DEA におけるアロケーションモデル

瀬　見　　　博

I　序

同じ活動を行う事業体(Decision Making Unit：以下、DMU と略す)間の効率性を相対的に評価することができる包絡分析法(Data Envelopment Analysis：以下、DEA と略す)と呼ばれるノンパラメトリックな手法が、1978年に Charnes, Cooper and Rhodes[1] によって考案された。DEA は、その後、理論面での精緻化がはかられると同時に、現実問題にも数多く適用されることによって、その有用性が次第に認められるようになってきている[2]。

ところで、従来から、多くの DEA モデル、特に、CCR モデルや BCC モデルなどの基本モデルにおいては、生産の技術的、物理的側面に焦点をあてた技術効率性の分析に主たる関心がおかれてきた。そのため、インプットやアウトプットに関わるコストや価格の要素をモデルの中に組み込み、それらの影響を考慮して効率性の測定を行うといった分析はそれ程多くなかったように思われる。

本稿では、それ故、DEA における基本モデルの１つの拡張として、刀

1) Charnes, A. ,Cooper, W. W. and Rhodes, E.(1978),Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, Vol.2,pp.429-444.
2) 例えば、Seiford, L. M.(1996), Data Envelopment Analysis：The Evolution of the State of the Art(1978-1995), *The Journal of Productivity Analysis*, Vol.7, pp.99-137を参照されたい。

根[3]、Cooper, Seiford and Tone[4]、末吉[5]、Cooper, Park and Pastor[6] に基づきながら、コストや価格の要素を考慮して技術的要素(資源)の最適な配分方法を分析することができるアロケーションモデル(allocation model)について考察してみることにする。具体的には、コスト最小化モデル、収益最大化モデル、利益最大化モデル、利益率最大化モデルの 4 種類のモデルが取りあげられる。

なお、以下の節では、一般に事業体の数は n 個あり、それを $\mathrm{DMU}_j(j=1, \ldots\ldots, n)$ で表すことにする。また、各 DMU_j は m 種類のインプット $i(i=1, \ldots\ldots, m)$ をそれぞれ $x_{ij}(>0)$ 単位投入することによって、t 種類のアウトプット $r(r=1, \ldots\ldots, t)$ をそれぞれ $y_{rj}(>0)$ 単位産出しているものとする。

II　コスト最小化モデルと収益最大化モデル

1．コスト効率性

インプット価格の情報が利用できる場合、コスト効率性(cost efficiency)の尺度を用いてコスト最小化の視点から各事業体の相対評価を行うことができる。しかも、コスト効率性と技術効率性(technical efficiency)を基にして配分効率性(allocative efficiency)の測定も可能となる。

いま、2つのインプットと1つのアウトプットをもつ5つの事業体 A, B, C, D, E があり、それぞれのインプット値、アウトプット値、インプット単価が表1のように与えられているものとしよう。ただし、アウトプット値はいずれも1となるように正規化してある。したがって、図1(横軸がインプット1／アウトプット、縦軸がインプット2／アウトプット)によって、

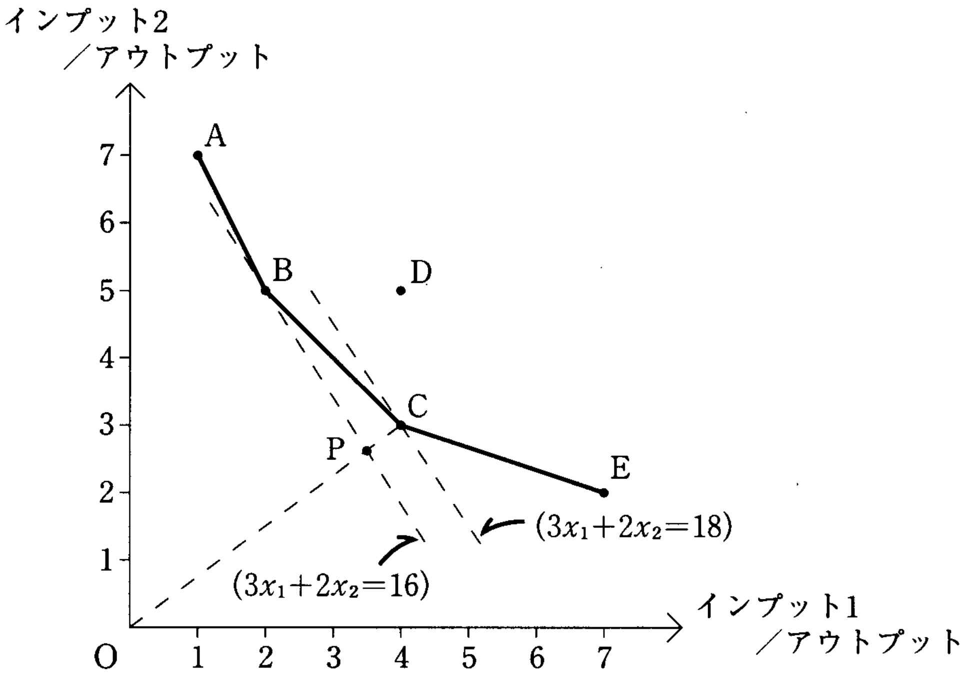
3)　刀根薫(1993)『経営効率性の測定と改善』日科技連、103-110頁。
4)　Cooper, W. W., Seiford, L.M. and Tone, K.(2000), Data Envelopment Analysis, Kluwer Academic Publishers, pp.221-249.
5)　末吉俊幸(2001)『DEA-経営効率分析法-』朝倉書店、22-36頁。
6)　Cooper, W. W., Park, K. S. and Pastor, J.T. (1999), RAM：A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA, *Journal of Productivity Analysis*, Vol.11, pp.5-42.

各事業体がおかれている状況を図示することができる。この図によれば、A, B, C, E を結ぶ折れ線が効率的フロンティアであること、それ故、効率的フロンティア上にある事業体 A, B, C, E の技術効率値 θ^* はすべて 1 となること、および、事業体 D は技術的に非効率であること、がわかる。

表 1　各事業体の技術的要素とコスト要素

事業体	A	B	C	D	E
インプット 1	1	2	4	4	7
インプット 2	7	5	3	5	2
アウトプット	1	1	1	1	1
インプット 1 単価	5	2	3	1	2
インプット 2 単価	1	2	2	2	3

図 1　事業体 C のコスト効率性

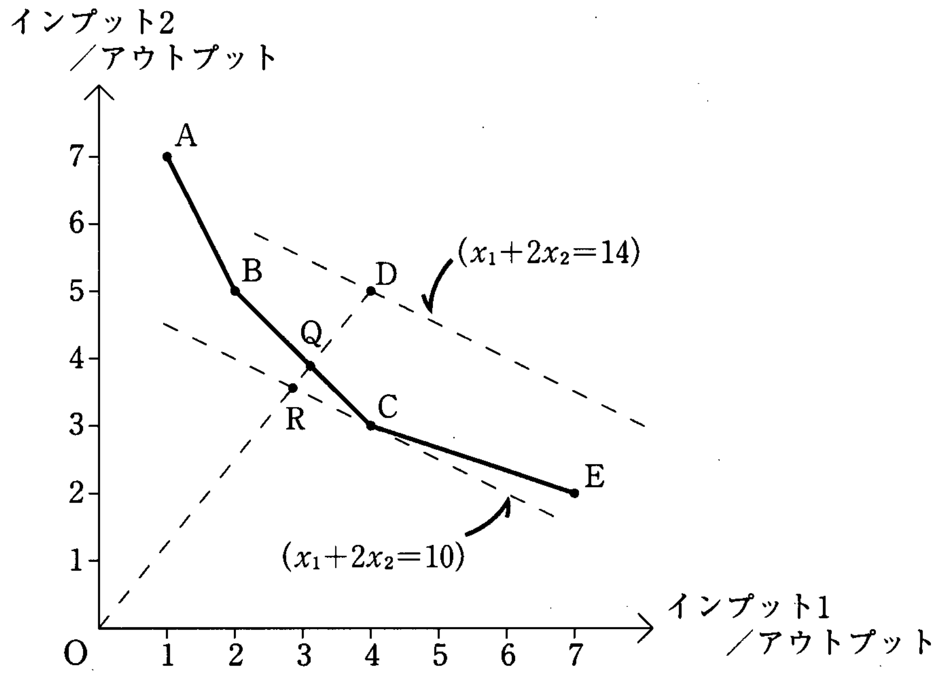


ここで、CCR モデルや BCC モデルで扱われてきた技術効率性以外の新しい効率性の概念を導入するために、事業体 C と D の効率性についてもう

少し詳しく吟味してみることにする。

まず、事業体Cは、既述したように技術的にみれば効率的であるが、インプットの総コストを最小化するという視点に立てばコスト的に効率的な事業体であるとはいえない。事業体Cの現時点でのインプットの総コストは、$4\times3+3\times2=18$ である。したがって、総コストの等量線は、インプット1の値を x_1、インプット2の値を x_2 とおけば、$3x_1+2x_2=18$ となり、図1のC点を通る点線で表される。しかし、この等量線を効率的フロンティアにそって下方に平行移動していけば、所与のアウトプット値をさらに小さいコストによって生産できるインプット値の組合せ(インプット・ミックス)が見いだせる。結局、最終的に最小の総コストはB点で達成でき、$2\times3+5\times2=16$ となることがわかる。この時、両コストの比、16／18＝8／9を事業体Cのコスト効率性と呼ぶ。それは、図1における比率、$d(\mathrm{O,P})/d(\mathrm{O,C})$ によって表すことができる。ここに、$d(\mathrm{O,P})$ と $d(\mathrm{O,C})$ は、それぞれ、原点OからPまでの距離と原点OからCまでの距離を示す記号である。

図2　事業体Dの効率性



次に、事業体Dは、図2から技術的にもコスト的にも効率的でないことがわかる。周知のように、その技術効率性は $d(\mathrm{O,Q})/d(\mathrm{O,D})$ で測定され、7／9となる。したがって、事業体Dは、インプット1とインプット2の値を共に7／9の比率で縮小したQ点に移動するか、もしくは、効率的フロンティア上の任意の点に移動することによって、技術効率値を1に改善することができる。一方、事業体Dのコスト効率性は、上述の事業体Cの場合と同様に考えれば、$d(\mathrm{O,R})/d(\mathrm{O,D})=5/7$ となることがわかる。

ところで、事業体Dのコスト効率性を技術効率性で除した比率、すなわち、$d(\mathrm{O,R})/d(\mathrm{O,D})/d(\mathrm{O,Q})/d(\mathrm{O,D})$ は $d(\mathrm{O,R})/d(\mathrm{O,Q})$ と等しくなっていることが図2から明らかである。この比率 $d(\mathrm{O,R})/d(\mathrm{O,Q})$ のことを事業体Dの配分効率性といい、数値例では45／49となる。これは、技術的に効率的なQ点が、効率的フロンティアにそってQ点からコスト最小のC点まで移動するのに必要となるインプット間でのインプット値の代替（再配分）に失敗した結果、最小コストを達成できなかった程度を表す尺度である。それ故、配分効率性はマネジメントの良否を示す指標と見なすことができるので、マネジメント効率性と呼ばれることもある[7]。

要するに、3つの効率性の間には、コスト効率性＝技術効率性×配分効率性という関係が成立していることになる。

さて、評価対象となっている事業体 DMU_o のコスト効率性は、一般に、以下のコスト最小化問題を解くことによって求められる。

$$\mathrm{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} c_{io} x_i \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j \qquad (i=1, \ldots\ldots, m) \tag{2}$$

$$y_{ro} \leq \sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j \qquad (r=1, \ldots\ldots, t) \tag{3}$$

$$L \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq U \tag{4}$$

7）刀根薫、前掲書、107頁。

$$\lambda_j \geq 0 \qquad \forall j \tag{5}$$

ここに、c_{io} は事業体 DMU_o のインプット i の単位コストであり、通常、DMU ごとに異なる。また、$L \leq 1$, $U \geq 1$ である。このモデルは、その目的が、現在のアウトプット値を最小限保証した上で、総コストを最小にするインプット値を求めることにあるので、インプット間でインプット値の代替が認められているという特徴をもつ。

上記の線形計画問題(1)〜(5)の最適解を (x_i^*, λ_j^*) とした時、DMU_o のコスト効率性 E_c は、

$$E_c = \sum_{i=1}^{m} c_{io} x_i^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} c_{io} x_{io} \tag{6}$$

により与えられる。なお、$0 \leq E_c \leq 1$ であり、$E_c = 1$ の時、DMU_o はコスト効率的であるといえる。

ここで、具体例をあげるために、表1の事業体Dのコスト効率性を上記モデル(1)〜(5)に基づいて求めてみることにする。ただし、(4)の L と U は、規模に関して収穫一定を仮定して、$L=0$, $U=\infty$ とおいてある。この時、事業体Dのコスト最小化問題は、

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 \geq \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 4\lambda_4 + 7\lambda_5 \\
& x_2 \geq 7\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 5\lambda_4 + 2\lambda_5 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 \geq 1 \\
& \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5 \geq 0
\end{aligned}$$

と定式化できる。また、その最適解は、$x_1^*=4$, $x_2^*=3$, $\lambda_3^*=1$, $\lambda_1^*=\lambda_2^*=\lambda_4^*=\lambda_5^*=0$ となる。したがって、$\lambda_3^*=1$ から事業体Dはインプット値を事業体Cと同じ水準に改善することによって、インプットの総コストを最小化できること、そして、現時点でのコスト効率性 E_c は、$(x_1^*+2x_2^*)/(x_1+2x_2)=(4+2\times3)/(4+2\times5)=5/7$ であること、がわかる。なお、事業体Dの技術効率性は、

$$\text{Min} \quad \theta$$

$$\text{s.t.}\quad 4\theta-\lambda_1-2\lambda_2-4\lambda_3-4\lambda_4-7\lambda_5\geq 0$$
$$5\theta-7\lambda_1-5\lambda_2-3\lambda_3-5\lambda_4-2\lambda_5\geq 0$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5\geq 1$$
$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5\geq 0,\ \theta\text{：符号制約なし}$$

で表される CCR モデルの最適解 $\theta^*(=7/9)$ によって求められることを付記しておく。

2．収益効率性

アウトプット価格の情報が利用できる場合には、コスト最小化モデルのかわりに収益最大化モデルを想定することができる。

いま、事業体 DMU$_o$ のアウトプット r の単位価格を p_{ro} で表すことにすれば、収益最大化モデルは、

$$\text{Max}\quad \sum_{r=1}^{t} p_{ro} y_r \tag{7}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{io}\geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \qquad (i=1,\ \ldots\ldots,\ m) \tag{8}$$

$$y_r\leq \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \qquad (r=1,\ \ldots\ldots,\ t) \tag{9}$$

$$L\leq \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\leq U \tag{10}$$

$$\lambda_j\geq 0 \qquad \forall j \tag{11}$$

と定式化できる。なお、アウトプット r の単位価格は、通常、DMU ごとに異なっている。このモデルの特徴は、効率的フロンティア上で総収益を最大にするアウトプット値の組合せ（アウトプット・ミックス）を見いだすという目的が達成できるように、アウトプット間でアウトプット値の代替が認められている点にある。

上記モデル(7)～(11)の最適解を、$(y_r^*,\ \lambda_j^*)$ とした時、DMU$_o$ の収益効率性（revenue efficiency）E_R は、

$$E_R=\sum_{r=1}^{t} p_{ro} y_{ro} \Big/ \sum_{r=1}^{t} p_{ro} y_r^* \tag{12}$$

によって測定される。また、$\sum_{r=1}^{t} p_{ro}y_{ro}>0$ ならば、E_R は $0<E_R\leq 1$ を満たし、$E_R=1$ の時、DMU$_o$ は収益効率的である。

III　利益最大化モデルと利益率最大化モデル

1．利益効率性

インプット価格の情報とアウトプット価格の情報が同時に利用できる場合には、利益(＝収益－コスト)を最大化するという視点に立って、各事業体の相対評価を行うことができる。

いま、II節と同様に、事業体 DMU$_o$ のインプット i の単位コストを c_{io}、アウトプット r の単位価格を p_{ro} とすれば、利益最大化モデルは、以下のように定式化することができる。

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^{t} p_{ro}y_r - \sum_{i=1}^{m} c_{io}x_i \tag{13}$$

$$\text{s.t.} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_{io} \qquad (i=1,\ \ldots\ldots,\ m) \tag{14}$$

$$y_r = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_{ro} \qquad (r=1,\ \ldots\ldots,\ t) \tag{15}$$

$$L \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq U \tag{16}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \tag{17}$$

このモデルの目的は、生産可能集合 $P=\{(x,\ y)|x\geq X\lambda,\ y\leq Y\lambda,\ L\leq e\lambda\leq U,\ \lambda\geq 0\}$ の中で、利益を最大にするインプット値とアウトプット値の組合せを見いだすことにあるので、II節のモデルと異なり、インプットまたはアウトプットにおける代替は認められていない。ここに、$x_j=(x_{1j},\ \ldots\ldots,\ x_{mj})^T$, $y_j=(y_{1j},\ \ldots\ldots,\ y_{tj})^T$, $X=(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_n)\in R^{m\times n}$, $Y=(y_1,\ \ldots\ldots,\ y_n)\in R^{t\times n}$, $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n)^T$, e はすべての要素が1の行ベクトルである。

さて、モデル(13)～(17)の最適解を $(x_i^*,\ y_r^*)$ とした時、DMU$_o$ の利益効率性(profit efficiency) E_P は、

$$E_P=\left(\sum_{r=1}^{t}p_{ro}y_{ro}-\sum_{i=1}^{m}c_{io}x_{io}\right)\Big/\left(\sum_{r=1}^{t}p_{ro}y_r{}^*-\sum_{i=1}^{m}c_{io}x_i{}^*\right) \tag{18}$$

によって定義することができる。また、$\sum_{r=1}^{t}p_{ro}y_{ro}>\sum_{i=1}^{m}c_{io}x_{io}$ が成り立つ時、E_p は $0<E_p\leq 1$ を満たし、$E_P=1$ の時、DMU$_o$ は利益効率的であるといえる。

ところで、利益最大化モデル(13)〜(17)の最適解は、次の加法モデルを解くことによって求めることもできる。

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^{t}p_{ro}s_{ro}^{+}+\sum_{i=1}^{m}c_{io}s_{io}^{-} \tag{19}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{io}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j+s_{io}^{-} \quad (i=1,\ \ldots\ldots,\ m) \tag{20}$$

$$y_{ro}=\sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_j-s_{ro}^{+} \quad (r=1,\ \ldots\ldots,\ t) \tag{21}$$

$$L\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\leq U \tag{22}$$

$$\lambda_j,\ s_{io}^{-},\ s_{ro}^{+}\geq 0 \quad \forall j,\ i,\ r \tag{23}$$

ここに、s_{io}^{-} と s_{ro}^{+} は、それぞれ、事業体 DMU$_o$ のインプット i の余剰分とアウトプット r の不足分を示す変数であり、

$$s_{io}^{-}=x_{io}-\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\lambda_j \quad (i=1,\ \ldots\ldots,\ m) \tag{24}$$

$$s_{ro}^{+}=\sum_{j=1}^{n}y_{rj}\lambda_j-y_{ro} \quad (r=1,\ \ldots\ldots,\ t) \tag{25}$$

により与えられる。また、それらは(14)と(15)から、

$$s_{io}^{-}=x_{io}-x_i \quad (i=1,\ \ldots\ldots,\ m) \tag{26}$$

$$s_{ro}^{+}=y_r-y_{ro} \quad (r=1,\ \ldots\ldots,\ t) \tag{27}$$

と表せるので、利益最大化モデルの目的関数(13)は、

$$\sum_{r=1}^{t}p_{ro}y_r-\sum_{i=1}^{m}c_{io}x_i=\left(\sum_{r=1}^{t}p_{ro}s_{ro}^{+}+\sum_{i=1}^{m}c_{io}s_{io}^{-}\right)+\left(\sum_{r=1}^{t}p_{ro}y_{ro}-\sum_{i=1}^{m}c_{io}x_{io}\right) \tag{28}$$

と書き直すことができる。この式の左辺と、右辺の 2 番目の括弧で囲まれた項は、それぞれ、事業体 DMU$_o$ が完全に利益効率的に運営されていれば獲

得できるであろう最大利益と、DMU$_o$が現時点で実際に得ることのできる利益を表しているので、加法モデルの目的関数(19)、すなわち、右辺の1番目の括弧で囲まれた項は、DMU$_o$が利益効率的に運営されていないことによって失われた利益(機会費用)の大きさを示すものであると解釈することができる。したがって、加法モデル(19)〜(23)の最適解を $(s_{io}^{-*},\ s_{ro}^{+*})$ とすれば、

$$\sum_{r=1}^{t} p_{ro} s_{ro}^{+*} + \sum_{i=1}^{m} c_{io} s_{io}^{-*} = 0 \tag{29}$$

が成り立つ時、つまり、すべてのスラックが0の時、DMU$_o$は利益効率的であるといえる。

2 利益率効率性

利益最大化モデルでは、利益(＝収益－コスト)が負の値をとることがあるため、モデルの取り扱いに注意を要する。また、事業体の効率性を評価する際にもなんらかの工夫が必要となる。そこで、利益最大化にかえて、収益／コストで表される利益率を最大化するモデルが提案されている。これを、利益率最大化モデルと呼び、次の分数計画問題の形で与えられる。

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^{t} p_{ro} y_r \Big/ \sum_{i=1}^{m} c_{io} x_i \tag{30}$$

$$\text{s.t.} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_{io} \quad (i=1,\ \ldots\ldots,\ m) \tag{31}$$

$$y_r = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_{ro} \quad (r=1,\ \ldots\ldots,\ t) \tag{32}$$

$$L \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq U \tag{33}$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \tag{34}$$

ところで、上記の分数計画問題(30)〜(34)は、Charnes と Cooper[8] に倣って、正の変数 $t \in R$ を導入し、$\widehat{x_i} = tx_i$, $\widehat{y_r} = ty_r$, $\widehat{\lambda_j} = t\lambda_j$ という変数の置き換えをすることにより、

8) Charnes,A., Cooper,W.W.(1962),Programming with Linear Fractional Functionals, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.9,pp.181-186.

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^{t} p_{ro}\widehat{y_r} \tag{35}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} c_{io}\widehat{x_i}=1 \tag{36}$$

$$\widehat{x_i}=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\widehat{\lambda_j} \leq tx_{io} \quad (i=1, \ \ldots\ldots, \ m) \tag{37}$$

$$\widehat{y_r}=\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\widehat{\lambda_j} \geq ty_{ro} \quad (r=1, \ \ldots\ldots, \ t) \tag{38}$$

$$Lt \leq \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda_j} \leq Ut \tag{39}$$

$$\widehat{\lambda_j} \geq 0 \quad \forall j \tag{40}$$

の線形計画問題に変換することができる。

いま、この線形計画問題の最適解を、$(t^*, \ \widehat{x_i}^*, \ \widehat{y_r}^*, \ \widehat{\lambda_j}^*)$とすれば、もとの分数計画問題(30)〜(34)の最適解は、変数の置き換えを逆にして、

$$x_i^*=\widehat{x_i}^*/t^*, \ y_r^*=\widehat{y_r}^*/t^*, \ \lambda_j^*=\widehat{\lambda_j}^*/t^* \tag{41}$$

から導きだせる。それ故、これらの値を用いて DMU$_o$ の利益率効率性(revenue/cost efficiency) E_{RC} が、

$$E_{RC}=\left(\sum_{r=1}^{t} p_{ro}y_{ro} / \sum_{i=1}^{m} c_{io}x_{io}\right) \Big/ \left(\sum_{r=1}^{t} p_{ro}y_r^* / \sum_{i=1}^{m} c_{io}x_i^*\right) \tag{42}$$

によって算定できる。なお、E_{RC} は $0<E_{RC}\leq 1$ を満たし、$E_{RC}=1$ の時、DMU$_o$ は利益率効率的である。また、この効率性指標は、多くの赤字の事業体、すなわち、$\sum_{r=1}^{t} p_{ro}y_{ro}-\sum_{i=1}^{m} c_{io}x_{io}<0$ となる DMU$_o$ が存在しているケースに対しても適用可能であることがわかる。

Ⅳ　結

以上、インプットの単位コストやアウトプットの単位価格が利用できるという前提のもとで、コスト最小化モデル、収益最大化モデル、利益最大化モデル、利益率最大化モデルの 4 種類のアロケーションモデルについて考察してきた。しかし、本稿では、それらの基本的な枠組みが示されたにすぎない。モデルの現実問題への適用を考えた場合、各モデルをさらに詳細に吟味・検

討しなければならない。例えば、利益最大化モデルでは、インプットやアウトプットの値に制約が設けられていないが、実際には予算に制約があるため、それらの値は制限されることになる。したがって、予算の制約を組み込んだ利益効率性分析を行う必要がある。また、本稿のモデルでは、インプットの単位コストやアウトプットの単位価格に対して最適なインプット値やアウトプット値が求められる仕組みになっているが、現在のインプット値やアウトプット値を最適値へと変化させることによってコストや価格もその影響をうけて変化することになる。それ故、それらの相互作用関係をなんらかの形で組み込んだモデルの開発が望まれる。さらに、コストや価格は絶えず変動する。その影響を分析する枠組みも必要である。これらの問題が今後に残された課題である。

(筆者は関西学院大学商学部教授)