

マルムクイスト生産性指数と DEA モデル

瀬 見 博

I 序

DEA (Data Envelopment Analysis) は、観測された複数個のインプット値とアウトプット値に基づいて、生産フロンティアを推定し、各事業体の相対的な効率性を測定・評価するために、1978年、Charnes, Cooper, Rhodes によって提案されたノンパラメトリックな手法である¹⁾。その後、DEA は、理論面で一層の精緻化が図られると共に、応用面でもさまざまな分野に適用され大きな成果を収めてきた²⁾。一方、マルムクイスト指数は1953年、インプット距離関数を用いて消費分析を行った S. Malmquist により初めて提案され、その後、Caves, Christensen, Diewert がそれを拡張して、距離関数で表される 2 種類のマルムクイスト指数の幾何平均によって生産性の変化が測定できる尺度を定義した³⁾。さらに、Färe, Grosskopf, Lovell により、DEA に基づいてマルムクイスト生産性指数を評価するための方法が提示された⁴⁾。

-
- 1) Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, pp. 429-444.
 - 2) たとえば、Cook, W.D., Seiford, L.M. (2009), Data Envelopment Analysis (DEA) — Thirty years on, *European Journal of Operational Research*, Vol. 192, pp. 1-17. Seiford, L.M. (1996), Data Envelopment Analysis: The Evolution of the State of the Art (1978-1995), *The Journal of Productivity Analysis*, Vol. 7, pp. 99-137. などを参照されたい。
 - 3) Caves, D.W., Christensen, L.R., Diewert, W.E. (1982), The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output, and Productivity, *Econometrica*, Vol. 50, pp. 1393-1414.
 - 4) Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K. (1994), *Production Frontiers*, Cambridge Univer-

それが、事業体の生産性変化を測定するための1つの有力な手法として広く用いられるようになり、その精緻化を目指して数多くの研究が続けられている。そこで本稿では、主に Cooper, Seiford and Tone⁵⁾ と Tone⁶⁾ を参考にしながら、まず、マルムクイスト生産性指数について検討し、次いで、それを評価する際に必要となる距離関数の算定方法を考察してみることにする⁷⁾。

II マルムクイスト生産性指数

いま、同じ活動を行っている n 個の事業体 (Decision Making Unit) を DMU_j , ($j=1, \dots, n$) で表すことにする。また、 t 期において各 DMU_j は m 種類のインプット i , ($i=1, \dots, m$) をそれぞれ x_{ij}^t 単位投入することによって、 h 種類のアウトプット r , ($r=1, \dots, h$) をそれぞれ y_{rj}^t 単位産出しているものとしよう。この時、測定されるインプット項目とアウトプット項目は共に、すべての DMU_j で共通していることが必要である。しかし、各項目の測定単位は異なってもよい。さらに、 x_{ij}^t と y_{rj}^t の値は観測可能で、 $x^t \in R^m$, $y^t \in R^h$ であると仮定する。ここに、 x^t , y^t はそれぞれ DMU_j のインプット・ベクトルとアウトプット・ベクトルを表す。

さて、 t 期の生産技術は、 y^t を生産することができるすべてのインプット・ベクトルの集合、すなわち、(1)式のインプット集合 $L^t(y^t)$ を用いて定義することができる、

$$L^t(y^t) = \{x^t : x^t \text{ は } y^t \text{ を生産可能}\} \quad (1)$$

その境界 (効率的フロンティア) は、(2)式の等量曲線 $Isoq L^t(y^t)$ によって

sity Press.

- 5) Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K. (2007), *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, 2nd ed., Springer, pp. 323-347.
- 6) Tone, K. (2004), Malmquist Productivity Index: Efficiency Change over Time. In: Cooper, W. W., Seiford, L. M., Zhu, J., eds., *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers, pp. 203-227.
- 7) 本稿では、主としてインプット指向型ラディアル CCR モデル (input oriented radial CCR model) を用いた距離関数の算定方法が論じられる。

与えられる。

$$\text{Isoq } L^t(y^t) = \{x^t : x^t \in L^t(y^t), \lambda x^t \notin L^t(y^t), \lambda < 1\} \quad (2)$$

また、(1)式のかわりに、インプット集合上で、インプット距離関数 (input distance function) を用いて(3)式のように生産技術を定義することもできる⁸⁾。

$$D^t(x^t, y^t) = \max \{\rho : (x^t/\rho) \in L^t(y^t), \rho > 0\} \quad (3)$$

ここに、インプット距離関数の値は、 $x^t \in L^t(y^t)$ の時 $D^t(x^t, y^t) \geq 1$ となり、 $x^t \in \text{Isoq } L^t(y^t)$ の時に限り、 $D^t(x^t, y^t) = 1$ となる。

ところで、(3)式の距離関数は t 期のデータと生産技術を用いて定義された同じ期の距離関数を表しているが、ある期のデータとそれに隣接する期の生産技術を用いて、2種類の異時点間の距離関数を(4)式、(5)式のように定義することができる。

$$D^t(x^{t+1}, y^{t+1}) = \max \{\rho : (x^{t+1}/\rho) \in L^t(y^{t+1})\} \quad (4)$$

$$D^{t+1}(x^t, y^t) = \max \{\rho : (x^t/\rho) \in L^{t+1}(y^t)\} \quad (5)$$

この時、 t 期の生産技術を基準にした場合のインプット指向型のマルムクイスト生産性指数 (input oriented Malmquist index) M^t は、

$$M^t = \left[\frac{D^t(x^t, y^t)}{D^t(x^{t+1}, y^{t+1})} \right] = \left[\frac{D^t(x^t, y^t)}{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D^t(x^{t+1}, y^{t+1})} \right] \quad (6)$$

と表すことができる。ここで、 $D^t(x^t, y^t) \geq 1$ であるが、 $t+1$ 期のデータは t 期の生産技術に関して実行可能でない場合が考えられるため、

$D^t(x^{t+1}, y^{t+1}) \geq 1$ となる。したがって、 $M^t \geq 1$ が成り立つ。同様にして、 $t+1$ 期を基準にした場合のインプット指向型のマルムクイスト生産性指数 M^{t+1} は、

$$M^{t+1} = \left[\frac{D^{t+1}(x^t, y^t)}{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \right] = \left[\frac{D^t(x^t, y^t)}{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{D^{t+1}(x^t, y^t)}{D^t(x^t, y^t)} \right] \quad (7)$$

で与えられ、上記と同じ理由により、 $M^{t+1} \geq 1$ となる。(6)式と(7)式の指数は共に (x^t, y^t) を (x^{t+1}, y^{t+1}) と比較したものであるが、基準となる生産技術

8) 生産技術を、アウトプット集合 (生産可能集合) 上で、アウトプット距離関数によって定義することもできる。

が異なっているため2つの指数は必ずしも一致するとは限らない。すなわち、ある指数が生産性の上昇を示しても、他の指数が生産性の下降を示すことが起こり得る。したがって、このような事態を避けるために、通常、マルムクイスト生産性指数 M は(8)式のように M^t と M^{t+1} の幾何平均として定義されることになる。

$$M = \left[\frac{D^t(x^t, y^t)}{D^t(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{D^{t+1}(x^t, y^t)}{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

M は t 期と $t+1$ 期の間の生産性の変化を表す指数であり、 $M > 1$ の時に生産性の下落を、 $M = 1$ の時にその停滞を、 $M < 1$ の時にその上昇を示している。

(8)式は、(6)式と(7)式の2番目の式を代入することにより、次のように展開することができる。

$$M = \frac{D^t(x^t, y^t)}{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \left[\frac{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D^t(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{D^{t+1}(x^t, y^t)}{D^t(x^t, y^t)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

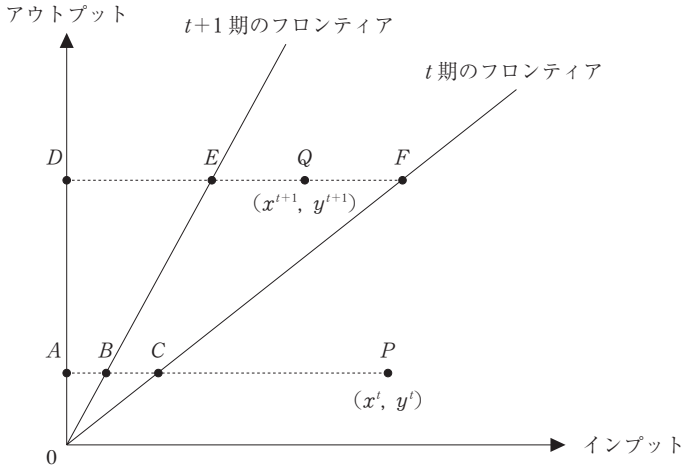
(9)式の右辺の第一項 $TEC = \frac{D^t(x^t, y^t)}{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}$ は、 t 期と $t+1$ 期の間の技術的効率性 (technical efficiency) の変化の大きさ (キャッチ・アップ効果) を表しており、 $TEC > 1$ の時に技術的効率性は減退しており、 $TEC = 1$ の時にそれは無変化で、 $TEC < 1$ の時にそれは改善していることがわかる。また、

(9)式の右辺の第二項 $FS = \left[\frac{D^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D^t(x^{t+1}, y^{t+1})} \cdot \frac{D^{t+1}(x^t, y^t)}{D^t(x^t, y^t)} \right]^{\frac{1}{2}}$ は、 t 期と $t+1$ 期の間の効率的フロンティアのシフト (shift) 効果、すなわち技術的变化 (technology frontier shift) を表しており、 $FS > 1$ ならばフロンティア技術は後退し、 $FS = 1$ ならばそれは無変化で、 $FS < 1$ ならばそれは向上していることになる。

ここで、図1の1インプットと1アウトプットの単純な例を用いて、以上の内容を確認しておくことにする。

図1において、 t 期と $t+1$ 期の間の技術的効率性の変化は、

図1. マルムクイスト生産性指数とその構成要素



$TEC = \frac{AC/AP}{DE/DQ}$ で与えることができる。また、点 Q に関する効率的フロンティアのシフト効果は $\frac{DE}{DF}$ で表せるが、それは、

$\frac{DE/DQ}{DF/DQ} = \frac{t+1 \text{ 期のフロンティアに関する } (x^{t+1}, y^{t+1}) \text{ の効率性}}{t \text{ 期のフロンティアに関する } (x^{t+1}, y^{t+1}) \text{ の効率性}}$ に等しくなる。同様に、点 P に関する効率的フロンティアのシフト効果 $\frac{AB}{AC}$ は、

$\frac{AB}{AC} = \frac{AB/AP}{AC/AP} = \frac{t+1 \text{ 期のフロンティアに関する } (x^t, y^t) \text{ の効率性}}{t \text{ 期のフロンティアに関する } (x^t, y^t) \text{ の効率性}}$ と示すことができる。したがって、 t 期と $t+1$ 期の間の効率的フロンティアのシフト効果 FS は $FS = \left[\frac{DE}{DF} \cdot \frac{AB}{AC} \right]^{\frac{1}{2}}$ となる。

III インプット指向型ラディアル CCR モデル

分析対象になっている事業体 DMU_o に関するマルムクイスト生産性指数 M_o を計算するためには、 $D_o^t(x_o^t, y_o^t)$, $D_o^{t+1}(x_o^{t+1}, y_o^{t+1})$, $D_o^t(x_o^{t+1}, y_o^{t+1})$,

$D_o^{t+1}(x_o^t, y_o^t)$ の4種類のインプット距離関数の値を求めることが必要である。それらは以下の4種類のインプット指向型ラディアルCCRモデル (a), (b), (c1), (c2) を用いることにより与えられる⁹⁾。なお、各記号の下付添字 o は特定の事業体 DMU_o に関するデータ、指数であることを意味している。

(a) t 期における技術的効率性

$$\begin{aligned} D_o^t(x_o^t, y_o^t) &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t \leq \theta x_{io}^t \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^t \geq y_{ro}^t \quad r=1, \dots, h \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

(b) $t+1$ 期における技術的効率性

$$\begin{aligned} D_o^{t+1}(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}) &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^{t+1} \leq \theta x_{io}^{t+1} \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^{t+1} \geq y_{ro}^{t+1} \quad r=1, \dots, h \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

(c1) t 期の生産技術（フロンティア）に対する $t+1$ 期のデータの効率性

$$\begin{aligned} D_o^t(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}) &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t \leq \theta x_{io}^{t+1} \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^t \geq y_{ro}^{t+1} \quad r=1, \dots, h \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

(c2) $t+1$ 期の生産技術に対する t 期のデータの効率性

$$\begin{aligned} D_o^{t+1}(x_o^t, y_o^t) &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^{t+1} \leq \theta x_{io}^t \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^{t+1} \geq y_{ro}^t \quad r=1, \dots, h \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

以上、インプット指向型マalmquist・モデルについて考察してきたが、

9) CCRモデルでは、規模に関して収穫不変 (constant returns to scale: CRS) の仮定がおかれている。

それを簡単な数値例に適用してみることにする。数値例として、 DMU_1 から DMU_5 の 5 個の事業体に関する t 期と $t+1$ 期の 2 つのインプット値 (x_1, x_2) と 1 つのアウトプット値 (y) が表 1 のように与えられている状況を想定する。

表 1. 数値例

事業体	t 期			$t+1$ 期		
	x_1	x_2	y	x_1	x_2	y
DMU_1	25	33	6	47	69	14
DMU_2	22	33	9	24	41	13
DMU_3	14	15	17	20	24	22
DMU_4	15	111	130	18	195	138
DMU_5	16	19	7	22	27	12

表 1 のデータを用いて、各事業体の $D_o^t(x_o^t, y_o^t)$, $D_o^{t+1}(x_o^{t+1}, y_o^{t+1})$, $D_o^t(x_o^{t+1}, y_o^{t+1})$, $D_o^{t+1}(x_o^t, y_o^t)$ の値をインプット指向型ラディアル CCR モデル (a), (b), (c1), (c2) から求め、それらを(8)式と(9)式に代入することにより M_o , TEC_o , FS_o を計算した結果が表 2 に纏められている。

表 2. 効率性の総括表

事業体	$D_o^t(x_o^t, y_o^t)$	$D_o^{t+1}(x_o^{t+1}, y_o^{t+1})$	$D_o^t(x_o^{t+1}, y_o^{t+1})$	$D_o^{t+1}(x_o^t, y_o^t)$	M_o	TEC_o	FS_o
DMU_1	0.15524	0.23222	0.17324	0.20308	0.88525	0.66854	1.32416
DMU_2	0.23287	0.37446	0.27073	0.31360	0.84873	0.62187	1.36480
DMU_3	0.96769	1.00000	0.78269	1.23636	1.23636	0.96769	1.27764
DMU_4	1.00000	1.00000	0.88462	1.62715	1.35624	1.00000	1.35624
DMU_5	0.31457	0.48763	0.37949	0.40191	0.82658	0.64511	1.28130

ここで、1 つの例として事業体 DMU_3 を取り上げてみよう。 DMU_3 の t 期の技術的効率性、 $t+1$ 期の技術的効率性、 t 期の生産技術に対する $t+1$ 期のデータの効率性、 $t+1$ 期の生産技術に対する t 期のデータの効率性は、それぞれ、以下に示される 4 種類の線形計画問題 (a), (b), (c1), (c2) を解くことによって求められる。

(a) Min θ

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 25\lambda_1 + 22\lambda_2 + 14\lambda_3 + 15\lambda_4 + 16\lambda_5 \leq 14\theta \\ & 33\lambda_1 + 33\lambda_2 + 15\lambda_3 + 111\lambda_4 + 19\lambda_5 \leq 15\theta \\ & 6\lambda_1 + 9\lambda_2 + 17\lambda_3 + 130\lambda_4 + 7\lambda_5 \geq 17 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Min θ

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 47\lambda_1 + 24\lambda_2 + 20\lambda_3 + 18\lambda_4 + 22\lambda_5 \leq 20\theta \\ & 69\lambda_1 + 41\lambda_2 + 24\lambda_3 + 195\lambda_4 + 27\lambda_5 \leq 24\theta \\ & 14\lambda_1 + 13\lambda_2 + 22\lambda_3 + 138\lambda_4 + 12\lambda_5 \geq 22 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{aligned}$$

(c1) Min θ

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 25\lambda_1 + 22\lambda_2 + 14\lambda_3 + 15\lambda_4 + 16\lambda_5 \leq 20\theta \\ & 33\lambda_1 + 33\lambda_2 + 15\lambda_3 + 111\lambda_4 + 19\lambda_5 \leq 24\theta \\ & 6\lambda_1 + 9\lambda_2 + 17\lambda_3 + 130\lambda_4 + 7\lambda_5 \geq 22 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{aligned}$$

(c2) Min θ

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 47\lambda_1 + 24\lambda_2 + 20\lambda_3 + 18\lambda_4 + 22\lambda_5 \leq 14\theta \\ & 69\lambda_1 + 41\lambda_2 + 24\lambda_3 + 195\lambda_4 + 27\lambda_5 \leq 15\theta \\ & 14\lambda_1 + 13\lambda_2 + 22\lambda_3 + 138\lambda_4 + 12\lambda_5 \geq 17 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{aligned}$$

これらの最適解は、(a) に関しては $\theta = \frac{629}{650} \cong 0.96769$ 、(b) の場合には

$\theta = 1$ 、(c1) については $\theta = \frac{407}{520} \cong 0.78269$ 、(c2) では $\theta = \frac{68}{55} \cong 1.23636$ となる。

したがって、事業体 DMU_3 のマルムクイスト指数 M_3 は、(8)式から、

$$M_3 = \left[\frac{0.96769}{0.78269} \cdot \frac{1.23636}{1} \right]^{\frac{1}{2}} = 1.236362、$$

また、キャッチ・アップ効果とフロ
ンティア・シフト効果は、(9)式から、それぞれ、 $TEC_3 = \frac{0.96769}{1} = 0.96769$ 、

$$FS_3 = \left[\frac{1}{0.78269} \cdot \frac{1.23636}{0.96769} \right]^{\frac{1}{2}} = 1.27764 \text{ で与えられることがわかる。}$$

以上、インプット距離関数に基づいたインプット指向型マルムクイスト生産性指数について述べてきたが、アウトプット距離関数を用いたアウトプット指向型マルムクイスト生産性指数を同様に定義することができる。それは、以下の4種類のアウトプット指向型ラディアルCCRモデル (a'), (b'), (c'1), (c'2) を用いることによって与えられる。

(a') t 期における技術的効率性

$$\begin{aligned} D_o^t(x_o^t, y_o^t) &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t &\leq x_{io}^t & i=1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^t &\geq \left(\frac{1}{\theta}\right) y_{ro}^t & r=1, \dots, h \\ \lambda_j &\geq 0 & j=1, \dots, n \end{aligned}$$

(b') $t+1$ 期における技術的効率性

$$\begin{aligned} D_o^{t+1}(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}) &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^{t+1} &\leq x_{io}^{t+1} & i=1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^{t+1} &\geq \left(\frac{1}{\theta}\right) y_{ro}^{t+1} & r=1, \dots, h \\ \lambda_j &\geq 0 & j=1, \dots, n \end{aligned}$$

(c'1) t 期の生産技術に対する $t+1$ 期のデータの効率性

$$\begin{aligned} D_o^t(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}) &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t &\leq x_{io}^{t+1} & i=1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^t &\geq \left(\frac{1}{\theta}\right) y_{ro}^{t+1} & r=1, \dots, h \\ \lambda_j &\geq 0 & j=1, \dots, n \end{aligned}$$

(c'2) $t+1$ 期の生産技術に対する t 期のデータの効率性

$$\begin{aligned} D_o^{t+1}(x_o^t, y_o^t) &= \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^{t+1} &\leq x_{io}^t & i=1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^{t+1} \geq \left(\frac{1}{\theta}\right) y_{ro}^t \quad r=1, \dots, h$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

IV 結

効率性の判定を正確に行うためには、インプットの余剰分とアウトプットの不足分を表すスラック存在の可能性を考慮に入れたモデルが必要となる。しかし、前節において、インプット指向型マルムクイスト生産性指数を求めするために用いられたラディアル CCR モデルでは、こうしたスラックの存在を取り扱うことはできない。刀根はその問題を解決するために、[SBM-I] と [Super SBM-I] と呼ばれる 2 種類の非ラディアル・スラック基準のインプット指向型モデルを提案している¹⁰⁾。[SBM-I] では、 s 期の生産技術に関して、 t 期の DMU_o の効率性が、

$$D_o^s(x_o^t, y_o^t) = \text{Min} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^s = \theta_i x_{io}^t \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^s \geq y_{ro}^t \quad r=1, \dots, h$$

$$\theta_i \leq 1 \quad i=1, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

を解くことにより求められる。ここに、 $\theta_i = 1 - s_i^- / x_{io}^t$ であり、 s_i^- はインプットのスラックを表す。なお、上式の s と t を入れ替えることにより、 t 期の生産技術に関する s 期の DMU_o の効率性 $D_o^s(x_o^s, y_o^s)$ が、また、 $s=t$ と置くことにより s 期と t 期の DMU_o の技術的効率性 $D_o^s(x_o^s, y_o^s)$ 、 $D_o^t(x_o^t, y_o^t)$ が、算定できる。さらに、[SBM-I] で実行可能解を得ることができない場合には、次の [Super SBM-I]、

10) [SBM-I] と [Super SBM-I] については、例えば、参考文献[3]の pp. 333-335 を参照されたい。

$$\begin{aligned}
 D_o^s(x_o^t, y_o^t) &= \text{Min} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_{ij}^s \leq \theta x_{io}^t \quad i=1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_{rj}^s \geq y_{ro}^t \quad r=1, \dots, h \\
 & \theta_i \geq 1 \quad i=1, \dots, m \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n, j \neq o
 \end{aligned}$$

を用いて DMU_o の効率性が求められる。

ところで、本稿では、上記モデル [SBM-I] と [Super SBM-I] を含めて、マルムクイスト生産性指数を構成する 4 種類の距離関数の値を測定する場合に、ラディアル型、非ラディアル型、インプット指向型、アウトプット指向型、無指向型など、どのタイプの DEA モデルを用いるべきかについての検討が殆どなされていない。また、多くの場合、規模に関して収穫一定を仮定したモデルが利用されているが、収穫可変を想定したモデルの適用可能性に関しても吟味する必要がある。さらに、2 期以上にわたる多期間の分析法や効率的フロンティアが交差する場合などについても考察することが求められる¹¹⁾。これらが、今後に残された課題である。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

〈参考文献〉

- [1] Coelli, T.J., Rao, D.S.P., O'Donnell, C.J., Battese, G.E. (2005), *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, 2nd ed., Springer.
- [2] Cook, W.D., Zhu, J. (2008), *Data Envelopment Analysis: Modeling Operational Processes and Measuring Productivity*, Create Space.
- [3] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K. (2007), *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, 2nd ed., Springer.
- [4] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Zhu, J., eds. (2004), *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers.
- [5] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K. (1994), *Production Frontiers*, Cambridge University Press.

11) この点に関しては、例えば、参考文献[9]の124-140頁を参照されたい。

- [6] Fried, H. O., Lovell, C. A. K., Schmidt, S. S., eds. (1993), *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Oxford University Press.
- [7] Fried, H. O., Lovell, C. A. K., Schmidt, S. S., eds. (2008), *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*, Oxford University Press.
- [8] Ray, S. C. (2004), *Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research*, Cambridge University Press.
- [9] 末吉俊幸 (2001) 『DEA－経営効率分析法－』、朝倉書店。
- [10] 刀根薫 (1993) 『経営効率性の測定と改善－包絡分析法 DEA による－』、日科技連。