クレジット・リスクのプライシング戦略

ジョン・ホング

I　はじめに

資産プライシングによるクレジット・リスク(CR)の問題は、長い間、ファイナンスの研究者や経営者たちを苦しめる難問であった[1)]。本稿では、Black, Scholes, Merton(B-Sモデル)[2)]というファイナンスの技術等で、この問題を様々な角度から考察する。ここで、伊藤の補題[3)]によって支えられるプライシング過程に、CR/デフォルト率を調べ入力し、資産(デリバティブ)の設計・価格付けや証券化の仕組みづくりなどに偏微分方程式(partial differential equation；PDE)を導出する。ここでは、B-Sモデルを中心として、オプション、リボルビング・クレジット(revolving credit)、割引手形などの応用スキルに関して論じる。

CRの分析については、異なった可測市場変数によって適切に計量化される必要がある。資産の証券化プライシング定理、デフォルト・リスクを条件付計測したもの、発行者のデフォルト発生確率といったことが必要である。さらに、第三者リスクがプライシングの焦点になりそうだ。CRプライシン

1)　Cossin, Pirotte(2001)pp.3-4
2)　R. C. MertonとM. Scholesは1997年にノーベル経済学賞を受賞した。
3)　伊藤の基本補題は

$$dE=\frac{dE}{ds}+\frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2}dt$$

ただし、$E(s,\ t)$は$wp(N(0,\ (dt)^{\frac{1}{2}}))$条件の正規分布に従う。

グの目標値の管理は、まず無裁定条件(arbitrage-free)[4]と完全市場条件に基づき、リスク中立化法により期待値を確保する。それによって、ここで述べる定義は、時間・空間ともに離散的で、マルコフ性[5]、ブラウン運動[6]のある特性を利用できる。ただ、デフォルト率を配慮し、回収のリカバー率の計測、CAPM 理論[7]などの応用が、モデル化を考える上で研究の課題となる。これまで、CR 債のオプション、OTC の Cap[8]、信用デフォルト SWAP などのプライシングに B-S モデル評価と Credit Metrix™ が実務上では有効であると指摘されている。

II CR プライシングの構成と適合過程

金融市場において、これまで、CR 分析はデフォルト率[9]、CR 要件の構成、ダイナミックな変動、取り戻しとの相関性、モンテカルロ・シミュレーション[10]と推移行列(transition matrix)を実践したものに重点を置くようである。それを基盤として、ポートフォリオの CR 適合過程においては、ボラティリティの連続性に影響を及ぼす変数を Credit Metrix™、Markowitz の対数正規分析(lognormality)[11]などが補足している。また、密接な関係を有する MR、OR、LR などのリスク・マネジメント面[12]においても、有力な補完が

4) Arbitrage-free for interest rate risk (AF)
5) Marekov Process：独立性の確率を持つ Brownian Motion $X(t)$ の条件付期待値は、$X(t-1)$ に依存している。
6) Brownian Motion は連続的な確率過程で不確実な価値変化を表す経路である。
7) CAPM (Capital Asset Pricing Model) を応用して、MTM (mark to market) を評価する。
8) Caps&Floors：変動利子率はある値を超えないという保証契約である。即ち $E(r, T)=\max(r-r_e, 0)$ のコールである。ただし、r_e はある特定の利子率。
9) あるいは格付の変化。ホングpp.70-72を参照。
10) Monte Carlo Simulation による、デフォルトの AR と ρ との分析の際には、それに伴う不確実性をコントロールするか、無視して計算するかなどを考慮する必要がある。
11) Markowitz のポートフォリオ理論は、対数正規とする株式オプションの価格評価から最低リスク水準のリターンを期待させる。
12) MR(市場リスク)は、IRR、FXR、Stock MR などを含む。例えば、新株発行と取引の際、FXR、システムの契約面などの要素をさらに考慮する必要がある。クーポンの支払方法にかんしては、デュレーションやコンベクシティだけでは十分でない。(ホング(2002)参照)

与えられることにより、経営収益の促進が期待できる。このCRプライシング確率過程において、注目すべきことは以下の点である。(i)市場のリスク・プレミアムは行使価格等の確定的な値を用いてプライシングされる[13]。(ii)確率過程に対する非不確実性な部分はPDEを解く[14]。プロセスの過程拡散は状態変数(state variable)の固定化を図ったものである[15]。しかしながら、MRの突発した無限次事項を考える上でそれらのモデルの完全性を削除してしまうだろう。ここでいくつかMRの課題を挙げると①伝統的なIRRとCRとの統合的技法がプライシングによって確立されるのかという問題[16]。②経済がおかれている状態や、市場の信用を維持できるかという問題[17]。③国際化の影響を受けた際、投資家がCRの再構成をどのように考えるかという問題。④ポジションのリバランス(rebalancing)とリヘッジ(rehedging)において、リスク回避の補完技法は有益ではあるが、これを行おうとする時、判断には高度な素養が求められるという問題。これらの問題は、プライシング戦略の適合性について重要となる。ちなみに、CRプライシングの構成要項は、市場価値(S)といわれるMRで考えるほかに、市場過程の時移性(T)[18]を導入して、SとTを兼ね備えてB-Sモデルが成り立っている。もちろん、マルコフ、マルチンゲール、二次変数など特性を取り戻すことが可能で、いずれにせよ、時移性の空集合確率(non null probability)とおき、

13) 確定的事項を選択する。例えば、投資選択においては、¥100と決めてしまう、あるいは50%の確率で勝者¥200、敗者¥0など。

14) 単純ランダムウォークの2項モデルの例を考えて、株価の変化は、δtを0から∞への変動の際、それらの資産は無限弾力値が存在する。

$$S_0 < \begin{matrix} S_{1u} \\ S_{1d} \end{matrix} < \begin{matrix} S_{2uu} & \cdots\cdots \\ S_{2ud}=S_{2du} & \cdots\cdots \\ S_{2dd} & \cdots\cdots \end{matrix}$$

15) 伝統的には、CRが確定的な変数はCFの内の条項で考えられた。ただ、Mertonの時移性連続型理論は、CAPMに直接影響させる確率を導くことが示された。

16) EURO通貨制度設立に際して、コール債が利回りを中心に考えたので、金利リスクが生じた。

17) 日本のバブル崩壊後における、金融機関の経営不振やデフォルトが多発したことが実例として挙げられる。

18) 時移性の分析は、時段的なデフォルトをつり合って、信用スプレッドとの統括的に考えるべきである。

資産期待収益(あるいはリスク・プレミアム)[19]のプライシング構成と適合過程を考える。

III CR プライシングへの取り組み

CR プライシングの評価については、まず資産価値、配当率、市場利子率などの要素を確率化してモデルに組み込む。その要点としては、伝統的なWACC(weighted average cost of capital)のエクイティ値(株主$E_t(V)$の要求収益率 r_e)と借入資本値(債権者$D_t(V)$の要求利子率 r_d)が挙げられる。リスク資産・負債の価格のボラティリティ時移性の市場環境の下で、変数の過程を拡張できる。即ち、(i)利子率構成項目、期限など CR スプレッドとそのボラティリティの変動幅、(ii)利子率ボラティリティの拡散限界係数($\sigma \cdot V_t$)、(iii)完全市場の財務パッケージの構成と借入資本のレバレッジ、(iv)デリバティブ相関(オンバランスとオフバランス)の $D_t(V)$ と市場パラメータを結びつける値、(v)既述のように、無裁定価格理論の中に、潜在的デフォルト率[20]およびデフォルトの回収率(recovery rate)を捕足してモデル化する。最後に、資産価値を低下、あるいは、回収リスクの軽減のために、ヘッジ、SWAP、証券化の手段[21]が利用される。

(i) ハードル・レートの数値決定法

ポートフォリオ選択理論は、投資の高収益率に期待されて、それに対するリスクを酌量化の機会コスト分析である。投資機会は、ほとんどの条項証券から比較して、MR の期待値に補足付ける。ブラウン運動の数値決定化前に、実質資産評価はただ適正な WACC の借入資本に決まることが前提である。即ち、特定の T 時点の借入資本値 $D_T(V, T)$ とエクイティ値 $E_T(V)$ から

19) ここでは、無相関性と無自己相関を考える。
20) デフォルト事項とは、非決定条件付きのランダムウォークを考える。(ホングp.68参照)
21) 市場リスクの種類により、利子率変動のリスクヘッジ、市場リスクヘッジ、流動性リスクヘッジ、相場ヘッジなどがある。

ハードル・レート理論(hurdle rate)に基づいて、資産パッケージ構成を結合させる。

(3.1) $$WACC=D_T(V,\ T)\cdot r_d\cdot(1-\tau)+E_T(V)\cdot r_e$$

ただし、r_e と r_d は、それぞれエクイティと借入資本の平均収益率(あるいは時移性データの期待値)、τ は限界税率である。また、D_T/E_T はレバレッジ率 $\underline{\rho}$ である。B/S の時移性とは RSA(金利感応資産)と RSL(金利感応負債)[22]の時移性のオプション概念に考えて、さらに、V は原資産価値、S は期末 T の支払額(あるいは期中 t の権利行使価格[23])として、借入資本とエクイティを評価する点が重要である。即ち、

(3.2) $$D_T(V,\ S)=S-\max(S-V_T,\ 0)=\min(V_T,\ S)$$
$$E_T(V,\ S)=\max(0,\ V_T-S)$$

を適合すると、式(3.1)は

(3.3) $$WACC=D_T(V,\ S)\cdot r_d\cdot(1-\tau)+E_T(V,\ S)\cdot r_e$$

となる。

r_e は、CAPM を応用して、$r_e=r_f+\beta(r_M-r_f)$ から計測する[24]。ここで、r_f は無リスク金利、β は市場価格変動による企業の収益率変動に対する感応度(すなわち貢献率[25])、r_M は市場ポートフォリオの期待収益率、(r_M-r_f) は市場全体のリスク・プレミアムとなる。財務レバレッジとは、企業の負債償却能力を示す指標の一つであるが、ただしこれは企業の特質と経営全体の能力という要素はこれとは異なるので、レバレッジ構成の分析のほか、リスクマネジメント機能の見直しが不可欠となる。ところが β の平均値(あるいは β マトリックス)は市場の $\beta_L=\dfrac{\beta_u}{(1-\underline{\rho})}$ 無リスク投資の実現値 $\hat{\beta}$ (推

22) ホングpp.16-18を参照。(RSA：銀行の例を考えれば、有価証券、商工ローン、モーゲージなど満期1年以内のもの。RSL：利払い預金、借入金など満期1年いないのものである。)
23) クーポン債は、満期償還額は額面である。
24) 資本資産価格モデルは、株式のリスク指標である β(セクター・ベータ)と市場線形回帰との分析である。
25) この貢献率は、[0.75,1.25] に実践する場合が多い。

定値)を用いて計算することができる。ただ、β_L はアンレバレッジ(unleveraged)、β_u は β_L の平均値、$\underline{\rho}$ は D_T と E_T とのレバレッジなどを市場から統計的に算出した値である。

(ii) B-S モデルの計測法

この計測は、資本レバレッジ[26]から時移性(時間 $t\in[0,\ T]$)[27]で考える。V_t は中立化幾何ブラウン運動、すなわち $\frac{dV_t}{V_t}=\mu\cdot dt+\sigma\cdot d\tilde{w}_t$、$\mathrm{var}(\frac{dV_t}{V_t})=\sigma\cdot dt$ の特質を持っている。ここで、μ は V_t のドリフト(これは常に固定の利子率 r を替わる)、σ は V_t のボラティリティ、$\tilde{w}$ は標準 Wiener 過程[28]である。従って、$E(V)=0$ が $t\in[0,\ T]$ 限界条件を与える B-S モデルの評価は以下のようになる。

$$(3.4)\qquad 0=\frac{\partial E_t(V)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_t^2\cdot V^2\frac{\partial^2 E_t(V)}{\partial V^2}+r\cdot V\cdot\frac{\partial E_t(V)}{\partial V}-r\cdot E_t(V)$$

このとき、t の限界条件から、ボラティリティはすべて σ が定常な確率測度を対している。すなわち

$$(3.5)\qquad E(V,\ T,\ \sigma,\ r,\ S)=V_t\Phi(d_1)-S\cdot e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$d_1=\frac{\left[\ln\left(\frac{V_t}{S}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]}{\sigma\cdot\sqrt{T-t}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{\frac{-\mu^2}{2}}du\text{：標準正規分布関数}$$

となる。また、B-S モデルを応用して、借入資本 $D_t(V,T)$ は次式

26) これは、B－S を債券 CR オプション・プライシングから計測したものである。

27) これまでのモデルを次のような仮定を用いて応用する。即ち、①市場取引条件は、取引コストや税金は無視、無制限の売買を可能とする。②市場は公平で、自由競争である。③市場収益率はリスク中立的であるとする。④ $V_t=D_t+E_t$ を満たすものとする。

28) Wiener 過程(WP)：モデルを連続で瞬時 $\delta t=\frac{t}{h}$ の PDE は $dV=\mu\cdot V\cdot dt+\sigma\cdot S\cdot dX$、ただ、$dX=\phi(\delta t)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow N(0,\ \delta t)$、$E(dX)=0$、$E(d^2X)=dt$ という特質がある。

$$(3.6)\qquad 0=\frac{\partial D_t(V,T)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_t{}^2\cdot V^2\frac{\partial^2 D_t(V,T)}{\partial V^2}+r\cdot V\cdot\frac{\partial D_t(V,T)}{\partial V}-r\cdot D_t(V,T)$$

となることがわかる。ただ、$D_t(V,T)/V\leq 1$、$D_t(0,T)=0$、$D_T(V,T)=\min(V_T,\ S)$であると考える。式(3.4)及び(3.6)は条件付請求権の分析(CCA, contingent claim analysis)理論によるCRプライシングの定義による。

$D_T(V,\ T)$があるゼロ・クーポンと考えると、確率中立化から0時期とt時期の計算式は次が成り立つ。

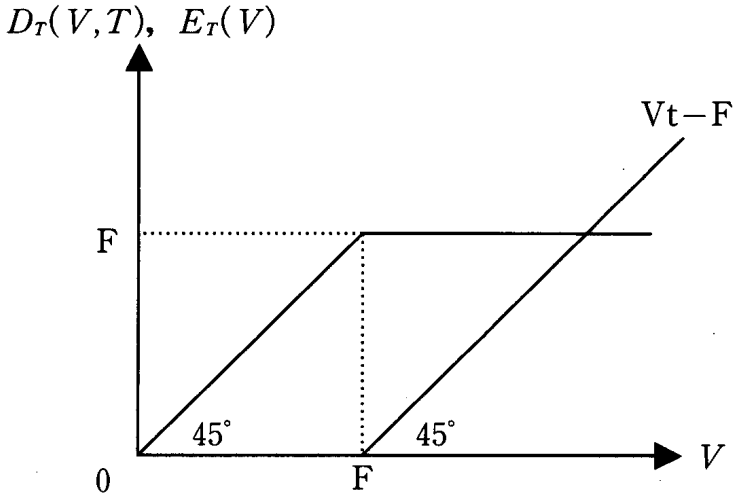
$$(3.7)\qquad D_0(V,\ T)=V_0\Phi(-d_1)+S\cdot e^{-rT}\cdot\Phi(d_2)$$

$$(3.8)\qquad D_t(V,\ T)=V_t\Phi(-d_1)+S\cdot e^{-r(T-t)}\cdot\Phi(d_2)$$

ただ、σは定常であると仮定してモデルを導いている。

既述のように、CRプライシング分析においては、対数正規分析、既知の金利、無配当、Δヘッジング[29]、取引コスト無視、無裁定機会、完全市場の条件を定める。もし、株式の配当率、外貨金利、コモディティ・オプション、在庫コストなどの状況が設定されれば、$(r\pm\alpha)$と表すことができるということを意味する。よって、B-Sモデルを次式のように表せる。

図表3-1　$D_T(V,\ T)$と$E_t(V)$　満期までの関数



(注)　満期までS=F(額面)のゼロ・クーポン

$$(3.9)\qquad 0=\frac{\partial D_t(V,T)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_t^2\cdot V^2\frac{\partial^2 D_t(V,T)}{\partial V^2}+(r\pm\alpha)\cdot\frac{\partial D_t(V,T)}{\partial V}-(r\pm\alpha)\cdot D_t(V,T)$$

上述の取引コストに関しては、実務上では売買呼値(bid-offer)からスプレッドを取引戦略の組み換えてオフセットになったものを用いる場合もある。

Ⅳ CR プライシングの展開

本節では、CR プライシングにおける確率過程を用いて、ファイナンスが構築されることを記述する。金融商品がゼロ・クーポン[30]（特にヨーロピアン・オプション)、コール条件付債券、モーゲージ、リポルビング・ローン、転換債[31]、変動利付き債などを t 区間 $[0,\ t]$ による取引戦略を考える。次は、B-S モデルを展開して役割を果たすいくつかの例を挙げる。Cox, Ingersoll and Ross(1980)[32]；変動利付き債の CR について、B-S をとって、それに伴う、変動クーポンを実証して、金利リスクを削減した。Chacessens and Pennach(1996)；Brady 債のデフォルト率を導出した。Chance(1990)[33]；高いデフォルト可能性を持つゼロ・クーポン債を期限にテストして、それら債券の CR 感応性が利子率変動をより小さくすることを実証した。Shimko(1993)や Jamshidian(1989)などによっても CR プライシングは研究されている[34]。次は、B-S モデルによる様々な CR プライシングを実践した

29) $\Delta(\text{delta})=\dfrac{\partial V}{\partial S}$、$\partial S$ の変化値がヘッジにより削減する。

30) ゼロ・クーポンは B-S モデルの基本導式である。$V_t=V_0\cdot e^{rt}\leftrightarrow dV_t=r\cdot V_t\cdot dt$, $(r>1)$

31) 転換債 $C(V,\ T,\ F,\ r)=\begin{cases}\gamma V(T), & \text{ただし } F\leq\gamma V(T)\\ F, & \text{ただし } F\leq V(T)<\dfrac{F}{\gamma}\\ V(T), & \text{ただし } V(T)<F\end{cases}$

32) Cox *et al*.(1980)：An analysis of variable rate loan contracts(Journal of Finance 35(2))

33) Chance(1990)： Default risk and the duration of zero coupon bonds(Journal of Finance 45(1))

34) Manuel Ammann(2001), pp.51-52参照。

い。

(i) 利子率リスクの測定

最も確実的な利回りは、満期(T)までのデフォルト額とその回収額など条件に従うことを求める。さらに、$D_t(V,\ T)=S\cdot e^{-r(T-t)}$ の指数関数で計算する。ただし、時刻 t の利回りは $r_t(T)$ である。これは $r_t(T)=-\frac{1}{T}\ln(D_t/S)$ から得られる。すなわち、B-S モデルからデフォルト要素を含んで $E(V,\ T,\ \sigma,\ r,\ S)$ のデフォルト・スプレッド($cS_t(T)$)と考えて[35]

$$(4.1)\qquad cS_t(T)=-\frac{1}{T}\ln\left[\Phi(d_2)+\frac{V_t}{S\cdot e^{-rT}}\cdot\Phi(-d_1)\right]$$

となる。さらに、$cS_t(T)$ は速動比率の機能を持つ。$\underline{\rho}=S\cdot\frac{e^{-r(T-t)}}{V_t}$ において、$\frac{1}{\underline{\rho}}=\frac{V_t}{S\cdot e^{-r(T-t)}}$ は相関時間の損失期待値となる。各時点における債券の市場リスクは

$$(4.2)\qquad D_t(V,\ T)=S\cdot e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2)+\underline{\rho}\Phi(-d_1)]$$

となる。従って、企業価値のボラティリティ($\sigma\cdot\sqrt{T-1}$)とレバレッジ($\underline{\rho}$)は借入資本の将来償却能力を測定する機能があるといえる。なお、リスク・プレミアムの増額と $\underline{\rho}$ の増分のどちらを選ぶかはきっちりと決定する必要がある。もし、満期までのデフォルト・スプレッドがリスク・プレミアムよりも高ければ、それらの σ_D(債券のボラティリティ)は[36]

$$(4.3)\qquad \sigma_D=\frac{V_t}{D}\cdot\frac{\partial D}{\partial V}\cdot\sigma=\eta(\underline{\rho}\cdot\sigma^2\cdot(T-t))\cdot\sigma$$

となる。ここで、η は債券に対する資産全体の弾力値である。なお

$$(4.4)\qquad \sigma_D=\frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_1)+\underline{\rho}\Phi(-d_2)}\cdot\sigma$$

35) Cossin and Pirufle (2001)： pp21-24参照。
36) 伊藤の補題による。

であり、債券におけるの次の瞬間における σ リスクの測定値である。この計測の目的は、利回りスプレッドがリスク・プレミアムを超えた時の残存期間 $(T-t)$ の見込み値を示すことである。上式を用いて、次の例を挙げる。1年後に満期 T をむかえる額面 ¥100MM のゼロ・クーポン債があるとする。無リスク金利は $r=5\%$、$\underline{\rho}=90\%$、$\sigma=12\%$ とおくと、$d_1=-0.938$、$d_2=0.818$ から、$\Phi(d_1)=0.174120$、$\Phi(d_2)=0.793323$ となる。従って、現時点 ¥100,000,000 の市場リスク値は ¥93,866,180 となり、同時にリスク・スプレッド(あるいはプレミアム)は $S(T-t)-r=1.33\%$ という結果になる。

(ii) デフォルト確率と回収率の測定

すでに見たように、B-S モデルのデフォルト確率の中立化と考えて、それらと $\Phi(d_2)$ との関係式 $(t=0)$[37]は

$$D_0(V,\ T)=S\cdot e^{-rT}-European\ Put$$

(4.5)

$$=S\cdot e^{-rT}-\Phi(-d_2)\left[S\cdot e^{-rT}-\frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)}\cdot V_0\right]$$

となる[38]。この $\frac{\Phi(d_1)}{\Phi(d_2)}$ は割引回収率の期待値と定義される。ところが、KMV アプローチを応用すれば

(4.6) $$D_0(V,\ T)=S\cdot e^{-rT}-d_p\times E(d)$$

となる[39]。ここで、d_p はデフォルト確率、$E(d)$ (expected discounted loss given default)はデフォルト後における予想回収額である。さらに、D_T のデフォルト・コスト(ECD_T)は次のように計算可能である。

(4.7) $$ECD_T=d\times d_l=S\cdot\Phi(-d_2)-V_0\cdot e^{-rT}\cdot\Phi(-d_1)$$

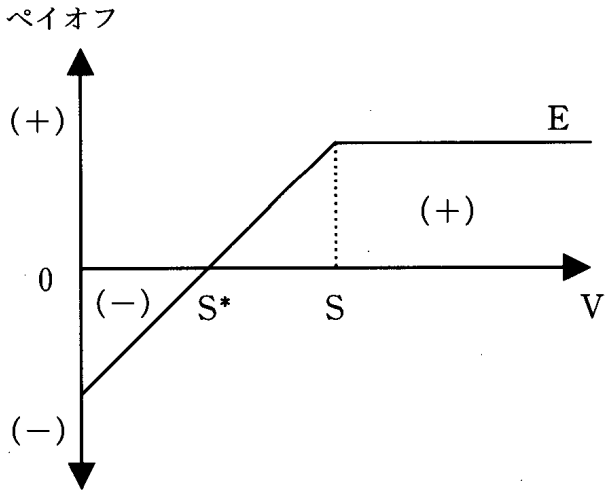
それぞれデフォルトの発生確率と回収率になっていることが確認できる(ただし、d_l はデフォルト損失額)。

37) Grouhy and Galai(1997) "CR Revisited - an option pricing approach" (Working -paper 92-3)

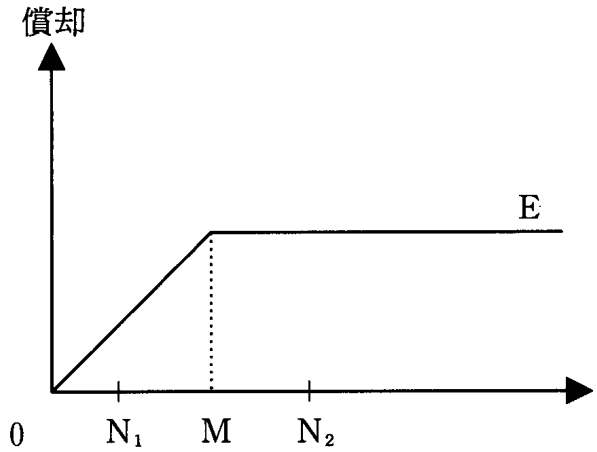
38) European Put は満期 T にしか権利行使できない。一方、American Put は期中 t で権利行使可能である。

39) d_p、$E(d)$、ECD_T などの計算方法は、KMV Corporation Methodology を参照。

表4－1　プット・オプションのペイオフ



図表4－2　リボルビング・ローンの償却



また、このオプション・デフォルト確率の特徴を応用して、銀行のリボルビング・ローン・デフォルト率が導出されることは容易に理解できる。すなわち、プット・オプション $E(V,\ T,\ \sigma_S,\ r,\ S)$ と同様に[40]、ローンのデフォルト・オプションを $E(M,\ N,\ \sigma_N,\ r,\ S)$ のように考える(ただし、S は満期が短期のローン、σ_N はローンの市場価値のボラティリティ)。図表4－

40) $E(V,\ T,\ \sigma_S,\ r,\ S)$ は、もしゼロ・クーポンの市場価値 S より $E(V)$ の方が大きい場合、引受業者はそのまま保有し、逆に小さければ巨額損失の考え方をプット・オプションに応用する。

2で示している通り、OMは短期であるリボルビング・ローンあるいは割引手形であり、満期までのローンの市場価値がもしON$_2$なら、企業はOMのローンを返済して利益を得、(ON$_2$−OM)が投資収益となる。もし、市場価値ON$_1$がであるならば、その企業はデフォルトする可能性がある。ここでは、ローンの市場価値のボラティリティσ_Nはオプション・デフォルトのボラティリティσ_Sと同様の計測方法であるとする。

(iii) マルチンゲール二項分布

既述のCRプライシングが連続性確率過程を引用すれば、マルチンゲール(Martingale)確率過程[41]から、二項分布を利用して、次のような計測値が与えられる[42]。ただし、$\overline{S}$はデフォルトしないという定義を与える(Sはデフォルトすることがある)。

$$(4.8)\qquad E(0,\ T,\ \overline{S})=B_F(0,\ T)\cdot E_0^Q[e(T)|\overline{S}]$$

マルチンゲール確率$\mu(t_i)\cdot h$の過程において、t_jがデフォルト発生の条件を満たすのは、t_{j-1}がデフォルトしない、すなわち、$e(t_{j-1})=1$と定義を与える。(図表4−3)は二項分布定理の中立化デフォルト発生過程である。ここで、πはt_jデフォルト(d)発生の確率で

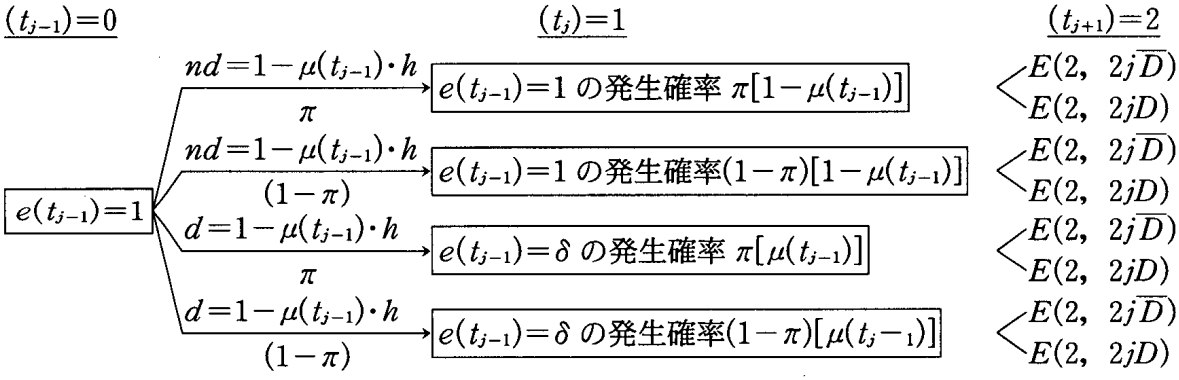
$$(4.9)\qquad E_0^Q[e(t_{j+1})]=[1-\mu(t_{j-1})][1-\mu(t_j)+\delta\mu(t_j)]+\delta\mu(t_{j-1})$$

となる。この式は、市場データから、デフォルト計測の機能を果たすことが重要であることを示している。特に、CRプライシングによるCFをすべて予測可能であることである。$E_0^Q[e(T)|\overline{S}]$は、T時点における、ペイオフの現在価値における信用スプレッドである。

$$(4.10)\qquad E_0^Q[e(T)|\overline{S}]=\frac{E(0,\ T,\ \overline{S})}{B_F(0,\ T)}$$

41) Matingaleは$E[S_i|S_j,\ j<i]=S_j$となる確率過程で定義される。
42) Robert Jarrow and Stuart Turnbull (1998)：Risk Management and Analysis. P. 243を参照。

図表４－３　マルチンゲールの確率分布



(iv)　先物と先渡し契約の CR プライシング

先渡し(Forward)は、初期($t=t_0$)にゼロの価値の先渡し価格式は $E(S,\ t)=S-Se^{-r(T-t)}$ で、$\overline{S}$ が固定取引価格だとすると、$E(S,\ T)=S=\overline{S}$、初期契約価値 $0=S_0-\overline{S}e^{-r(T-t_0)}$ あるいは $\overline{S}=S_0e^{r(T-t_0)}$ となる。先物(Future)については、満期までの価値の式は $F(S,\ T)=S$ と期中(t)式 $F(S,\ t)=Se^{r(T-t)}$ として、[43]伊藤の補題を解説することにする。

$$(4.11)\qquad 0=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot S^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}+r\cdot S\cdot\frac{\partial F}{\partial S}$$

同じように、先物オプション(T_F：先物満期日)は $F=Se^{r(T_F-t)}$ の B-S モデルを応用して($E(V,\ t)=v(F,\ t)$)、

$$(4.13)\qquad 0=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot F^2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial F^2}-r\cdot v$$

のように計測する。

(v)　ヘッジのフライシング

B／S の資産・負債を保有することなどで生じるリスクを回避あるいは削減するために、当該相当リスクの逆方向のリスクを持って、リスク・ポジションを変化させる。したがって、ヘッジを行う結果、期待収益率を把握でき

43) 行使期間中の価格変化は、毎日設定する。

るという経済的な効果がある。通常ののヘッジは独立事項からボラティリティ変数を単独計測する。しかしながら、S のボラティリティにおける各相関の従属変数を考える必要があるので、B-S モデルを補足して計測の手段を得る。ヘッジするリスクの特徴として以下のことが知られている。(i)Δヘッジング：$E(S,\ t)$ と S_t との変化の計測値は $\Delta=\frac{\partial E}{\partial S}$ で、さらに時移性の資産調整(in/out)を行う[44]。B-S コールも $\Delta=e^{-r(T-t)}\Phi(d_1)$ として計算することができる。さらに、時移性の特徴から $\theta=\frac{\partial E}{\partial t}$ を存在すれば、$\theta_i=\frac{\partial E}{\partial t}(t,\ S_i(t_i))$ をΔヘッジする。(ii) Γ ヘッジング： 価値ヘッジのサイズと時間の削減のために、二次微分係数に対応する。すなわち、$\Gamma=\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}$ となる[45]。さらに、エキゾチック・オプションは $\Gamma=\Phi(d_1)\cdot\frac{1}{\sigma(T-t)}$ からの計算が価値となる[46]。(iii) v ヘッジング： 行使価格のボラティリティのパラメータ計測値 $v=\frac{\partial E}{\partial \sigma}$ で、さらに、$v=S\cdot\sqrt{T-t}\cdot\Phi(d_1)$ である。ただ、σ ボラティティの定常性の把握が難しいので、Γ で替えることができる[47]。(iv) ρ ヘッジング、$\rho=\frac{\partial E}{\partial r}$、さらに、$\rho=K(T-t)e^{-rT}\Phi(d_2)$、ただ、$K$ は標準行使価格である。(v)静態(static)ヘッジング： CF をつり合せるためにオプション取引をする。(vi)マージン・ヘッジング： 中長期資産の調達と運用とのプロジェクト期間中に、予測できないマージン・コール、急激な市場の高騰などのリスクをカバーする。そのために、発行者はある程度マージンを維持すると、デフォルト回避のため、証券取引所からそれを特別に要求されるヘッジ

44) Δ感応性の分析について、ブラウン運動の中立化特徴を適用する。
45) 実務上、ヘッジの際には、σ パラメータが未知で、さらに将来時点の予測は困難なため、Γ で代用する。
46) Exotic Option は標準的なオプションとは異なる。情報に伴ってより複雑な類型のオプションが開発されている。
47) σ の計測は Newton-Raphson の正規分布理論を直接応用することができる。Paul Wilmott p.184を参照。

である。(vii)破綻ヘッジング： 市場関連の変数が急激に変化したときに、Δヘッジが満たされず、全ポートフォリオ値がマージン・コールなどを実質的にヘッジすることである。以上各種のヘッジは、原資産の損失を先物の利益でカバーする目的で、CR プライシングに対応し、B-S モデル $E(S_0,\ t_0,\ \sigma,\ r,\ V,\ T)$ の既知変数から計算するものである[48]。

V 結論と課題

本稿では、CR プライシングに関する様々な機能の解析を試み、最適なリスク数値に分割し、その効果を考慮すべきであることを示した。リスクを予測し、未然に防止することは、何といっても投資家・金融機関の健全化と選択理論において、金融市場が機能することが重要だと考える。すると、VaR(Value at Risk)領域内の CR プライシングには、市場で観測される確率測度の下で、リスク中立化のブラウン運動を、特に、B-S モデルが導出される。このモデルは、多くの研究者や実務家が実用に向け研究されている。ポートフォリオ変化が感応性を持ち、プライシング策とヘッジング対応などに具体的なプライシング戦略がなされている。ただ、モデルが先題条件のいくつかが満たされないといけないことが短所ではある。例えば、借入資本はただ本稿の評価した価格と時間との体系的感度分析では不足で、負債ごとに様々に差異があり、それは満期、各種デフォルト条件、転換債、コーラブル債、SWAPs などであり、それらをモンテカルロ法アプローチも理解はするが、CR プライシングの戦略としての最適化が期待される。実務上、CR プライシングを決定する時、ほとんど抵当品、現実市場の MTM(mark-to-market)、マージン・コールなどは条件付で取引する。ところが、CCR(collateralized credit risk)について、市場値の変動は複雑な相関事項(中立化しない)を把握しないといけない。確率過程が CR、抵当品リスク、確率差異などリスクの分野のほか、内部の統制と審査のシステムの確立、即ち、抵当

48) 実務上では、ポートフォリオのリバランス(rebalancing)とリヘッジ(rehedging)の戦略策が B-S モデルを補足する。

品LTVの決定、デフォルト率の許容範囲、MTMの時段分析、マージン・コールの決定などをCRプライシングの応用に考えている。

これまで経営意思決定の際、リスクが最小に抑えられたが、B-Sの基盤として、CRプライシング非不確実の計測が機能を重視する合理的なアプローチに移行するはずである。こうしたCRプライシングの展開において、本質的なリスク・ヘッジを行うためには、Cossin and Pirotte[49]の実証の結果[50]によると、①企業におけるオペレーティング・リスクのσは固定的になる。②B-Sモデルの計算値が市場スプレッドのHRHR(high risk high return)の特徴がある。ただし、企業によって差異がある。③理論スプレッド値と実際のスプレッド値は、長期的な観測をして、エクイティ市場値の有意水準(significant level)を漸次に増加させ、理論値が減少して一致する。④このB-SモデルからCRプライシング計測の結果は、全ポートフォリオの平均スプレッドの推定値を高めるが、全市場のスプレッドからモデルの実証ができない。結論をいえば、CRプライシングモデルが、リスク分析において価値がある。特に、経営の実態にせまるように望みたいところであるが、利子率幅と複雑なエクイティ破綻の規則は予知できると断定する。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

参考文献

Didier Cossin and Hugues Pirotte (2001), *Advanced Credit Risk Analysis*, John Wiley and Sons, LTD

Manual Ammann (2002), *Credit Risk Valuation*, Springer

Paul Wilmott (2001), *Quantitative Finance*, John Wiley and Sons, LTD

Paul Wilmott and Henrik Rasmussen (2002), *Mathematical Finance*, John Wiley and Sons, LTD

Alison Etheridge (2002), *Financial Calculas*, Cambridge

Les Clewlow and Chris Striekland (2001), *Implementing Derivatives Models*, John Wiley and Sons, LTD

Domingo Tavella (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing*, John Wiley and

49) pp.31-32参照。

50) 15社、21種の債券を対象に実証している。

Sons, Inc.
Anthony Saunders and Linda Allen (2002), *Credit Risk Measurement*, John Wiley and Sons, Inc.
John Casuette, Edward Altman, and Paul Naroyanan (1998), *Managing Credit Risk*, John Wiley and Sons, Inc.
ジョン・ホング(2002)『ファイナンシャルリスク・マネジメントの理論と実証』晃洋書房