レヴィ過程と同値マルチンゲール測度

杉　原　左 右 一

I　はじめに

金融派生商品の価格評価の代表的モデルとして、所謂ブラック・ショールズモデル（Black-Scholes model。以下*BS*モデルと略記する。）の重要性が随所で指摘されていることは周知のところである。原論文 Black and Scholes［6］が発表されて以来既に30年以上が経過しているが、その間*BS*モデルは数理ファイナンス分野の代表的モデルとして重要な役割を果たすと共に、実務界に於てもその存在意義は高く評価されるに至っている。しかしその反面で、学界、実務界に於て*BS*モデルが内包する問題点が除々に明らかにされる様になったことも事実であろう。

幾つかの問題点が挙げられるが（これに関しては例えばSchoutens［14］が参考になる。）、ここでは特に、*BS*モデルが、金融資産に関する収益率がブラウン運動に従うことを前提としている点をとりあげたい。周知の様に、ブラウン運動は、過程の独立増分性と時間的一様性と並んで、増分過程の正規性を前提とするものである。特に正規性の仮定は*BS*モデルの操作性を著しく向上させ、それが*BS*モデルの評価を高かめる由縁の一つにもなっているのであるが、適用分野によって若干の差異がみられるとは言え、正規性の仮定の現実妥当性には大きな問題点があることもまた否めない事実であろう。例えば、多くの金融資産データについて、その収益率データの歪度や尖度が正規分布の場合を大きく逸脱していることは既に多くの文献（例えばFama

［8］が参考になる。）で指摘されているところである。この種の問題に対処する方法として、例えば*ARCH*モデル（Autoregressive Conditional Heteroskedastic model）やフラクショナルブラウン運動（Fractional Brownian Motion）の適用があげられるが、これとは別にブラウン運動以外にジャンプ過程等を包含したより一般的な加法過程（レヴィ過程）を想定したモデルの開発、適用が考えられる。特に前2モデルについては既に多くの研究がなされており、筆者自身もこれまで時系列分析の観点からこれらのモデルについて考察を加えたことがあるが、レヴィ過程に関しては、特に確率過程論の分野で多くの研究がなされているものの、その統計的推論に関しては未解決な問題も数多く残されている。

本稿はレヴィ過程について、特に無限分解可能性と同値マルチンゲール測度を中心に基本的諸性質を整理し、今後の統計的分析への足懸りを築くことを目的とするものである。本稿の内容は次の通りである。すなわち、まずII節で無限分解可能性を中心にレヴィ過程の基本的性質について述べ、続いてIII、IV節でレヴィ過程、並びに対数レヴィ過程の同値マルチンゲール測度に関する基本的性質を整理する。V節で今後の課題について簡単に述べる。本稿の内容はいずれも基本的なものであるが、統計的推論の立場から残された課題も多い。本稿をふまえ、レヴィ過程、並びにこれを拡張した指数分布族に関する統計的推論について別稿で論究する予定である。なお本稿執筆にあたり、巻末の参考文献の中でも特にLoéve［12］、Shiryaev［16］を参考にしていることを付記しておきたい。

II　レヴィ過程の基本的性質

2．1　無限分解可能性

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を確率空間とし、確率変数$X$の分布を$\mu$、特性関数を$\varphi(\theta)$

$$(1)\quad \varphi(\theta)=E(e^{i\theta X})$$
$$=\int_{R^1} e^{i\theta x}\mu(dx)$$

とする。$n=1, 2, \cdots$について

(2) $\varphi(\theta)=({}_n\varphi(\theta))^n \qquad \theta\in R^1$

となる特性関数${}_n\varphi(\theta)$が存在するとき、μを無限分解可能（infinitely divisible）な分布、$\varphi(\theta)$を無限分解可能な特性関数と呼ぶ。(2)式の関係式を分布に関して表現すれば、分布${}_n\mu$が存在して、μが${}_n\mu$のたたみこみとして

(3) $\mu={}_n\mu*{}_n\mu*\cdots*{}_n\mu$

と表現できることと同値であり、これはまたiid（independently, identically distributed）な確率変数$X_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$を用いて$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$の分布がμになる様にできることと同値である。

特性関数$\varphi(\theta)$が無限分解可能であるための必要十分条件は$\varphi(\theta)$が次式の様に表現できることであることが知られている。

(4) $\varphi(\theta)=exp\left\{ib\theta-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1-i\theta g(x))\nu(dx)\right\}$

上式で、$b\in R^1$, $\sigma^2\geqq 0$ は定数であり、$g(x)$は

(5) $g(x)=xI(|x|\leqq 1)$

で定義される切断関数である。νは

(6) $\nu(\{0\})=0$

(7) $\int_{R^1}(x^2\wedge 1)\nu(dx)<\infty$

を満たす測度であり、$\nu(dx)$を$\mu(dx)$のレヴィ測度（Lévy measure）と呼ぶ。νは$\nu(R^1)<\infty$であっても$\nu(R^1)=\infty$であってもよい。(4)式を無限分解可能な特性関数のLévy-Khintchine標準形と呼んでいる。

無限分解可能な分布の例としては、正規分布、ポアソン分布、幾何分布、負の2項分布、t分布、F分布、対数正規分布、ロジスティック分布、パレート分布、両側指数分布、ハイパボリック分布等があげられる。これに対して無限分解不可能な代表的分布として2項分布、一様分布等がある。

2．2 レヴィ過程の特性関数

確率空間$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$上で定義された1次元連続時間確率過程 $X=\{X_t\}_{t\geqq 0}$ が次の条件(1)〜(5)を満たすとき、これを1次元レヴィ過程（Lévy process）と呼ぶ。

(1) $X_0=0 \quad Pa.s.$

(2) 任意の $n\geqq 1$ と、$0\leqq t_0\leqq t_1\leqq\cdots\leqq t_n$ を満たす任意の時点 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ について、$X_{t_0}, X_{t_1}-X_{t_0}, \cdots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ は独立である。

(3) 任意の $s, t\geqq 0$ について、$X_{t+s}-X_s$ の分布は s に依存しない。

(4) 任意の $t\geqq 0$ と $\varepsilon>0$ について

(8) $$\lim_{s\to t} P(|X_s-X_t|>\varepsilon)=0$$

が成立する。

(5) $X=\{X_t\}_{t\geqq 0}$ は P$a.s.$ で右連続で左極限を持つ。

特に、(2)は過程の独立増分性、(3)は時間的一様性、(4)は確率連続性を述べたものである。

さて、レヴィ過程 X_t の分布を $P_t(dx)=P(X_t\in dx)$ とし、その特性関数を $\varphi_t(\theta)$ とすれば、$\varphi_t(\theta)$ が

(9) $$\begin{aligned}\varphi_t(\theta)&=E(e^{i\theta X_t})\\&=\int_{R^1} e^{i\theta x}P_t(dx)\\&=exp\{ib_t\theta-\frac{{\sigma_t}^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1-i\theta g(x))\nu_t(dx)\}\end{aligned}$$

と表現できることが知られている。ただし、$b_t\in R^1$, ${\sigma_t}^2\geqq 0$ は定数であり、$\nu_t(dx)$ は各 t について(6)、(7)式を満たすレヴィ測度である。

レビィ過程の独立増分性、及び時間的一様性より、X_{t+s} の特性関数 $\varphi_{t+s}(\theta)$ は

(10) $$\begin{aligned}\varphi_{t+s}(\theta)&=E(e^{i\theta X_{t+s}})\\&=E\{e^{i\theta(X_{t+s}-X_s)}\}E(e^{i\theta X_s})\\&=E(e^{i\theta X_t})E(e^{i\theta X_s})\end{aligned}$$

$$=\varphi_t(\theta)\varphi_s(\theta)$$

と表現できることがわかる。従って、キュムラント母関数を $\psi(\theta)$ として、特性関数 $\varphi_t(\theta)$ を

(11) $\varphi_t(\theta)=exp\{t\psi(\theta)\}$

と表現できることがわかる。特に、

(12) $b=b_1,\ \sigma^2={\sigma_1}^2,\ \nu(dx)=\nu_1(dx)$

と表わせば、

(13) $b_t=tb,\ {\sigma_t}^2=t\sigma^2,\ \nu_t(dx)=t\nu(dx)$

となり、特性関数 $\varphi_1(\theta)$、従って $\varphi_t(\theta)$、と3つの組（$b,\ \sigma^2,\ \nu$）は一対一対応し、レヴィ過程 X_t の性質が（$b,\ \sigma^2,\ \nu$）により完全に規定されることがわかる。3つの組（$b,\ \sigma^2,\ \nu$）をレヴィ過程 X_t の特性量（ないし生成要素）と呼んでいる。

キュムラント母関数 $\psi(\theta)$ は次式で与えられる。

(14) $$\psi(\theta)=ib\theta-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1-i\theta g(x))\nu(dx)$$
$$=ib\theta-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{0<|x|\leqq 1}(e^{i\theta x}-1-i\theta x)\nu(dx)$$
$$+\int_{|x|>1}(e^{i\theta x}-1)\nu(dx)$$

ただし、上記キュムラント母関数 $\psi(\theta)$（従って特性関数 $\varphi_t(\theta)$）の表現は一意ではない。すなわち、特性量（$b,\ \sigma^2,\ \nu$）のうち $\sigma^2,\ \nu$ についてはこれらを一意に定めることができるが、b については $g(x)$ の選択に応じて幾つかの表現方法がある。例えば、$\varepsilon>0$ について、$b(\varepsilon)$ を適当に選択すれば、$\psi(\theta)$ を

(15) $$\psi(\theta)=ib(\varepsilon)\theta-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1-i\theta xI(|x|\leqq\varepsilon))\nu(dx)$$

と表現できる。また、これとは別に $g(x)$ に代わって $\dfrac{x}{1+x^2}$ を用いて

(16) $$\psi(\theta)=ib_1\theta-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}\left(e^{i\theta x}-1-i\theta\frac{x}{1+x^2}\right)\nu(dx)$$

と表現することもできる。（上式はレビィによるオリジナルな表現に対応している。）この場合には

(17)　$$b_1=b+\int_{0<|x|\leqq 1}\left(\frac{x}{1+x^2}-x\right)\nu(dx)+\int_{|x|>1}\frac{x}{1+x^2}\nu(dx)$$

として、特性量は（b_1，σ^2，ν）となる。

さらに、(7)式に代わって、より強い

(18)　$$\int_{R^1}(|x|\wedge 1)\nu(dx)<\infty$$

が成立する場合には、$\psi(\theta)$を

(19)　$$\psi(\theta)=ib_2\theta-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1)\nu(dx)$$

と表わせる。また、

(20)　$$\int_{R^1}(x^2\wedge|x|)\nu(dx)<\infty$$

が成立する場合には、$\psi(\theta)$ を

(21)　$$\psi(\theta)=ib_3\theta-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1-i\theta x)\nu(dx)$$

と表わせる。なお、一般に

(22)　$$|e^{ix}-1|\leqq\{|x|\wedge 2\}$$

(23)　$$|e^{ix}-(1+ix)|\leqq\left\{\frac{1}{2}x^2\wedge 2|x|\right\}$$

であることに注意しよう。

上記した特性関数 $\varphi_t(\theta)$ の Lévy-Khintchine 標準形に対応して、レヴィ過程 X_t を次式の様に分解表示できることが知られている。これをレヴィ過程 X_t のLévy-Ito 分解と呼んでいる。

(24)　$$X_t=bt+\sigma B_t+Y_t+Z_t$$

上式で Y_t，Z_t は

(25)　$$Y_t=\int_{0+}^t\int_{|x|>1}xN_P(dudx)$$

(26)　$$Z_t=\int_{0+}^t\int_{0<|x|\leqq 1}x\tilde{N}_P(dudx)$$

であり、B_t はブラウン運動、$N_P(dudx)$ はポアソンランダム測度であり、

(27)　$\tilde{N}_P = N_P(dudx) - \hat{N}_P(dudx)$

は、

(28)　$$\hat{N}_P(dudx) = E(N_P(dudx)) = du\nu(dx)$$

を補償子（compensator）とする N_P の補償ポアソン測度（compensated Poisson measure）である。(24)式を

(29)　$X_t = M_t + A_t$

(30)　$M_t = \sigma B_t + Z_t$

(31)　$A_t = bt + Y_t$

と表わせば、M_t はマルチンゲール、A_t は有界変動過程となるから、レヴィ過程 X_t がセミマルチンゲールとなっていることが理解できるのである。

2.3　具体例

幾つかの基本的なレヴィ過程について、その特性関数 $\varphi_t(\theta)$ を具体的に求めてみよう。

(1)　ブラウン運動

B_t を標準ブラウン運動として、

(32)　$X_t = \sigma B_t$

の場合には、特性量は $(b, \sigma^2, \nu) = (0, \sigma^2, 0)$ であり、特性関数 $\varphi_t(\theta)$ は

(33)　$$\varphi_t(\theta) = exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2 t\right)$$

となる。次に、

(34)　$X_t = bt + \sigma B_t$

の場合には、$(b, \sigma^2, \nu) = (b, \sigma^2, 0)$ であり、

(35)　$$\varphi_t(\theta) = exp\left\{\left(ib\theta - \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right)t\right\}$$

となる。

(2) ポアソン過程

X_t がパラメーター $\lambda>0$ のポアソン過程に従う場合には、

(36) $$P(X_t=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

であり、$E(X_t)=V(X_t)=\lambda t$ である。この場合には、$(b,\ \sigma^2,\ \nu)=(\lambda,\ 0,\ \lambda I(\{1\})(dx))$

であり、特性関数は

(37) $$\begin{aligned}\varphi_t(\theta)&=exp[\{i\lambda\theta+\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1-i\theta g(x))\lambda I(\{1\})(dx)\}t]\\&=exp[\{i\lambda\theta+(e^{i\theta}-1-i\theta)\lambda\}t]\\&=exp\{\lambda(e^{i\theta}-1)t\}\end{aligned}$$

となる。

(3) 複合ポアソン過程 ($\nu(R^1)<\infty$ の一例)

$N=\{N_t\}_{t\geq 0}$ をパラメーター $\lambda>0$ のポアソン過程、$\xi=\{\xi_j\}_{j\geq 1}$ を N と独立な iid 確率変数とし、

(38) $$P(\xi_j\in A)=\frac{\nu(A)}{\nu(R^1)},\quad A\in\mathfrak{B}(R^1)$$

とする。ただし、$\nu(\{0\})=0$ であり、$\lambda=\nu(R^1)<\infty$ とする。$X_0=0$ として、次式で表わされる過程 $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ を複合ポアソン過程と呼ぶ。

(39) $$X_t=\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j \qquad t>0$$

ポアソン過程 $N=\{N_t\}_{t\geq 0}$ のジャンプ時刻を $0<\tau_1<\tau_2<\cdots$ とすれば、複合ポアソン過程 X_t を

(40) $$X_t=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j I(\tau_j\leqq t)$$

と表わすことができる。

ここで

(41) $$P(dx)=\frac{\nu(dx)}{\lambda}$$

と表わせば、複合ポアソン過程 X_t の特性関数 $\varphi_t(\theta)$ を次式で表わせること

がわかる。

(42) $$\begin{aligned}\varphi_t(\theta)&=E(e^{i\theta X_t})\\&=\sum_{k=0}^{\infty}E(e^{i\theta X_t}|N_t=k)P(N_t=k)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\{E(e^{i\theta\xi_1})\}^k\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\\&=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\lambda t(\int_{R^1}e^{i\theta x}P(dx))\right\}^k\\&=e^{-\lambda t}e^{\lambda t\int_{R^1}e^{i\theta x}P(dx)}\\&=exp\left\{t\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1)\nu(dx)\right\}\end{aligned}$$

複合ポアソン過程の特性量は $(b,\ \sigma^2,\ \nu)=\left(\int_{0<|x|\leqq 1}x\nu(dx),\ 0,\ \nu(dx)\right)$ となる。特に複合ポアソン過程で $\xi_j\equiv 1$ の場合がポアソン過程となる。

(4) $\nu(R^1)=\infty$ の一例

$\nu(R^1)=\infty$ となる簡単なレヴィ過程として次の過程が考えられる。すなわち、$\lambda_k>0$、$\beta_k\neq 0$ とし、$\lambda=(\lambda_k)_{k\geqq 1}$、$\beta=(\beta_k)_{k\geqq 1}$ について、$\nu(R^1)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=\infty$ であるが、

(43) $$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\beta_k^2<\infty$$

が成立するものと仮定しよう。

$N^{(k)}=(N_t^{(k)})_{t\geqq 0}$、$k\geqq 1$ をパラメータ $\lambda_k(k\geqq 1)$ の独立なポアソン過程とする。$X_t^{(n)}$ を

(44) $$X_t^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(N_t^{(k)}-\lambda_k t)$$

と定義すれば、

(45) $$\nu^{(n)}(dx)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k I(\{\beta_k\})(dx)$$

として、過程 $X^{(n)}=(X_t^{(n)})_{t\geqq 0}$ の特性関数 $\varphi_t^{(n)}(\theta)$ が次式で表わせることがわかる。

(46)
$$\varphi_t^{(n)}(\theta)=E(e^{i\theta X_t^{(n)}})$$
$$=E\{e^{i\theta\sum_{k=1}^{n}\beta_k(N_t^{(k)}-\lambda_k t)}\}$$
$$=\prod_{k=1}^{n}E\{e^{i\theta\beta_k(N_t^{(k)}-\lambda_k t)}\}$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\sum_{x=0}^{\infty}e^{i\theta\beta_k(x-\lambda_k t)}\frac{e^{-\lambda_k t}(\lambda_k t)^x}{x!}$$
$$=\prod_{k=1}^{n}e^{-\lambda_k t}e^{-i\theta\beta_k\lambda_k t}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}(e^{i\theta\beta_k}\lambda_k t)^x$$
$$=exp\{t\sum_{k=1}^{n}(e^{i\theta\beta_k}-1-i\theta\beta_k)\lambda_k\}$$
$$=exp\{t\int_{R^1}(e^{i\theta x}-1-i\theta x)\nu^{(n)}(dx)\}$$

従って、$X_t^{(n)}$ の $n\to\infty$ のときの L^2 極限

(47) $$X_t=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(N_t^{(k)}-\lambda_k t)$$

は、次式の $\nu(dx)$

(48) $$\nu(dx)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k I(\{\beta_k\})(dx)$$

をレヴィ測度とするレヴィ過程であることがわかる。ここで仮定より、

(49) $$\int_{R^1}(x^2\wedge 1)\nu(dx)\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\beta_k^2<\infty$$

となることに注意しよう。

III　レヴィ過程と同値マルチンゲール測度

(9)式で θ を $-i\theta$ で置換することにより、次式で表わされる X_t の積率母関数（ラプラス変換）$E(e^{\theta X_t})$ が得られる。

(50) $$E(e^{\theta X_t})=e^{t\varphi(\theta)}$$

(51) $$\varphi(\theta)=b\theta+\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}(e^{\theta x}-1-\theta g(x))\nu(dx)$$

(以下、II節と同記号 φ を用いるが混同することはないであろう。)

ここで、

(52) $Z_t^{(\theta)}=exp\{\theta X_t-t\varphi(\theta)\}$

$$=\frac{e^{\theta X_t}}{E(e^{\theta X_t})}$$

とすれば、

(53) $E(Z_t^{(\theta)})=1$

であり、さらに $Z_t^{(\theta)}$ がマルチンゲールとなることがわかる。なぜなら、$t>s$ として、フィルトレーション $\mathfrak{F}_s=\mathfrak{F}_s(X)$ に関して、

(54) $E(Z_t^{(\theta)}|\mathfrak{F}_s)=\dfrac{E(e^{\theta X_t}|\mathfrak{F}_s)}{E(e^{\theta X_t})}$

を考えれば、X_t-X_s と X_s、X_t-X_s と $\mathfrak{F}_s$が独立となることを用いて、上式右辺の分母、分子が次式で表わせる。

(55) $E(e^{\theta X_t}|\mathfrak{F}_s)=E(e^{\theta(X_t-X_s)}e^{\theta X_s}|\mathfrak{F}_s)$

$$=E(e^{\theta(X_t-X_s)}|\mathfrak{F}_s)e^{\theta X_s}$$

$$=E(e^{\theta(X_t-X_s)})e^{\theta X_s}$$

(56) $E(e^{\theta X_t})=E(e^{\theta(X_t-X_s)}e^{\theta X_s})$

$$=E(e^{\theta(X_t-X_s)})E(e^{\theta X_s})$$

従って、

(57) $E(Z_t^{(\theta)}|\mathfrak{F}_s)=\dfrac{e^{\theta Xs}}{E(e^{\theta Xs})}$

$$=Z_s^{(\theta)}$$

が成立し、$Z_t^{(\theta)}$ がマルチンゲールとなることが理解されるのである。

$X=\{X_t\}_{t\leqq T}$ を確率空間（Ω，$\mathfrak{F}_T$，P_T）上のレヴィ過程とする。ここで $P_T=P|\mathfrak{F}_T$ である。$a\in R^1$ として、確率測度 P_T をもとにして、新しく次式に基づいて P_t の同値確率測度 $P_T^{(a)}$ を導入しよう。

(58) $dP_T^{(a)}=Z_T^{(a)}dP_T$

すなわち、$Z_t^{(a)}$ は尤度比

(59) $\dfrac{dP_T^{(a)}}{dP_T}=Z_T^{(a)}$

に他ならない。(58)式の変換を確率測度 P_T のエッシャー変換（Esscher transformation）と呼ぶことがある。[1)]

一般化ベイズ公式を用いれば、$t>s$ について、$P_T{}^{(a)}a.s.$で次式が成立することがわかる。

(60) $E_{P_T(a)}(e^{\theta(X_t-X_s)}|\mathfrak{F}_s)$

$$=\frac{1}{Z_s{}^{(a)}}E_{P_T}(e^{\theta(X_t-X_s)}Z_t{}^{(a)}|\mathfrak{F}_s)$$

$$=\frac{1}{e^{aX_s-s\varphi(a)}}E_{P_T}(e^{\theta(X_t-X_s)}e^{aX_t-t\varphi(a)}|\mathfrak{F}_s)$$

$$=E_{P_T}e^{(a+\theta)(X_t-X_s)-\varphi(a)(t-s)}$$

$$=e^{\{\varphi(a+\theta)-\varphi(a)\}(t-s)}$$

従ってレヴィ過程 $\{X_t\}_{t\leq T}$ は、変換後の確率測度 $P_T{}^{(a)}$ の下でもレヴィ過程であり、

(61) $\varphi^{(a)}(\theta)=\varphi(a+\theta)-\varphi(a)$

として、

(62) $E_{P_T(a)}e^{\theta X_t}=e^{t\varphi^{(a)}(\theta)}$

が成立することがわかる。

レヴィ過程 $\{X_t\}_{t\leq T}$ の確率測度 $P_T{}^{(a)}$ の下での特性量を（$b^{(a)}$, $\sigma^{2(a)}$, $\nu^{(a)}$）と表わし、$\varphi^{(a)}(\theta)$ を

(63) $\varphi^{(a)}(\theta)=b^{(a)}\theta+\dfrac{\sigma^{2(a)}}{2}\theta^2+\displaystyle\int_{R^1}(e^{\theta x}-1-\theta g(x))\nu^{(a)}(dx)$

としよう。(51)式より、

(64) $\varphi^{(a)}(\theta)=\varphi(a+\theta)-\varphi(a)$

$$=\{b+a\sigma^2+\int_{R^1}g(x)(e^{ax}-1)\nu(dx)\}\theta$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}\theta^2+\int_{R^1}(e^{ax}-1-\theta g(x))e^{ax}\nu(dx)$$

となるから、確率測度 $P_T{}^{(a)}$ の下での特性量（$b^{(a)}$, $\sigma^{2(a)}$, $\nu^{(a)}$）と、元の確

1) 確率過程論の分野では周知の変換である。エッシャーなる名称は論文 Esscher [7] に由来するものであり、保険数理の分野ではこの変換が古くから使用されていたとの指摘がある。(Shiryaev[16])

率測度 P_T の下での特性量（b, σ^2, ν）との間に次の関係式が成立することがわかるのである。

(65)　$b^{(a)}=b+a\sigma^2+\int_{R^1} g(x)(e^{ax}-1)\nu(dx)$

(66)　$\sigma^{2(a)}=\sigma^2$

(67)　$\nu^{(a)}(dx)=e^{ax}\nu(dx)$

レヴィ過程 $\{X_t\}_{t\leqq T}$ が、確率測度 P_T の下で

(68)　$\int_{R^1}(x^2\wedge|x|)\nu(dx)<\infty$

(69)　$b+\int_{R^1}(x-g(x))\nu(dx)=0$

を満たせば、局所マルチンゲールとなることが知られている。（Shiryaev [16]）(69)式は

(70)　$b+\int_{|x|>1} x\nu(dx)=0$

と同値である。ところで、(68)、(69)式（又は(70)式）が満たされない場合には、変換後の確率測度 $P_T{}^{(a)}$ の下で新しい特性量（$b^{(a)}$, $\sigma^{2(a)}$, $\nu^{(a)}$）を用いて、(68)、(70)式に対応する

(71)　$\int_{R^1}(x^2\wedge|x|)\nu^{(a)}(dx)<\infty$

(72)　$b^{(a)}+\int_{|x|>1} x\nu^{(a)}(dx)=0$

が成立すれば、レヴィ過程 $\{X_t\}_{t\leqq T}$ が新しい確率測度 $P_T{}^{(a)}$ の下で局所マルチンゲールとなることがわかるのである。

IV　対数レヴィ過程と同値マルチンゲール測度

$X=\{X_t\}_{t\leqq T}$ をレヴィ過程として、次に本節では次式で表わされる対数レヴィ過程（log Lévy process）$Y=\{Y_t\}_{t\leqq T}$

(73)　$Y_t=e^{X_t}$

について考察しよう。[2] 本節では特に対数レヴィ過程 $\{Y_t\}_{t \leqq T}$ が元の確率測度 P_T、ないし変換後の確率測度 $P_T{}^{(a)}$ の下でマルチンゲールとなる条件について整理することにする。

先ず、対数レヴィ過程 $\{Y_t\}_{t \leqq T}$ が元の確率測度 P_T の下でマルチンゲールとなるための条件について考察しよう。この場合には $t>s$ として、

$$(74)\quad E_{P_T}(e^{X_t - X_s} | \mathfrak{F}_s) = E_{P_T}(e^{X_t - X_s}) = e^{\varphi(1)(t-s)}$$

に注意すれば、

$$(75)\quad \varphi(1) = b + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{R^1} (e^x - 1 - g(x))\nu(dx) = 0$$

であれば、対数レヴィ過程 $\{Y_t\}_{t \leqq T}$ が確率測度 P_T の下でマルチンゲールとなることがわかる。

(75)式が成立しない場合には、変換した確率測度 $P_T{}^{(a)}$ の下で、(60)式より

$$(76)\quad E_{P_T(a)}(e^{X_t - X_s} | \mathfrak{F}_s) = E_{P_T(a)}\left(\frac{e^{X_t}}{e^{X_s}} \Big| \mathfrak{F}_s\right) = e^{(\varphi(a+1) - \varphi(a))(t-s)}$$

となることを用いればよい。すなわちこの場合には

$$(77)\quad \varphi(a+1) - \varphi(a) = b + \left(\frac{1}{2} + a\right)\sigma^2 + \int_{R^1} ((e^x - 1)e^{ax} - g(x))\nu(dx) = 0$$

を満たす a を a^* として，対数レヴィ過程 $\{Y_t\}_{t \leqq T}$ が変換後の確率測度 $P_T{}^{(a^*)}$ の下でマルチンゲールとなることがわかるのである。ただし、(77)式右辺で

$$(78)\quad \int_{R^1} ((e^x - 1)e^{a^* x} - g(x))\nu(dx) < \infty$$

が成立するものとする。

2） 対数レヴィ過程を幾何レヴィ過程（geometric Lévy process）と呼ぶこともある。

V　おわりに

本稿では、レヴィ過程について、特にその特性関数と同値マルチンゲール測度を中心に基本的諸性質を整理した。本稿の内容は確率過程論の分野では既知の内容に属するものであるが、レヴィ過程の統計的推論に関しては今後の研究に委ねられている未解決な問題も数多く残されている。特にレヴィ過程、並びにこれを拡張した指数分布族に関連する未知母数の推定量、検定量の統計的性質については今なお残された問題も多い。また、数理ファイナンスの観点から残された課題も少なくない。その一つに不完備市場に関する分析が挙げられる。不完備市場に於いては同値マルチンゲール測度を一意に定められないが、この点に関して、特に Schweizer［15］や宮原［4］等の最小（エントロピー）マルチンゲール測度の導出は興味あるものである。今後特に対数レヴィ過程の有効性に関する理論、実証両側面からの考察が必要となろう。

本稿をもとにして、別稿でレヴィ過程、並びにこれを拡張した指数分布族に関連する未知母数推定、検定問題について考察することにしたい。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

参考文献

[1] 伊藤清（1991）、『確率論』、岩波書店。
[2] 佐藤健一（1990）、『加法過程』、紀伊国屋書店。
[3] 清水良一（1976）、『中心極限定理』、教育出版。
[4] 宮原孝夫（2003）、『株価モデルとレヴィ過程』、朝倉書店。
[5] Billingsley, P. (1995), *Probability and Measure,* (3rd ed.), John Wiley & Sons.
[6] Black, F. and M. Scholes (1973), "The pricing of options and cooporate liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.
[7] Esscher, F. (1932), "On the probability function in the collective theory of risk," *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* 15, 175-195.
[8] Fama, H. (1965), "The behavior of stock market prices," *Journal of Business*, 38, 34-105.
[9] Ikeda, N. and S. Watanabe, (1989), *Stochastic Differential Equations and Diffu-*

sion Processes, (2nd ed.), North-Holland.

[10] Jacod, J. and A.N. Shiryaev (1987), *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag.

[11] Küchler, U. and M. Sørensen (1997), *Exponential Families of Stochastic Processes*, Springer-Verlag.

[12] Loéve, M. (1977), *Probability Theory I* (4th ed.), Springer-Verlag.

[13] Rogers, L. C. G. and D. Williams, (2000), *Diffusions, Markov Processes and Martingales Vol.1* (2nd ed.), *Vol.2* (2nd ed.), Cambridge University Press.

[14] Schoutens, W. (2003), *Lévy Processes in Finance*, John Wiley & Sons.

[15] Schweizer, M. (1995), "On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition," Stochastic Analysis and Applications, 13, 573-599.

[16] Shiryaev, A. N. (1999), *Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory.*, World-Scientific.