一般化積率母関数法とその統計的性質

杉　原　左右一

I　はじめに

統計的モデルの母数推定法として、特に標準的仮定が成立しない場合に、積率法（MM＝Method of Moments）が有効となることは古くから良く知られているところである。本論文では、この範疇に入る方法として、Quandt and Ramsey [3] の積率母関数法（MMGF＝Method of Moment Generating Function）を取り上げて、これを一般化積率法（GMM＝Generalized Method of Moments）の場合に拡張した（仮称）一般化積率母関数法（GMMGF＝Generalized Method of Moment Generating Function）、並びに2段階（多段階）一般化積率母関数法（2段階（多段階）GMMGF）を提示して、一般化積率母関数法推定量（GMMGF 推定量）と、関連する検定統計量の漸近的諸性質を導出すると共に、GMMGF を例示することを目的としている。

本論文の内容は以下の通りである。先ず、2節で GMMGF を提示する。次に3節で GMMGF 推定量の漸近的性質（特に強一致性と漸近正規性）を導出すると共に、未知母数の有効推定法として2段階（多段階）GMMGF について述べる。4節では GMMGF 推定量とM推定量の関連性について述べ、5節で、周知のワルド検定統計量、ラグランジ乗数検定統計量、尤度比検定統計量がいずれも漸近的に χ^2 分布に従うことを指摘する。6節では、一例として数理ファイナンス分野で最も基本的なモデルである幾何ブラウン運動（GBM＝Geometric Brownian Motion）を取り上げて、GBM の母数推

定問題についてGMMGFを例示する。最後に、7節で今後に残された研究課題について述べる。

GMMGFは特に積率母関数（MGF＝Moment Generating Function）を利用した一般化積率法（GMM）である点に大きな特徴を持っており、このことから、今後幅広い分野の統計的モデルの母数の推定、検定問題に有効に適用可能であるものと思われるのである。GMMGFの特性に関しては未解決な問題が数多く残されており、今後数値シミュレーションや実証分析を通して仔細に検証されなければならない。残された研究課題については別論文でさらに検討する所存である。

II 一般化積率母関数法

$y_t(t=1,2,\cdots,T)$ をI.I.D.な確率変数とし、y_t の積率母関数（MGF）を $E(e^{sy_t})=\phi(s,\theta_0)$ とする。ただし、ϕ の関数形は既知であるものとし、$\theta_0=(\theta_{10},\theta_{20},\cdots,\theta_{p0})'$ は母数 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)'$ の真値を表わし、母数空間を $\Theta\subset R^p$ とする。また、格子点 $s_n(n=1,2,\cdots,l;l\geqq p)$ に対して、標本積率母関数を $\bar{\phi}_T(s_n)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}e^{s_ny_t}$ と表わす。分析の便宜のために以下の記号を用いることにする。ただし、S は原点を含む適当な領域を示す。

$$s=(s_1,s_2,\cdots,s_l)'\in S\subset R^l$$

$$k(y_t,s_n,\theta)=e^{s_ny_t}-\phi(s_n,\theta)$$

$$k(y_t,s,\theta)=(k(y_t,s_1,\theta),k(y_t,s_2,\theta),\cdots,k(y_t,s_l,\theta))'$$

$$h(y_t,s)=(e^{s_1y_t},e^{s_2y_t},\cdots,e^{s_ly_t})'$$

$$\phi(s,\theta)=(\phi(s_1,\theta),\phi(s_2,\theta),\cdots,\phi(s_l,\theta))' \tag{1}$$

$$h_T(y,s)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}h(y_t,s)$$

$$k_T(y,s,\theta)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}k(y_t,s,\theta)$$

$$=h_T(y,s)-\phi(s,\theta)$$

さらに、$\hat{W}_T=(\hat{w}_{nm,T})$ を l 次の対称半正値定符号な荷重行列、$W=(w_{nm})$

をl次の対称正値定符号な定数行列として、$T\to\infty$ のとき、次式が成立するものとする。

(2) $\hat{W}_T \to W$ (a. s.).

このとき、評価関数 $S_T(y, s, \theta)$ を特に、

(3) $$S_T(y, s, \theta)=\sum_{n=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}e^{s_n y_t}-\phi(s_n, \theta)\right)\hat{w}_{nm, T}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}e^{s_m y_t}-\phi(s_m, \theta)\right)$$
$$=k_T(y, s, \theta)'\hat{W}_T k_T(y, s, \theta)$$

として、与えられた格子点 $s\in S$ について、

(4) $$\hat{\theta}=\underset{\theta\in\Theta}{\operatorname{argmin}}\, S_T(y, s, \theta)$$

により θ_0 の推定量 $\hat{\theta}$ を求める方法を、本論文では一般化積率法(GMM＝Generalized Method of Moments) との類比から、一般化積率母関数法(GMMGF＝Generalized Method of Moment Generating Function) と仮称し、この様にして求められる推定量 $\hat{\theta}$ を一般化積率母関数法推定量 (GMMGF 推定量) と仮称することにする。

以下では、$S_0(s, \theta)$ を

(5) $$S_0(s, \theta)=E(k(y_t, s, \theta)')WE(k(y_t, s, \theta))$$

と定義し、次の仮定 1, 2, 3 を設定する。

仮定 1

母数空間 $\Theta\subset R^p$ はコンパクトである。

仮定 2

(6) $$E(k(y_t, s, \theta))\begin{cases}=0 & \theta=\theta_0\\ \neq 0 & \theta\neq\theta_0\end{cases}$$

であり、$S_0(s, \theta)$ は唯一 $\theta=\theta_0$ で最小値 $S_0(s, \theta_0)=0$ をとる。

仮定 3

与えられた格子点 s に対して、$k(y_t, s, \theta)$ は、すべての y_t に対して $\theta\in\Theta$ について連続であり、また、すべての $\theta\in\Theta$ に対して y_t について可測である。

仮定 1 (コンパクト性の仮定) を除外することも考えられるが、分析はや

や複雑なものとならざるを得ない。本論文では仮定1の下で議論を展開することにする。また、特に仮定2よりモデルは識別可能となり、仮定3より、GMMGF 推定量 $\hat{\theta}$ が厳密に定義されることがわかる。

Ⅲ　一般化積率母関数法推定量の漸近的性質

本節では GMMGF 推定量の漸近的諸性質を明らかにしたい。証明についてはその要点を述べることとする。

3.1　一般化積率母関数法推定量の強一致性

仮定1，2，3に加えて、次の仮定4を設定する。

仮定4

与えられた格子点 s と、すべての $\theta\in\Theta$ について、

(7)　$\phi(s,\theta)<\infty$

である。

先ず、$|S_T(y,s,\theta)-S_0(s,\theta)|$ について次式が成立することに注意しよう。

(8)
$$\begin{aligned}
&|S_T(y,s,\theta)-S_0(s,\theta)|\\
&\leqq|(k_T(y,s,\theta)-E(k(y_t,s,\theta)))'\hat{W}_T(k_T(y,s,\theta)-E(k(y_t,s,\theta)))|\\
&\quad+2|(E(k(y_t,s,\theta)))'\hat{W}_T(k_T(y,s,\theta)-E(k(y_t,s,\theta)))|\\
&\quad+|(E(k(y_t,s,\theta)))'(\hat{W}_T-W)E(k(y_t,s,\theta))|\\
&\leqq\|h_T(y,s)-\phi(s,\theta_0)\|^2\|\hat{W}_T\|\\
&\quad+2\|\phi(s,\theta_0)-\phi(s,\theta)\|\,\|h_T(y,s)-\phi(s,\theta_0)\|\,\|\hat{W}_T\|\\
&\quad+\|\phi(s,\theta_0)-\phi(s,\theta)\|^2\|\hat{W}_T-W\|
\end{aligned}$$

従って、$T\to\infty$ のとき、次式が成立することがわかる。

(9)　$\sup_{\theta\in\Theta}|S_T(y,s,\theta)-S_0(s,\theta)|\longrightarrow 0$　(a. s.)

一方、仮定2より、$S_0(s,\theta)$ は唯一 $\theta=\theta_0$ において最小値 $S_0(s,\theta_0)=0$ をとるから、従って $T\to\infty$ のとき、

(10)　$\hat{\theta}\longrightarrow\theta_0$　(a. s.)

が成立する。すなわち、仮定1～4の下で、GMMGF 推定量 $\hat{\theta}$ が θ_0 の強一

致推定量であることがわかる。

3.2　一般化積率母関数法推定量の漸近正規性

仮定1～4に加えて、以下の仮定5～7を設定しよう。

仮定5

θ_0 は Θ の内点である。

仮定6

$\phi(s,\theta)$ は θ について連続微分可能であり、

$$\text{rank}\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)=p\leqq l \tag{11}$$

が成立する。

仮定7

$$\Omega=E(k(y_t,s,\theta_0)k(y_t,s,\theta_0)') \tag{12}$$

は正値定符号である。

GMMGF 推定量 $\hat{\theta}$ は次の一階の条件式

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_T(y,s,\hat{\theta})}{\partial\theta}&=2\left(-\frac{\partial\phi(s,\hat{\theta})}{\partial\theta'}\right)'\hat{W}_T k_T(y,s,\hat{\theta})\\&=0\end{aligned} \tag{13}$$

を満たす。また、$\bar{\theta}$ を $\hat{\theta}$ と θ_0 の中間値として、$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta_0)$ が次式で表現出来ることに注意しよう。

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta_0)=&\left(\left(-\frac{\partial\phi(s,\hat{\theta})}{\partial\theta'}\right)'\hat{W}_T\left(-\frac{\partial\phi(s,\bar{\theta})}{\partial\theta'}\right)\right)^{-1}\\&\left(-\frac{\partial\phi(s,\hat{\theta})}{\partial\theta'}\right)'\hat{W}_T\sqrt{T}k_T(y,s,\theta_0)\end{aligned} \tag{14}$$

特に、$\sqrt{T}k_T(y,s,\theta_0)$ については、中心極限定理より、$T\to\infty$ のとき次式が成立する。

$$\sqrt{T}k_T(y,s,\theta_0)=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}k(y_t,s,\theta_0)\xrightarrow{d}N(0,\Omega) \tag{15}$$

なお、Ω の第 (n,m) 要素 Ω_{nm} は次式で与えられる。

(16)　$\Omega_{nm}=\phi(s_n+s_m,\theta_0)-\phi(s_n,\theta_0)\phi(s_m,\theta_0)$

そうすれば、(14)、(15)式より、仮定1～7の下で、$T\to\infty$ のとき次式が成立することがわかる。

(17)　$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta_0)\xrightarrow{d}N(0,\Sigma_{GM})$

ただし、Σ_{GM} は次式で与えられる。

(18)　$$\Sigma_{GM}=\left(\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)'W\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)'W\Omega W\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)\left(\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)'W\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)\right)^{-1}$$

特に、$\hat{W}_T=I_l$ である場合には[1]、

(19)　$$\Sigma_{GM}=\left(\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)'\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)'\Omega\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)\left(\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)'\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)\right)^{-1}$$

となり、また、$\hat{\Omega}$ を Ω の一致推定量とし、正値定符号として、$\hat{W}_T=\hat{\Omega}^{-1}$ である場合には、

(20)　$$\Sigma_{GM}=\left(\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)'\Omega^{-1}\left(\frac{\partial\phi(s,\theta_0)}{\partial\theta'}\right)\right)^{-1}=\Sigma_{GM}^{(0)}$$

となる。

周知の様に、任意の対称正値定符号行列 W について、

(21)　$\Sigma_{GM}\geqq\Sigma_{GM}^{(0)}$

が成立するから、特に $\hat{W}_T=\hat{\Omega}^{-1}$ の場合が有効となることがわかるのである。

3.3　2段階（多段階）一般化積率母関数法

3.2節の議論をもとにすれば、θ_0 の2段階（多段階）有効推定法として以下の2段階（多段階）GMMGF が考えられよう。

1)　$\hat{W}_T=I_l$ の場合が Quandt and Ramsey [3] に他ならない。

すなわち、先ず第1段階として、$\hat{W}_T=I_l$ として、GMMGF 推定量 $\hat{\theta}^{(1)}$ を

(22) $$\hat{\theta}^{(1)}=\underset{\theta\in\Theta}{\operatorname{argmin}}\, k_T(y,s,\theta)'k_T(y,s,\theta)$$

より求め、これを用いて Ω の推定量 $\hat{\Omega}^{(1)}$

(23) $$\hat{\Omega}^{(1)}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}k(y_t,s,\hat{\theta}^{(1)})k(y_t,s,\hat{\theta}^{(1)})'$$

を求める。次に第2段階として、GMMGF 推定量 $\hat{\theta}^{(2)}$ を

(24) $$\hat{\theta}^{(2)}=\underset{\theta\in\Theta}{\operatorname{argmin}}\, k_T(y,s,\theta)'\hat{\Omega}^{(1)-1}k_T(y,s,\theta)$$

により求めればよい。また、以上のステップを収束するまで反復する多段階 GMMGF も考えられよう。

上記2段階、および多段階 GMMGF の統計的性質については、適当な非線形最適化法を用いて今後数値シミュレーションにより詳しく検討する必要があろう。

Ⅳ M 推定量との関連性

本節では GMMGF 推定量 $\hat{\theta}$ と M 推定量（M estimator）の関連性について指摘しておきたい。

そのために、ここで(3)式の評価関数 $S_T(y,s,\theta)$ に代わって、特に次式の評価関数 $S_T^*(y,s,\theta)$

(25) $$S_T^*(y,s,\theta)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{l}\sum_{m=1}^{l}(e^{s_n y_t}-\phi(s_n,\theta))\hat{w}_{nm,T}(e^{s_m y_t}-\phi(s_m,\theta))$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}k(y_t,s,\theta)'\hat{W}_T k(y_t,s,\theta)$$

を考え、θ_0 の M 推定量として

(26) $$\hat{\theta}^*=\underset{\theta\in\Theta}{\operatorname{argmin}}\, S_T^*(y,s,\theta)$$

を考えよう。M 推定量 $\hat{\theta}^*$ は次の一階の条件式

(27) $$\frac{\partial S_T^*(y,s,\hat{\theta}^*)}{\partial\theta}=0$$

を満たす。ここで特に

(28) $$\frac{\partial S_T^*(y,s,\theta)}{\partial\theta}=\frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(-\frac{\partial\phi(s,\theta)}{\partial\theta'}\right)'\hat{W}_T k(y_t,s,\theta)$$

$$=2\left(-\frac{\partial\phi(s,\theta)}{\partial\theta'}\right)'\hat{W}_T\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}k(y_t,s,\theta)\right)$$

$$=\frac{\partial S_T(y,s,\theta)}{\partial\theta}$$

が成立することに注意すれば、GMMGF 推定量 $\hat{\theta}$ が M 推定量 $\hat{\theta}^*$ に関する一階の条件式(27)を満たすことが理解出来るのである。

V　統計的仮説検定

$h(\theta)$ を θ に関する h 次元ベクトル値関数として、本節では帰無仮説 $H_0: h(\theta_0)=0$、対立仮説 $H_1: h(\theta_0)\neq 0$ の統計的仮説検定を考えよう。

以下では、$\hat{\Omega}$ を Ω の一致推定量とし、正値定符号として、評価関数 $S_T(y, s,\theta)$ を特に

(29) $$S_T(y,s,\theta)=\frac{1}{2}k_T(y,s,\theta)'\hat{\Omega}^{-1}k_T(y,s,\theta)$$

と定義する。また、制約 $h(\theta_0)=0$ 付きの GMMGF 推定量を $\tilde{\theta}$ と表わし、$\tilde{\Omega}$ を $\tilde{\theta}$ を用いて求めた Ω の推定量とする。

次の仮定 8 を設定する。

仮定 8

(30) $$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial h(\theta_0)}{\partial\theta'}\right)=h\leqq p$$

が成立する。

そこで、周知のワルド検定統計量、ラグランジ乗数検定統計量、尤度比検定統計量として、以下の 3 検定統計量を考えよう。

(31) $$W=Th(\hat{\theta})'\left(\left(\frac{\partial h(\hat{\theta})}{\partial\theta'}\right)\left(\left(\frac{\partial\phi(s,\hat{\theta})}{\partial\theta'}\right)'\hat{\Omega}^{-1}\left(\frac{\partial\phi(s,\hat{\theta})}{\partial\theta'}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial h(\hat{\theta})}{\partial\theta'}\right)'\right)^{-1}h(\hat{\theta})$$

(32) $$LM=T\left(\frac{\partial S_T(y,s,\tilde{\theta})}{\partial\theta'}\right)\left(\left(\frac{\partial\phi(s,\tilde{\theta})}{\partial\theta'}\right)'\tilde{\Omega}^{-1}\left(\frac{\partial\phi(s,\tilde{\theta})}{\partial\theta'}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\partial S_T(y,s,\tilde{\theta})}{\partial\theta'}\right)'$$

(33) $$LR=2T(S_T(y,s,\hat{\theta})-S_T(y,s,\tilde{\theta}))$$

そうすれば、仮定1～8と、帰無仮説 H_0 の下で、これら3検定統計量が $T\to\infty$ の場合いずれも $\chi^2(h)$ 分布に従うことが明らかになる。

VI 適用例

GMMGF を例示する意味で、数理ファイナンス分野の代表的モデルである幾何ブラウン運動（GBM＝Geometric Brownian Motion）の未知母数の推定問題について考察しよう。

$\sigma_0>0$ とし、B_t を標準ブラウン運動として、次式の確率微分方程式で表わされる GBM x_t を考える。

(34) $$dx_t=\alpha_0 x_t dt+\sigma_0 x_t dB_t$$

解 x_t は次式で与えられる。

(35) $$x_t=x_0 e^{\left(\alpha_0-\frac{\sigma_0^2}{2}\right)t+\sigma_0 B_t}$$

ここで、上式を対数変換し、時間幅を単位時間にとり離散化（$t=1,2,\cdots,T$）した上で、階差を施した次式で表わされるモデルを考えよう。

(36) $$\begin{aligned}y_t&=\log x_t-\log x_{t-1}\\&=\log\left(1+\frac{x_t-x_{t-1}}{x_{t-1}}\right)\left(\cong\frac{x_t-x_{t-1}}{x_{t-1}}\right)\\&=\left(\alpha_0-\frac{\sigma_0^2}{2}\right)+\sigma_0\varepsilon_t\qquad t=1,2,\cdots,T\end{aligned}$$

ただし、

(37) $$\begin{aligned}\varepsilon_t&=B_t-B_{t-1}\\&\sim NID(0,1)\end{aligned}$$

であり、

(38)　$y_t \sim NID\left(\alpha_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}, \sigma_0^2\right)$

となることに注意しよう。以下では $\theta=(\alpha, \sigma^2)'$、$\theta_0=(\alpha_0, \sigma_0^2)'$ と表わす。

言うまでもなく、最尤法により θ_0 を推定出来るが、y_t の積率母関数が

(39)　$\phi(s, \theta_0) = e^{\left(\alpha_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right)s + \frac{\sigma_0^2}{2}s^2}$

と表現出来ることに注意すれば、別途 GMMGF によっても θ_0 を推定することが出来て、GMMGF 推定量 $\hat{\theta}$ が3節で明らかにした漸近的諸性質を持つことがわかるのである。ただしこの場合には、$\frac{\partial\phi(s, \theta_0)}{\partial\theta'}$、$\Omega_{nm}(n, m=1, 2, \cdots, l)$ はそれぞれ次式で与えられる。

(40)　$$\frac{\partial\phi(s, \theta_0)}{\partial\theta'} = \begin{pmatrix} s_1\phi(s_1, \theta_0), & -\frac{1}{2}s_1(1-s_1)\phi(s_1, \theta_0) \\ s_2\phi(s_2, \theta_0), & -\frac{1}{2}s_2(1-s_2)\phi(s_2, \theta_0) \\ \vdots & \vdots \\ s_l\phi(s_l, \theta_0), & -\frac{1}{2}s_l(1-s_l)\phi(s_l, \theta_0) \end{pmatrix}$$

(41)　$\Omega_{nm} = e^{\left(\alpha_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right)(s_n+s_m)}\left(e^{\frac{\sigma_0^2}{2}(s_n+s_m)^2} - e^{\frac{\sigma_0^2}{2}(s_n^2+s_m^2)}\right)\quad n, m=1, 2, \cdots, l$

なお、ここで比較の意味で、θ_0 の積率推定量 $\hat{\hat{\theta}}$ とその漸近的性質について整理しておこう。

そのために、標本平均及び標本分散を

(42)　$m = \bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$

(43)　$v^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - m)^2$

と表わそう。積率法に従えば、

(44)　$m = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$

(45)　$v^2=\sigma^2$

より、積率推定量 $\hat{\hat{\theta}}=(\hat{\hat{\alpha}},\hat{\hat{\sigma}}^2)'$ は

(46)　$\hat{\hat{\alpha}}=m+\dfrac{v^2}{2}$

(47)　$\hat{\hat{\sigma}}^2=v^2$

と求められる。$T\to\infty$ のとき、

(48)　$\hat{\hat{\alpha}}\longrightarrow\left(\alpha_0-\dfrac{\sigma_0^2}{2}\right)+\dfrac{\sigma_0^2}{2}=\alpha_0$　(a. s.)

(49)　$\hat{\hat{\sigma}}^2\longrightarrow\sigma_0^2$　(a. s.)

が成立し、積率推定量 $\hat{\hat{\theta}}$ が θ_0 の強一致推定量であることがわかる。また、積率推定量の漸近正規性に関しては次式が成立することがわかる。

(50)
$$\begin{aligned}\sqrt{T}\begin{pmatrix}\hat{\hat{\alpha}}-\alpha_0\\ \hat{\hat{\sigma}}^2-\sigma_0^2\end{pmatrix}&=\sqrt{T}\begin{pmatrix}m+\dfrac{v^2}{2}-\alpha_0\\ v^2-\sigma_0^2\end{pmatrix}\\
&=\sqrt{T}\begin{pmatrix}m-\left(\alpha_0-\dfrac{\sigma_0^2}{2}\right)+\dfrac{1}{2}(v^2-\sigma_0^2)\\ v^2-\sigma_0^2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&\dfrac{1}{2}\\ 0&1\end{pmatrix}\sqrt{T}\begin{pmatrix}m-\left(\alpha_0-\dfrac{\sigma_0^2}{2}\right)\\ v^2-\sigma_0^2\end{pmatrix}\\
&\xrightarrow{d}N(0,\Sigma_M)\qquad (T\to\infty \text{ のとき})\end{aligned}$$

ただし、Σ_M は次式で与えられる。

(51)
$$\begin{aligned}\Sigma_M&=\begin{pmatrix}1&\dfrac{1}{2}\\ 0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_0^2&0\\ 0&2\sigma_0^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\ \dfrac{1}{2}&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\sigma_0^2+\dfrac{1}{2}\sigma_0^4&\sigma_0^4\\ \sigma_0^4&2\sigma_0^4\end{pmatrix}>0.\end{aligned}$$

以上、本節では GMMGF を例示する意味で、GBM の母数推定問題について考察したのであるが、筆者の知る限り、例えばより一般的なレビィー過程について GMMGF を含めた種々の統計的推定、検定方法の特性に関しては未だ十分な検討がなされていない。この種の問題については今後さらに検討されなければならないだろう。

VII　おわりに

本論文では、一般化積率母関数法（GMMGF）を提示して、GMMGF 推定量の漸近的性質を導出すると共に、2 段階、及び多段階 GMMGF、並びに検定統計量の漸近的性質について言及した。また、幾何ブラウン運動（GBM）の母数推定問題を例にとり GMMGF を例示した。GMMGF は積率母関数（MGF）を利用した一般化積率法（GMM）であるが、特に積率母関数（MGF）を用いていることから、今後幅広い統計的モデル分析に有効に適用可能であると思われるのである。

本論文を閉じるにあたって、最後に GMMGF の問題点と、今後に残された研究課題について述べたい。

先ず、本論文で扱った GMMGF の問題点として、言うまでもなく MGF が発散する場合にはこの方法が使用出来ない点を挙げることが出来る。この問題を解決するためには、MGF に代わって特性関数（CF＝Characteristic Function）を用いる（仮称）一般化特性関数法（GMCF＝Generalized Method of Characteristic Function）を考えれば良いであろう。GMCF の場合についても、本質的には本論文と同様の議論を展開することが可能である[2)]。

次に本論文では、GMMGF 推定量、及びそれに基づく検定統計量の漸近的性質を中心に考察したのであるが、今後 2 段階、及び多段階 GMMGF の統計的性質や、また、推定量、検定量の小標本特性についても考察されなければならない。さらに、最大経験尤度法（MEL＝Maximum Empirical Likeli-

2)　この点については Heathcote [1] が参考になる。

hood）を含め、他の種々の統計的分析方法との関連性についても考察されなければならないだろう。

また、本論文では問題の本質を明らかにする意味から、y_t が I.I.D. な場合について考察した。予じめ適当な変換を施すことにより、問題を I.I.D. な場合に帰着させることが出来る場合も少なくないとは言え、この仮定がやや限定的な仮定であることもまた否めないところであろう。今後、例えば L_p- 近似可能過程を含めて、y_t が時間的従属構造や、分散変動構造を持つ場合への拡張についても考察されなければならないだろう。ただし、ある種の正則条件の下で、この様な場合への拡張も可能であることを付記しておきたい。

最後に、格子点 s の離散化（連続化）問題について述べたい。先ず、$s_n \approx 0$ の場合には、一種の弱識別（Weak Identification）の状況が発生するから、この点に十分注意する必要があることを指摘したい[3]。また本論文では、標本の大きさ T とは無関係に l 個の固定した格子点 $s=(s_1, s_2, \cdots, s_l)'$ を考えたのであるが、これとは別に、l を T と共に増加させることも考えられよう。格子点の個数やその間隔、s の領域 S をどの様に選択するか等について、今後数値シミュレーションを行い検討する必要があろう。これとは逆に、連続型荷重関数を用いて評価関数を構築することも考えられる。この方法を GMCF に適用することも考えられよう。なお、上記とは別の視点の問題点として、連続時間モデルの離散化問題についても注意しなければならない。6 節ではややナイーブな離散近似を用いているが、より複雑な連続時間モデルを扱うにあたっては、より精巧な離散近似を行った上で GMMGF を用いる必要があろう。

以上、GMMGF の問題点と今後に残された研究課題について述べた。これらの研究課題については今後引続き論究する所存である。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

3）　Quandt and Ramsey ［3］は $|s_n| \leqq 0.04$（並びに $|s_n| \geqq 0.75$）の場合を除外することを推奨している。

参考文献

[1] Heathcote, C.R. (1977), "The Integrated Squared Error Estimation of Parameters," *Biometrika*, 64, 255-264.

[2] Karatzas, I., and Shreve, S.E. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd. ed.*, Springer-Verlag, New York.

[3] Quandt, R.E., and Ramsey, J.B. (1978), "Estimating Mixtures of Normal Distributions and Switching Regressions," *Journal of the American Statistical Association*, 73, 730-738.