

CR ヘッジングにおけるオプションの役割

John Houng

I はじめに

日本の金融機関 (FI) は、経営統合 (M&A)¹⁾を通じ、金融システムの安定性、効率性、国際競争力などの、機能総合力を高める役割を担っているといえる。それら経営統合は、収益力の増大が期待されると同時に、不良債権処理や、資産・資本の調整、公的資金の早期返済といった課題に対する解決策を見出している。しかし、問題は、規模の経済性を追求する中で、経営陣が大規模銀行を経営する実力を有するのか、そして、経営統合のタイミング、昨今のグローバル化環境における、デリバティブ取引戦略への取り組みである。

現代におけるFIの経営管理の高度化、ALMの充実により、預貸業務を管理する機能が、デリバティブ取引を含め、リスクマネジメント部門へ移行するという道筋が事実上固まっている。これにより、金利収益、売買収益、サービス手数料収益など²⁾の収益管理に平行して、デリバティブのリプライシング (repricing)、インセンティブス (incentives)、リテンション (retention) などにより、クレジット・リスク (Credit Risk, 以下CR) を抑えるよ

1) 例えば、2004年7月、三菱東京FGとUFJホールディングスは経営統合を発表した。総資産は188兆円(世界1位)、株式時価総額は経済事情を反映し、やや小さく9.2兆円(世界12位)。(日本経済新聞2004/7/15)

2) 日本の銀行における現行の収益源は、貸付、債券による金利収入が60%、債券やデリバティブなどの売買益が20%、サービス手数料収入が20%程度である。

うに工夫することが可能である。CRの管理に際して、資産サイドの信用品質が低下、格付けの降下等が、クレジット・スプレッド (credit spread)³⁾を変化させる。このような、デフォルト事象が起こると、純資産 (net worth) は減少するが、これを防ぐため、B/SとOBSのデフォルト期待の予想値を計測すると共に、ヘッジ取引を実行することが必要となる。

本稿では、まず、CRデフォルト率に関して論じる。次いで、CRヘッジの技法、特に、プライシング・プロセスとリスク中立条件における動態市場の収益が、実際の運用の際に活用されていることを示す⁴⁾。さらに、デフォルト・リスクを条件とするオプションに関して、デフォルト発生確率とそのリスクヘッジのための評価手法、オプションの権利行使に関するプライシングと損失把握の設定方法について分析する。最後に、プット・オプションの売り手のクレジット・ランキング資産限度と価値変化に関する応用スキルを論じる。

II CRにおけるデフォルト率の予測

現代のデリバティブ市場の規模は非常に大きく、アメリカの商業銀行におけるデリバティブ契約の想定元本 (notional amount) は、総資産の約10倍である⁵⁾。それらに投資された資産の不確実性を数値で評価し、対象資産リスクを正確に把握する必要がある。デリバティブの基本的な評価は、最悪のシナリオにおけるリスク許容度と、それらリスクの移転の仕組で決まる。従

3) オプション運用の際、収益は、受け取りスプレッドに限定されると考える。

4) オプションは取引コストなどの摩擦要素を無視すれば、利益も損失も、現資産価格の約定価格からの変化によって、増加・減少するものであるとする。即ち、コール・オプションのロング・ポジションは $\text{Max}(S - E, 0)$ 、プット・オプションのロング・ポジションは $\text{Max}(E - S, 0)$ となる。ただし、 S は原資産価格、 E は行使価格とプレミアムである。

5) (表2-1) 米国商業銀行実績 (\$ trillion)

| 商業銀行 | 総資産 | デリバティブ契約 |
|------------|-------|----------|
| 上位 25 商銀 | 31.68 | 475.58 |
| その他 342 商銀 | 17.42 | 2.62 |
| 全体 367 行 | 49.10 | 478.32 |

(出所) www.occ.gov

って、B/Sにおいて許容されるべき最低限の価格水準を確保するため、リプライシングとデュレーション (duration) が調整手法の課題となる。ここでは、このようなオプション契約を、ポートフォリオのリスクとリターンとして把握し、予期デフォルト率をを反映させると共に、プットあるいはコールによりリスクを回避する手法、さらには、クレジットVaRを用いてシナリオ分析の結果を判断したい。

1. 無リスク資産によるデフォルト率計測

格付け機関⁶⁾の信用評点によって、価値の分析をする場合、

①まず、HRHRの理論⁷⁾として、

国債利回り (r_f) - 債券利回り (R) = デフォルトコストの現在価値として評価する。

②非デフォルト価値の予測は (表2-2) の通りである⁸⁾。

(表2-2) デフォルト予測値⁹⁾

| 満期 | 国債 (r_f) | 債券 (R) | 非デフォルト価値 (d) |
|----|--------------|------------|------------------|
| 1 | 5.0 | 5.25 | 0.2497 |
| 2 | 5.0 | 5.50 | 0.9950 |
| 3 | 5.0 | 5.70 | 2.0781 |
| 4 | 5.0 | 5.80 | 3.3428 |
| 5 | 5.0 | 5.95 | 4.6390 |

例えば、単位¥100MM、1年目の国債価値が $100 \cdot e^{-0.05} = 95.1229$ 、債券

6) 代表的な格付け機関として、Moody's、Standard & Poor'sが挙げられる。

7) HRHR (Higher Return Higher Risk) とは、高利回りの債券ほど、損失の可能性が高いという意味で用いられる。

8) John Hull pp. 624-627を参照

9) 簡単な現在価値の算出方法：国債 $100/1.05 = 95.2381$ 、債券 $100/1.0525 = 95.011$ 、よって、 $d = 0.2275\%$ となる。

価値が $100 \cdot e^{-0.0525} = 94.8854$ であるとする、非デフォルトの価値 (d 値) は $(95.1229 - 94.8854) / 95.1229 = 0.2499\%$ になる。同様の方法で、2年目は 0.9950% と計測できる。

③もし、債券価値のランキングが同等であれば、第2年目の予測非デフォルト率は、 $0.9950\% - 0.2497\% = 0.7453\%$ という結果となる。

④一般的にいえば、次の (2.1) 式および (2.2) 式を得る¹⁰⁾。

$$(2.1) \quad d(0, T) = 1 - e^{-[\lambda(T) - \gamma(T)]T}$$

$$(2.2) \quad d(T_1, T_2) = e^{[\lambda(T_1) - \gamma(T_1)]T_1} - e^{[\lambda(T_2) - \gamma(T_2)]T_2}$$

⑤例をあげると、国債とBBB評価の債券とのスプレッドが130bps (5年) と170bps (10年) であれば、 $d(0, 5) = 0.0629$ 、 $d(0, 10) = 0.1563$ 、 $d(5, 10) = 0.0934$ となる。即ち、このBBB債券の5年から10年にかけての非デフォルトの値は9.34%となる。

2. デフォルト値の統計分析

上記において、単一金融商品、特に債券に関して、国債を基準として評価する手法を紹介した。ここでは、格付け機関の統計情報を分析する手法を考えたい。(表2-3) はStandard & Poor's (Feb 2004 : Ratings Performance 2003) 格付けデフォルト率の平均累積表である。各年度のデフォルトに関して、例えばBBBの2年間の0.64%は、第1年度と第2年度の差引きをとっている。全体の推移を見てみると、特にBBB級以上における値が、デフォルト率の大きい伸びを示しているのがわかる。逆に、BB級以下は、低減していくのがわかる。一方、全体累積の変化値と平均 (μ) および分散 (σ_s^2) は投資 (investment grade) あるいは投機 (speculative grade) においても、不確実性リスクのVaRをコントロールできるほか、Black-Sholes Modelを応用した信用リスク分析に基づき貸出を構築することもできる¹¹⁾。

10) $d(0, T) = \frac{p'(T) - p(T)}{p'(T)} = \frac{e^{-\lambda(T) \cdot T} - e^{-\gamma(T) \cdot T}}{e^{-\lambda(T) \cdot T}} = 1 - e^{-[\lambda(T) - \gamma(T)]T}$

11) ホング (2003) p.65 参照。

(表2-3) 各格付におけるデフォルトの平均累積表(1981年～2003年)(単位：%)

| 格付/年度 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 |
|--------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| AAA | 0.00 | 0.00(0) | 0.03(0.03) | 0.06(0.03) | 0.10(0.04) | 0.48(0.05) | 0.65(0.09) |
| AA | 0.01 | 0.04(0.03) | 0.10(0.06) | 0.19(0.09) | 0.31(0.12) | 0.94(0.12) | 1.45(0.08) |
| A | 0.05 | 0.15(0.10) | 0.28(0.13) | 0.45(0.17) | 0.65(0.20) | 1.95(0.33) | 3.10(0.27) |
| BBB | 0.37 | 1.01(0.64) | 1.67(0.66) | 2.53(0.86) | 3.41(0.88) | 6.93(0.71) | 10.02(0.69) |
| BB | 1.36 | 4.02(2.66) | 7.12(3.10) | 9.92(2.80) | 12.38(2.46) | 21.00(1.16) | 24.57(0.55) |
| B | 6.08 | 13.31(7.23) | 19.20(5.89) | 23.66(4.46) | 26.82(3.66) | 35.41(1.20) | 40.56(0.97) |
| CCC/C | 30.85 | 39.76(8.91) | 45.47(5.71) | 49.53(4.06) | 53.00(3.47) | 58.44(0.85) | 61.58(0.00) |
| 投資の度合い | 0.13 | 0.37(0.24) | 0.63(0.26) | 0.96(0.33) | 1.31(0.35) | 2.91(0.34) | 4.28(0.31) |
| 投機の度合い | 5.27 | 10.46(5.19) | 15.05(4.59) | 18.73(3.68) | 21.58(2.85) | 30.04(1.17) | 34.45(0.74) |
| 全等級 | 1.76 | 3.54(1.98) | 5.13(1.59) | 6.47(1.34) | 7.55(1.08) | 11.13(0.58) | 13.39(0.44) |

注：()内は2年間の差引、Standard & Poor's risk solution credit 6.6より作成

(表2-4) 各格付けの推移マトリックス (1981年～2003年)(単位：%)

| fr/to | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC/C | D | NR |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AAA | 88.07 | 6.81 | 0.60 | 0.14 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 4.33 |
| AA | 0.59 | 87.37 | 7.50 | 0.57 | 0.07 | 0.10 | 0.02 | 0.01 | 3.77 |
| A | 0.05 | 2.01 | 87.42 | 5.54 | 0.43 | 0.16 | 0.03 | 0.05 | 4.31 |
| BBB | 0.03 | 0.19 | 3.91 | 84.46 | 4.56 | 0.84 | 0.22 | 0.37 | 5.41 |
| BB | 0.03 | 0.07 | 0.37 | 5.09 | 76.32 | 7.53 | 1.02 | 1.36 | 8.21 |
| B | 0.00 | 0.07 | 0.24 | 0.31 | 4.88 | 73.88 | 4.42 | 6.08 | 10.12 |
| CCC/C | 0.08 | 0.00 | 0.25 | 0.51 | 1.36 | 9.32 | 46.27 | 30.08 | 11.36 |

注：NR rating withdrawn, Standard & Poor's risk solution CrediPro 6.6より作成

(表2-5) 5年間の平均推移マトリックス乗数 (単位：%)

| fr/to | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC/C | D | NR |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AAA | 56.85 | 20.62 | 4.26 | 1.18 | 0.14 | 0.14 | 0.00 | 0.10 | 16.71 |
| AA | 1.96 | 53.95 | 22.66 | 3.73 | 0.51 | 0.43 | 0.06 | 0.29 | 46.40 |
| A | 0.16 | 6.17 | 55.34 | 14.74 | 2.40 | 1.02 | 0.20 | 0.58 | 19.39 |
| BBB | 0.20 | 1.00 | 12.29 | 46.73 | 8.98 | 2.84 | 0.68 | 2.75 | 24.52 |
| BB | 0.03 | 0.29 | 2.00 | 13.43 | 28.02 | 10.40 | 1.58 | 11.24 | 33.01 |
| B | 0.05 | 0.11 | 0.69 | 2.50 | 10.23 | 21.91 | 2.89 | 24.82 | 36.81 |
| CCC/C | 0.15 | 0.00 | 0.31 | 2.17 | 3.10 | 9.44 | 5.26 | 45.36 | 34.21 |

注：(資料出所) Standard & Poor'sより作成

3. 格付け推移のデフォルト率計測

投資ポートフォリオのリスクの変化に関して、デフォルト推移の相関性はストレステスト乗数 (stress test multiplier) を利用するのが良い¹²⁾。従って、B/Sの経済資本において、BB以下のデフォルトリスクの高い債券・融資を増やす場合は、B/Sポジションの構成、経済インフラの変化等を全体的に考慮しなければならない。例えば、(表2-4)において、BB級の格付けがB以下に移転する確率は22年間の平均で6.24%、デフォルト率の標準偏差 $\sigma = 1.76\%$ とすれば、それらVaRの限界値を計算することも可能であろう¹³⁾。(表2-5)は、推移マトリックスであり、マルコフ・プロセス (Markov Process) から、5年間、分析した例である。各推移要素は独立としたり、また、CR要素に関する相関性を外生変数としたり、担保保証の問題、リカバー率などを考慮した研究も多数ある。

12) ホング (2003) pp. 71-72を参照。

13) ただし、極めて異常な事象が発生した場合を考え、自己のポートフォリオへの影響をテストしておく必要がある。

4. Black-Scholes Model によるエクイティ値分析

CR資産 $V_T = \text{Max}(S(T) - E, 0)$ から、時間原点 (0) におけるエクイティ値は、

$$(2.3) \quad V_0 = S(t_0) \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)$$

となる¹⁴⁾。ただし、 S はCR原資産価格 (初期 $S(t_0)$ 、 T 期 $S(T)$)、 E は債券の T までの返済額、 $d_1 = \frac{\ln(S(t_0)/E) + (r_f + \sigma_s^2/2)T}{\sigma_s \cdot \sqrt{T}}$ 、 $d_2 = d_1 - \sigma_s \sqrt{T}$ 、

σ_s は資産のボラティリティ、 σ_v はエクイティ・ボラティリティである。このモデルの特徴を応用し、時間 (0) の債券は $(S(t_0) - E_0)$ 、債券デフォルトの

中立確率は $\sigma_v \cdot V_0 = \frac{\partial V}{\partial S} \cdot \sigma_s \cdot S(t_0)$ と導出されることは理解できよう。例を

挙げると、 $V_0 = \text{¥}3\text{MM}$ 、 $\sigma_v = 80\%$ 、1年満期の債券の返済額が $E = \text{¥}10$

MM 、 $r_f = 5\%$ とすると、 $S(t_0) = 12.40$ 、 $\sigma_s = 0.2123$ 、 $d_2 = 1.1408$ 、 $N(-d_2) = 0.127$ となり、さらに債券の市場価値は $S(t_0) - V_0 = 9.4$ 、また、 $E = 10$ の

現在価値は $10 \cdot e^{-0.05 \times 1} = 9.51$ となる。よって、予測非デフォルト値は $(9.51 - 9.40)/9.51 = 1.2\%$ となる。

III オプション・プロセスによるCRヘッジング

B/Sにおけるスポット価格¹⁵⁾の資産と負債に関する満期までの金利変動リスクによるCRデフォルトについて、現物リスクヘッジの手法や現物ヘッジ取引の寄与を探ると、レバレッジ効果を引き出す結果となっている。先物ヘッジの効果は、買い先物 (金利下降時)、売り先物 (金利上昇時) と通して、ヘッジングの最適化への貢献が挙げられる¹⁶⁾。こうした視点から、デフォルト率の変化、すなわち格付けの推移 (あるいは時価評価変動の結果) により、リスク値からポートフォリオの期待値が得られなくなる場合を想定し、既述

14) ホング (2004) 『商学論究』第5巻3号参照。

15) Spot priceとは、現物市場における価格である (あるいは、スポット・マーケット、キャッシュ・マーケットと呼ばれる)。

16) ここで、実務上、先物ヘッジにおいて、権利行使価格の裁定のやりとりをすることはないので、もし、現物価格が高まれば、再構築価格という別の尺度で見る必要がある。

のように、適切なデリバティブ取引を実行する必要がある。一般的にFIは、範囲的な価格リスクの回避にはプット・オプションを利用する¹⁷⁾。一方、負債のセンシティブ・リスクの回避はコール・オプションに支えられている¹⁸⁾。OBSのCRについて、例えばL/C先渡しクレジットや、約束ローンの金利などの条件付請求権のオプション手法も運用し、対価に買う（または売る）権利を取引すればよい。ところが、権利の対価がプレミアムの収益であれば、損失は非常に大きくなる可能性がある¹⁹⁾。このようなオプション（プットおよびコール）²⁰⁾を取引する場合、取引所からマージン・コールを要求される他、FIがCR市場のMTM変動の一致性と対称性ととのペイオフ機能を有していなければならない。

まず、全体B/Sから求められる純資産（net worth）のリスク・エクスポージャーを算出し、マクロ・ヘッジ（macro hedge）を行う。純資産の変動（ ΔE ）とプット・オプションのプライスの変動（ ΔP ）との関係式を説明する。市場金利ショックを $\left(\frac{\Delta R}{1+R}\right)$ とすると、以下のような式が得られる。²¹⁾

$$(3.1) \quad (-\Delta E) = (D_A - KD_L) \cdot A \cdot \frac{\Delta R}{1+R}$$

ただし、 D_A は資産（ A ）のデュレーション、 D_L は負債（ L ）のデュレーション、 K はレバレッジ（ L/A ）である。それに、対価プット・オプションのプライスの変動は $\Delta P' = N_p \cdot \Delta p$ となる。ただし、 N_p はオプション契約数、 Δp は金利ショックの変動値である。ところが、 $\Delta p = \frac{dp}{dB} \cdot \frac{dB}{dR} \cdot \Delta R$ とおき、 $\frac{dp}{dB} = \delta$ が単位価値の変動増分、 $\frac{dB}{dR}$ が市場値（ B ）の変動増分、さらに $\frac{dB}{B}$

17) この場合、CR資産の元本の価格はそのまま変化しない。

18) 負のリプライシング・ギャップ（negative repricing gap）、即ち、 $RSA < RSL$ のギャップである（ホング（2003）pp. 18-20参照）。

19) このプレミアム収益は、部分的リスクを補填する場合もある。

20) OTC債券オプションとFXオプションを含む。

21) Saunders and Cornet：pp. 666-667を参照。

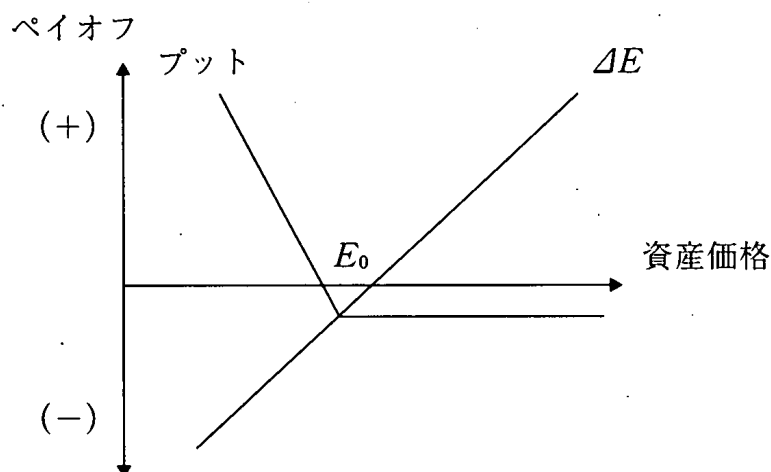
$= -MD \cdot dR$ で²²⁾、 $\frac{dB}{dR} = -MD \cdot B$ が与えられれば、

$$(3.2) \quad \Delta P' = N_p \left[\delta \cdot D \cdot B \cdot \frac{\Delta R}{1+R} \right]$$

となる。従って (3.1) と (3.2) とのオフセットのマクロヘッジ値のオプション契約数は、

$$(3.3) \quad N_p = (D_A - KD_L) \cdot \frac{A}{\delta \cdot D \cdot B}$$

が得られる。



(図3-1) ΔE ヘッジ

それらB/Sのデュレーション (D , D_A , D_L) の数値²³⁾がわかれば、エクイティの変動 (ΔE) およびオプションの契約数 (N_p)²⁴⁾を計算することができる²⁵⁾。

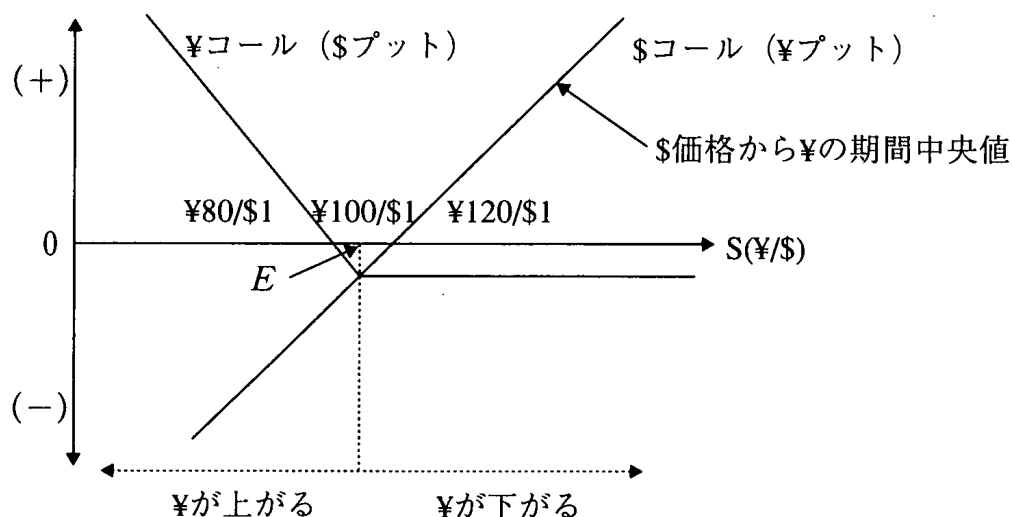
22) MD : Modified Duration ($MD = \frac{D}{1+R}$) で修正デュレーションと呼ばれる。

23) 銀行のデュレーション計算は公開されていない。ここで $[D_A - K \cdot D_L]$ はデュレーション・ギャップの調整値、資産 A の値、金利ショック ($\frac{\Delta R}{1+R}$) など、各時点が変動する。すると、月次ベースで計算すれば、その有効性は高いと考えられる。

24) 購入する契約数は、オプション市場では整数で考える。

25) 米国においては、米国オプション取引所、あるいは、OTCで取引する。

外国為替相場のリスクについて、FIのB/Sの外国資産・負債の、ロング（買い建て）でも（輸出業者）、ショート（売り建て）でも（輸入業者）、オプションを売買する取引はマイクロヘッジ（microhedge）を活用して外国為替相場変動のリスクをオフセットする。



(図3-2) 外為相場ヘッジ

条件付請求権に関しては、FI・顧客間にリスク低減のために、オプションを運用する。これに対して、保証人がキャップを保証する、ローン金利をキャップ・コール（capped call）の手法もある²⁶⁾。この保証はFIがプットを売り建て、保証人がプットを買い建てたポジションになる。

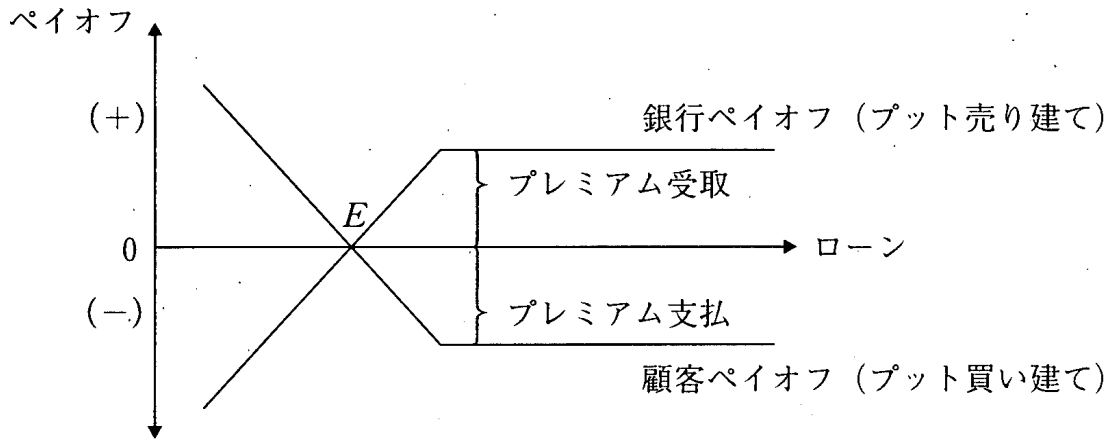
コモディティ・オプションについては、専門の銀行で広く普及している²⁷⁾。プロジェクト・ローンのうちで、権利行使価格（ E ）において、もし、価格（ X ）まで下降すれば、銀行のローンのペイオフに影響するので、ロング・プットにより銀行は収益を保護する²⁸⁾。もし、価格が単に $[X, E]$ の間に交

26) 例えば、エキゾチック・オプション（exotic option）はオプション期間中の現資産価格と経路に依存する。

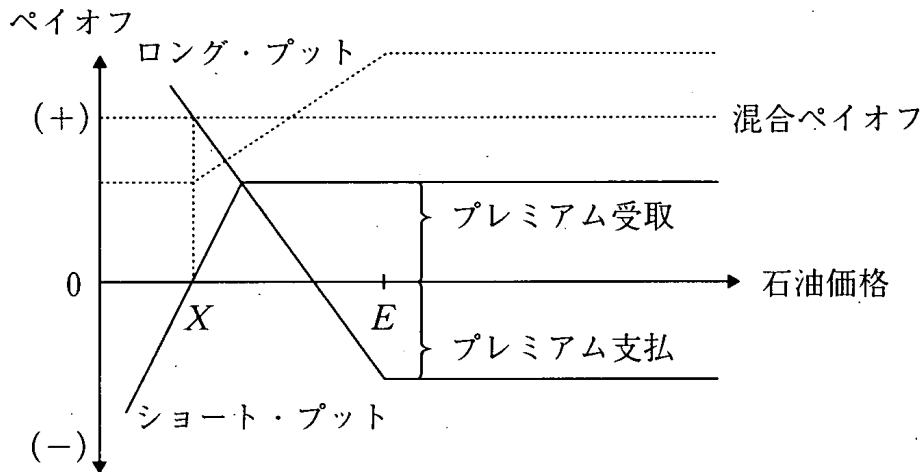
27) コモディティとは、農業、鉱業、特に石油産物を含んでいる。（ホング（2003）pp. 76-78）

28) 買い建てでは、in-the-money（ITM）の銀行ローンペイオフ（正値の確保）のオプションである。

(図3-3) 条件付請求権ヘッジ



動するのであれば、オプションの機能が有効な手段である。ただし、 X の価格がさらに下降していくのであれば、ローンのペイオフの確保を狙いとしていく。この戦略には、主として、銀行キャッシュ・フローの安定のために寄与している。また、この混合ペイオフ実行の際、プット・オプションの正味コストは、プット買い建てコストとプット売り建てとの行使価格の格差である。



(図3-4) コモディティの混合ヘッジ

次に、条件付のCR資産ヘッジのオプションの手法を紹介する。(i)スプレッドからクレジット・スプレッド・コール (credit spread call option) という、クレジット・スプレッド (CS) あるいは利回りスプレッド (yield

spread) を基準として、コールする。即ち、 ΔE 変化値はローンのポートフォリオ値とCSコールをオフセットする。(ii)デジタル・デフォルト・オプション (digital default option) により、ローン・デフォルトの特定額 (通常はローンと同額) を設定しオプションする。(iii)災害オプション (catastrophic option) により、デジタル・オプションを分割して、損失比率をコールする。例えば、損失の30%と70%に分割して、ヘッジを行う。ただし、それら最大キャップ・コールが制限される。

IV オプション・プライシング・スキル

オプション・プライシングは裁定議論 (arbitrage arguments) から導かれる。オプションの価値は、本質的価値²⁹⁾と時間価値³⁰⁾で構成される。さらに、プット・オプションとコール・オプションに関わるプット・コール同値相関性がプライシングのキーとなる。

1. 二項ツリーモデルからのプライシング

オプション価格の理論は、二項ツリーモデル (binomial tree model) から求めることができる。即ち、ローン・ポジション (買いヘッジ契約) における資産 (S) とショート・コール・ポジション (売りヘッジ契約) における権利行使資産 (E) と共に、コール・オプション・ポートフォリオは無リスクのヘッジ・ポートフォリオである³¹⁾。例えば、¥100Mのコール・オプションの内に、75%の資産を保有し、残りの25% (¥25M) をコストであるとする。もし、 $E = ¥80M$ になれば、コール・オプションの価格は [¥55M + コール・オプション価格] に従う。 E が ¥70M になれば、[¥45M + コール・オプション価格] をショート・ポジションで購入する。

29) オプションの本質的な価値は、各時点の権利行使の経済価値である。もし、負値をとれば、0をとる。

30) オプション市場価値から本質価値を差し引いた金額である。この時間価値は、投資者による期待価値である。

31) Fabzzi pp. 554-560参照。

次に、ヘッジ率から、オプション・プライシングを議論する。ヘッジは無リスク条件のペイオフと同様である。即ち、 $uHS - C_u$ （資産価格の上昇時）及び、 $dHS - C_d$ （資産価格の下落時）との均衡性定義からヘッジ率を求める。

$$(4.1) \quad H = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S}$$

ただし、 S は現時点のCR資産価格、 u は（1+次期の価格上昇率）、 d は（1+次期の価格下落率）、 C はコール・オプションの現在価値、 C_u は資産価格上昇後のコールの本質的価格（intrinsic price）、 C_d は資産価格下落後のコールの本質的価格である。前例に従えば、 $\mu = 1.25$ （¥100M/¥80M）、 $d = 0.75$ （¥60M/¥80M）、 $C_u = \max[0, ¥100M - 80M] = ¥20M$ 、 $C_d = \max[0, ¥60M - ¥80M] = 0$ とすると、 $H = [¥20M - 0] / (1.25 - 0.75) \times ¥80M = 50\%$ のヘッジ率となる。

前期のコール・オプションのプライシングに基づいて、次期のプライシングを推論する。即ち、前期のヘッジ・ポートフォリオは $(1+r)(HS - C)$ と価格上昇（あるいは下降）のペイオフ $\mu \cdot HS - C_u$ （あるいは $\mu \cdot HS - C_d$ ）との関係式は、

$$(4.2) \quad (1+r)(HS - C) = \mu \cdot HS - C_u$$

となる。(4.1) 式と (4.2) 式の関係から、コール・オプション価格 C を計算すればよく、

$$(4.3) \quad C = \left[\frac{1+r_f-d}{u-d} \right] \left[\frac{C_u}{1+r_f} \right] + \left[\frac{u-1-r_f}{u-d} \right] \left[\frac{C_d}{1+r_f} \right]$$

となる。上記の例を用いれば、 $r_f = 10\%$ とすれば、 $C = ¥12,730$ となる。これは、(3.2) 式の $\Delta P'$ のオプション・プレミアムの値を対照として運用される。

この二項ツリーモデルは、CR証券がある程度の固定的な正の値、全期間において r_f が不変、証券価格のボラティリティもある範囲内で変動するといった前提条件を必要とする。事実上、固定収益からのFCF³²⁾において、市

場金利が変動するため、証券価格のボラティリティと金利のポジションも伴って変動する。よって、オプションの時間価格を考慮する場合は、プット・コール・パリティの利回り曲線を適用しなければならない³³⁾。

2. Black-Sholes and Mertonモデルによるプライシング

(表4-1) のように、戦略的なオプションのプット・コール・パリティとして次式の一定関係が導き出される³⁴⁾。

$$(4.4) \quad C - P = S(t) + E \cdot e^{-r(T-t)}$$

一方、Black-Sholes and Mertonモデルによるコールの価格は、

$$(4.5) \quad C = S(t)N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

となる。 $\sigma=0$ のとき、 $C = S(t) - E \cdot e^{-r(T-t)}$ をショートで運用すれば、それに関わるボラティリティが削減できることがわかる。

3. オプション・プライシングの特徴

ここまでの議論同様、オプション・プライシングは摩擦のない市場（取引コスト、税金が存在せず、完全市場）においては取引されているとする。

- ① 各ファクターが、オプション価格に与える影響は以下の(表4-2)のようになる。これは、ヨーロピアン・オプションのコール及びプットだけでなく、アメリカン・オプションのそれらにも適用できる。

32) FCF (free cash flow) の計算基準とし、通常、金利は固定配分される。ただし、期末(満期前)に金利の変動幅は低減する。

33) 例えば、利回りオプション・プライシング・モデル (yield curve option pricing model)、無裁定オプション・プライシング・モデル (arbitrage-free option pricing model) などの論文が多数ある。Arbitrage-free principleについては、Capinski and Zastawniak pp.5-7を参照。

34) (表4-1) プット・コール・パリティ

| 保有 | 現時点(t) | 満期時点(T) |
|-------|--------------------------------------|----------------------|
| コール | C (プレミアム) | $\max(S(t) - E, 0)$ |
| -プット | $-P$ (プレミアム) | $-\max(E - S(t), 0)$ |
| -資産価格 | $-S(t)$ | $-S(t)$ |
| 現金 | $+E \cdot e^{-r(T-t)}$ | E |
| 合計 | $C - P - S(t) + E \cdot e^{-r(T-t)}$ | 0 |

(表4-2) ファクターの変動によるオプション価格の変化

| ファクター | 各ファクターの上昇が価格に与える影響 | |
|-------------------------------|--------------------|-------|
| | コール価格 | プット価格 |
| (1)原資産価格 (S) | ↑ | ↓ |
| (2)権利行使価格 (E) | ↓ | ↑ |
| (3)満期までの時間 (T) | ↑ | ↑ |
| (4)価格のボラティリティ期待値 (σ) | ↑ | ↑ |
| (5)無リスク金利 (r_f) (短期金利) | ↑ | ↓ |
| (6)現金支払 | ↓ | ↑ |

注：↑は上昇。↓は下落。

- ② 実際のオプション取引の際、現物ポジションと先物ポジションとの分類ができ、それらに対する特徴を認識する。まず、インデックス・オプション³⁵⁾が取引される場合、ATMの権利行使価格の計算において、プレミアムを15%高くするのが一般的実務である。次に、初期においてITMの場合、融資のデフォルト・プレミアムは相対的に高い。ATMのコール・オプションの原資産価格ボラティリティ (σ_s) は直線であり、B/S資産価格ボ

(表4-3) オプション取引分類

| 保有 | コール | プット | 本源的価値 |
|-----|-------|-------|-------|
| ATM | $S=E$ | $S=E$ | 0 |
| ITM | $S>E$ | $S<E$ | + |
| OTM | $S<E$ | $S>E$ | 0 |

(注) ATM : at the money option, ITM : in the money option, OTM : out of the money option

35) 例えば、TOPIXオプションはTOPIXを取引対象とするオプションであり、TOPIX先物はTOPIXを取引対象とする先物商品である。

ラティリティ (σ_A) は非直線の変動を示す。

- ③ CRの効果について、オプション資産と発行者クレジットの相関関係は、一方が高まれば、それらデフォルト・プレミアムは削減することになる。デフォルトし、回収がない場合、デフォルトの限界値が減少する際、デフォルト・オプション値を逆に増やすと良い。長期的にデフォルトしないコールは、初期のサイズが適当であるヘッジ・ポジションを増やす。ただし、長期のコール・オプションがそれに対するポジションのサイズをなるべく縮小して与えるべきである。

V 結論

激変している金融機関経営において、資産・負債のリスク管理によって収益管理を図るALMの手法に、デリバティブなどの高度な金融技術の運用が行われている。具体的には、金融商品のプライシング、リスクヘッジの操作が中心となるであろう。クレジット・リスク (CR) 資産のバンキング勘定とトレーディング勘定の両リスクを合わせて把握する他、リスクにおけるマイクロヘッジとマクロヘッジを統合して算出する必要もある。このようにデリバティブによるヘッジは、時間価値縮小の都度、プロセスを値洗いし³⁶⁾、CFの流動性リスクを適切にコントロールし、リスクのトータルな把握を実行するのが重要である。

伝統的な融資業務を中心としたクレジット・リスクのみならず、投資銀行においても、有価証券のデフォルトを契機に発生するリスクの回避と、収益の向上を狙ってポートフォリオ管理を行う。実際に、リスクの回避及びテイク力は、各ポジションの違いよりも、銀行業者、企業経営者、個人投資家などと一体となり、効率的にリスクを抑える手段を獲得することが重要となる。その場合、CRのデフォルト分析とCRオプションの技術なくして、現代の複雑な経営問題を解決することはできないだろう。特に、デフォルト分析につ

36) MTM(mark to market)の考え方による。

いては、過去の資産価格変動から予想されるデフォルト額をリスクとして算出する手法を採用し、GBM³⁷⁾、パラメータ相関(ρ)への戦略を実現する必要がある。

オプション・プライシングは本質的な経済価格と時間プレミアム価格との構成である。これに対して、プット・コール・パリティを取引相手との間の条件を決めて効率的に利用する。なお、CRオプション・プライシング・モデルの構築は、収益プロセスの特徴、ボラティリティの確率過程など様々な論文が発表されている³⁸⁾。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

参考文献

- Jing-zhi, Huang and Liuren Wu, (2004), "The S&P500 Index Option," *The Journal of Finance*, Vol59/4, Aug
- Kris Jacobs and Kevin Wang, (2004), "Idiosyncratic Consumption Risk and the Cross Section of Asset Returns," *The Journal of Finance*, Vol59/5, Oct
- Morton Glantz, (2003), *Managing Banking Risk*, Academic Press
- Rene M. Stulz, (2003), *Risk Management and Derivatives*, Thomson
- Frank Fabozzi et al., (2002), *Financial Markets and Institutions*, Prentice Hall
- Marek Capinski and Tomasz Zastawniak, (2003), *Mathematics for Finance*, Springer
- John C. Hull, (2000), *Options, Future and Other Derivatives*, Prentice Hall
- Didier Cossin and Hugues Pirotte, (2001), *Advanced Credit Risk Analysis*, Willey
- Manual Ammann, (2002), *Credit Risk Valuation*, Springer
- ジョン・ホング (2002) 『ファイナンシャルリスクマネジメントの理論と実証』 晃洋書房

37) GBM : Standard Brownian Motionの行動変動を考える。ホング (2004) 『商学論究』 pp.61-76を参照。

38) Jing-zhi, Huang and Liuren Wu : "The S&P500 Index Option" (*The Journal of Finance*) pp.1405-1439を参照。