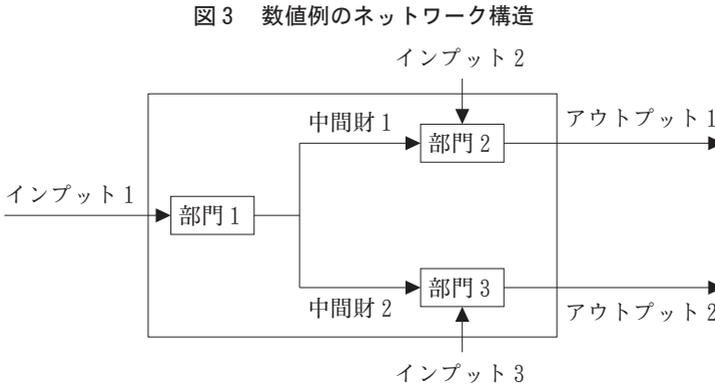


表1 図3に関するデータ

DMU	部門1	部門2		部門3		中間財	
	インプット1	インプット2	アウトプット1	インプット3	アウトプット2	中間財1	中間財2
A	5	4	7	6	9	6	6
B	3	3	5	9	6	8	9
C	10	4	8	7	6	6	3
D	7	3	3	7	7	7	8
E	6	7	6	8	6	7	9
F	8	5	6	8	4	2	6
G	3	2	6	2	5	4	5

いま、事業体  $DMU_j$  のインプット 1 を  $X_{1j}$ 、インプット 2 を  $X_{2j}$ 、インプット 3 を  $X_{3j}$ 、アウトプット 1 を  $Y_{1j}$ 、アウトプット 2 を  $Y_{2j}$ 、中間財 1 を  $Z_{1j}$ 、中間財 2 を  $Z_{2j}$  で、また、それらに対応する加重値を、それぞれ、 $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, w_1, w_2$  で表すことにする。このとき、図 3 のネットワーク構造をもつ事業体  $DMU_k$  の効率値は、以下の Kao による関係性 DEA モデル、

$$\begin{aligned}
 E_k &= \text{Max} \quad u_1 Y_{1k} + u_2 Y_{2k} \\
 \text{s.t.} \quad & v_1 X_{1k} + v_2 X_{2k} + v_3 X_{3k} = 1 \\
 & u_1 Y_{1j} + u_2 Y_{2j} - (v_1 X_{1j} + v_2 X_{2j} + v_3 X_{3j}) + s_j = 0 \\
 & w_1 Z_{1j} + w_2 Z_{2j} - v_1 X_{1j} + s_j^{(1)} = 0 \\
 & u_1 Y_{1j} - (v_2 X_{2j} + w_1 Z_{1j}) + s_j^{(2)} = 0 \\
 & u_2 Y_{2j} - (v_3 X_{3j} + w_2 Z_{2j}) + s_j^{(3)} = 0 \\
 & v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, w_1, w_2 \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

を解くことによって求められる。また、それらの最適解を、 $v_1^*, v_2^*, v_3^*, u_1^*, u_2^*, w_1^*, w_2^*$  とすれば、全体効率性  $E_k$  と部門効率性  $E_k^{(p)}$  ( $p=1, 2, 3$ ) は、

$$\begin{aligned}
 E_k &= (u_1^* Y_{1k} + u_2^* Y_{2k}) / (v_1^* X_{1k} + v_2^* X_{2k} + v_3^* X_{3k}) \\
 E_k^{(1)} &= (w_1^* Z_{1k} + w_2^* Z_{2k}) / v_1^* X_{1k}, \quad E_k^{(2)} = u_1^* Y_{1k} / (v_2^* X_{2k} + w_1^* Z_{1k}), \\
 E_k^{(3)} &= u_2^* Y_{2k} / (v_3^* X_{3k} + w_2^* Z_{2k})
 \end{aligned}$$

で与えられることがわかる。それらの結果が表 2 に記されている。併せて、事業体の内部をブラックボックスと見なした場合と、事業体を構成する各部門を独立したシステムと見なした場合の効率値を、表 3 に示しておく<sup>11)</sup>。

関係性 DEA モデルによって求められた表 2 の全体効率値は、事業体を構成する部門間の関係を考慮しない表 3 のブラックボックスモデルのそれよりもすべて小さくなっている。また、各部門の効率値についてもほぼ同様のことがいえる。さらに、全部門が効率的である場合に限ってのみ、その事業体

10) 数値例の出所：Tzeng, G. H., Huang, J. J. (2013), *Fuzzy Multiple Objective Decision Making*, CRC Press, p. 91.

11) いずれの効率値も、(1)~(4)式の CCR モデルによって算定されている。

表2 関係性 DEA モデルによる結果

DMU <sub>k</sub>	全体効率性		部門効率性					
	$E_k$	$s_k$	$E_k^{(1)}$	$s_k^{(1)}$	$E_k^{(2)}$	$s_k^{(2)}$	$E_k^{(3)}$	$s_k^{(3)}$
A	0.6000	0.4000	0.4000	0.4000	0.7	0.0000	1.0	0
B	0.5555	0.4445	1.0	0	0.5555	0.4444	0.4444	0.0001
C	0.6664	0.3336	0.1588	0.0005	0.6667	0.3331	0.8	0.0000
D	0.3999	0.6001	0.3782	0.0002	0.3	0.0001	0.4000	0.5998
E	0.3214	0.6786	0.5000	0.3214	0.4286	0.0001	0.4737	0.3571
F	0.3999	0.6001	0.4706	0.0004	0.4000	0.5997	0.3810	0.0001
G	0.9999	0.0001	0.5294	0.0001	1.0	0	1.0	0

表3 伝統的な CCR モデルによる効率値

DMU <sub>k</sub>	ブラックボックス	部門1の効率性	部門2の効率性	部門3の効率性
A	1.0	0.45	0.7179	1.0
B	1.0	1.0	0.5556	0.4444
C	0.6666	0.225	0.8205	1.0
D	0.9332	0.3810	0.3333	0.6269
E	0.5631	0.5	0.4571	0.4737
F	0.4000	0.25	1.0	0.4103
G	1.0	0.5556	1.0	1.0

は全体としても効率的であると見なすことができるにもかかわらず、表3では、事業体 A, B, G を効率的であると判定してしまっている。一方、表2の関係性 DEA モデルでは、どの事業体にも非効率的な部門が認められるため、効率的な事業体は存在しないという結果が得られている。なお、表2において、 $s_k = s_k^{(1)} + s_k^{(2)} + s_k^{(3)}$  が成り立っていることも確かめられる。

次に、表1のデータを Tone and Tsutsui の NSBM モデルに適用して、事業体 DMU<sub>k</sub> のシステム全体としての効率性と部門ごとの効率性を求めてみることにする。なお、ここでは3部門の重要度は同じであると仮定しておく。すなわち、(35)式の  $w^k$  の値は、 $w^k = 1/3$ , ( $k=1, 2, 3$ ) である。いま、例えば DMU<sub>k</sub> が事業体 A であるときの NSBM モデルを定式化すれば、それは、

$$\theta_A^* = \text{Min} \quad 1 - \frac{1}{15}s_1^- - \frac{1}{12}s_2^- - \frac{1}{18}s_3^-$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} &5\lambda_A^1 + 3\lambda_B^1 + 10\lambda_C^1 + 7\lambda_D^1 + 6\lambda_E^1 + 8\lambda_F^1 + 3\lambda_G^1 + s_1^- = 5 \\ &4\lambda_A^2 + 3\lambda_B^2 + 4\lambda_C^2 + 3\lambda_D^2 + 7\lambda_E^2 + 5\lambda_F^2 + 2\lambda_G^2 + s_2^- = 4 \\ &6\lambda_A^3 + 9\lambda_B^3 + 7\lambda_C^3 + 7\lambda_D^3 + 8\lambda_E^3 + 8\lambda_F^3 + 2\lambda_G^3 + s_3^- = 6 \\ &7\lambda_A^2 + 5\lambda_B^2 + 8\lambda_C^2 + 3\lambda_D^2 + 6\lambda_E^2 + 6\lambda_F^2 + 6\lambda_G^2 - s_1^+ = 7 \\ &9\lambda_A^3 + 6\lambda_B^3 + 6\lambda_C^3 + 7\lambda_D^3 + 6\lambda_E^3 + 4\lambda_F^3 + 5\lambda_G^3 - s_1^+ = 9 \\ &6\lambda_A^2 + 8\lambda_B^2 + 6\lambda_C^2 + 7\lambda_D^2 + 7\lambda_E^2 + 2\lambda_F^2 + 4\lambda_G^2 \\ &= 6\lambda_A^1 + 8\lambda_B^1 + 6\lambda_C^1 + 7\lambda_D^1 + 7\lambda_E^1 + 2\lambda_F^1 + 4\lambda_G^1 \\ &6\lambda_A^3 + 9\lambda_B^3 + 3\lambda_C^3 + 8\lambda_D^3 + 9\lambda_E^3 + 6\lambda_F^3 + 5\lambda_G^3 \\ &= 6\lambda_A^1 + 9\lambda_B^1 + 3\lambda_C^1 + 8\lambda_D^1 + 9\lambda_E^1 + 6\lambda_F^1 + 5\lambda_G^1 \\ &\lambda_j^k \geq 0, \quad (j = A, B, C, D, E, F, G, k = 1, 2, 3) \\ &s_1^k \geq 0, \quad (k = 1, 2, 3), \quad s_1^k \geq 0, \quad (k = 2, 3) \end{aligned}$$

と表すことができ、その最適解から、システム全体の効率値は  $\theta_A^* = 0.6738$ 、また、各部門の効率値を算出するのに必要なインプットに関するスラック変数の値は、 $s_1^{1*} = 2$ 、 $s_2^{1*} = 5/7$ 、 $s_3^{1*} = 12/5$  であることがわかる。したがって、(36)式を用いれば、3部門の効率値、 $\theta_1 = 0.6$ 、 $\theta_2 = 0.8214$ 、 $\theta_3 = 0.6$  が求まる。A以外の事業体についても同様の計算をすることによって、最終的に表4の結果を得ることができる。

表4の全体効率値は、関係性 DEA モデルの場合と同様に、ブラックボックスモデルの値よりもすべて小さくなっている。また、各部門の効率値についても全体効率値ほどではないが、似通った傾向が認められる。さらに、NSBMモデルにおいても効率的であると判定された事業体は存在しない。なお、全体効率値と部門効率値の間に、 $\theta_0^* = (1/3)\theta_1 + (1/3)\theta_2 + (1/3)\theta_3$  の関係が成立していることも確認できる。

関係性 DEA モデルと NSBM モデルは、前者がラディアル尺度、後者が非ラディアル尺度を用いて効率値を測定しているため、効率値そのものを比較してもあまり意味がない。そこで、効率値に基づいて事業体を順位づけした

表4 NSBM モデルによる結果

事業体 DMU <sub>o</sub>	全体効率性	部門効率性			参照集合 ( $\lambda$ )		
	$\theta_o^*$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	部門 1	部門 2	部門 3
A	0.6738	0.6	0.8214	0.6	B(1.0)	B(0.7143) G(0.5714)	G(1.8)
B	0.4885	0.4444	0.5767	0.4444	B(0.4444)	B(0.0476) G(0.7937)	A(0.6667)
C	0.4032	0.2	0.6667	0.3429	B(0.6667)	G(1.3333)	G(1.2)
D	0.4756	0.2222	0.5379	0.6667	B(0.5185)	B(0.4603) G(0.1164)	A(0.7778)
E	0.3245	0.3333	0.3401	0.3	B(0.6667)	B(0.2857) G(0.7619)	G(1.2)
F	0.2708	0.1875	0.4	0.225	B(0.5)	G(1.0)	G(0.9)
G	0.9407	0.8222	1.0	1.0	B(0.4667) F(0.1333)	G(1.0)	G(1.0)

結果を比べてみることにする。関係性 DEA モデルの全体効率性に関する順位は、 $G > C > A > B > D = F > E$ 、NSBM モデルのそれは、 $G > A > B > D > C > E > F$  となり、C 以外の事業体についてはほぼ同じ評価がなされていることがわかる。しかし、部門ごとの順位づけには、全体効率性の場合のような類似性を見いだすことはできなかった。

今後、規模の収穫が一定であることを想定したインプット指向型 CCR モデル以外のさまざまな仮定の下での DEA モデルを、ネットワーク構造をその内部にもつ事業体の効率性分析に適用することが求められる。また、本稿で十分明らかにすることができなかった関係性 DEA モデルと NSBM モデルの関係についてもさらに検討することが必要である。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

#### 主要参考文献

- [1] Chen, Y., Cook, W. D., Kao, C., Zhu, J. (2013), Network DEA pitfalls: Divisional efficiency and frontier projection under general network structures, *European Journal of Operational Research*, 226, pp. 507-515.

- [ 2 ] Färe, R., Grosskopf, S. (2000), Network DEA, *Socio-Economic Planning Sciences*, 34, pp. 35-49.
- [ 3 ] Färe, R., Grosskopf, S., Whittaker, G. (2007), Network DEA, In: Zhu, J., Cook, W. D. (Eds.), *Modeling Data Irregularities and Structural Complexities in Data Envelopment Analysis*, Springer, pp.209-240.
- [ 4 ] Kao, C. (2009), Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model, *European Journal of Operational Research*, 192, pp. 949-962.
- [ 5 ] Kao, C. (2009), Efficiency measurement for parallel production systems, *European Journal of Operational Research*, 196, pp. 1107-1112.
- [ 6 ] Kao, C. (2012), Efficiency decomposition for parallel production systems, *Journal of the Operational Research Society*, 63, pp. 64-71.
- [ 7 ] Kao, C. (2014), Efficiency decomposition for general multi-stage systems in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 232, pp. 117-124.
- [ 8 ] Kao, C., Hwang, S. N. (2010), Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance, *Decision Support Systems*, 48, pp. 437-446.
- [ 9 ] Lewis, H. F., Sexton, T. R. (2004), Network DEA: Efficiency analysis of organizations with complex internal structure, *Computers & Operations Research*, 31, pp. 1365-1410.
- [10] Tone, K. (2001), A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 130, pp. 498-509.
- [11] Tone, K. (2011), Slacks-based measure of efficiency, In: Cooper, W. W., Seiford, L. M., Zhu, J. (Eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis*, 2<sup>nd</sup> ed., Springer, pp. 195-209.
- [12] Tone, K., Tsutsui, M. (2009), Network DEA: A slacks-based measure approach, *European Journal of Operational Research*, 197, pp. 243-252.
- [13] Tzeng, G. H., Huang, J. J. (2013), *Fuzzy Multiple Objective Decision Making*, CRC Press, pp. 87-94.