時系列—回帰モデルに於ける OLS と GLS の漸近的性質について

杉　原　左右一

I　はじめに

独立変数が $I(1)$ 過程に従い、誤差項がこれとは独立に定常 AR 過程に従う回帰モデルに於て OLS と GLS が同一の極限分布を持つことは既に知られているところであるが（例えば Phillips and Park ［5］参照)、本稿では同モデルを拡張し、独立変数が near $I(1)$ 過程ないし非定常な $I(d)$ 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従う場合について OLS と GLS の統計的性質を明らかにしたい。

以下先ず2節で独立変数及び誤差項が共に独立に定常過程に従う場合について OLS と GLS の統計的性質について整理する。次に3、4節に於て独立変数が near $I(1)$ 過程及び $I(d)$ 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従い、誤差項がこれとは独立な定常過程に従う回帰モデルについて OLS と GLS の統計的性質について考察することにしたい。最後の5節は本稿のまとめに充てられる。

II　独立変数が定常過程に従う場合について

本稿の論点を把握するために、先ず最初に独立変数及び誤差項が独立に共に定常過程に従う回帰モデルについて、パラメータの OLS（通常最小2乗推定量）と GLS（一般化最小2乗推定量）の統計的性質について整理しておくことにしたい。

議論の本質を理解するために、本稿では次式で表わされる最も単純な単回帰モデルをもとにして考察を進めることにする。

（1）　$y_t=\beta_0+\beta_1 x_t+u_t$　　　$t=1,\ 2,\ \cdots,\ T$

上記単回帰モデルに以下の仮定１、２、３、を設定することにしよう。但し記号 L はラグ演算子を意味するものとする。

仮定１　$\alpha(L)x_t=v_t,\ \alpha(L)=1-\alpha L,\ \ |\alpha|<1$

仮定２　$\phi(L)u_t=\varepsilon_t,\ \phi(L)=1-\phi L,\ \ |\phi|<1$

仮定３　$(v_t,\ \varepsilon_t)'\sim \text{I. I. D.}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\sigma_v^2 & 0\\ 0 & \sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix}\right)$

$E(v_t^4)<\infty,\ E(\varepsilon_t^4)<\infty$

特に仮定１、２で独立変数 x_t 及び誤差項 u_t が共に定常な AR(１)過程に従うことを仮定しているが、これをより一般の定常 ARMA 過程に拡張しても以下の性質は同様に成立することに注意したい。また仮定３で v_t と ε_t は独立であることを仮定している。これを相関のある場合に拡張することも可能であるが、分析結果はやや複雑なものとなる。本稿では議論の特徴を明確にすることの出来る独立な場合を中心にして考察を進めることにしたい。

以後の分析の便宜のために、上記モデルをベクトル表示して以下の様に表わそう。

（2）　$y=X\theta+u$

但し各記号の意味は以下の通りである。

（3）　$y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_T)'$

（4）　$u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_T)'$

（5）　$X=\begin{pmatrix}1, & 1, & \cdots, & 1\\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_T\end{pmatrix}'$

（6）　$\theta=(\beta_0,\ \beta_1)'$

さて、θ の OLS 及び GLS をそれぞれ $\hat{\theta}_O=(\hat{\beta}_{0O},\ \ \hat{\beta}_{1O})'$、$\hat{\theta}_G=(\hat{\beta}_{0G},\ \ \hat{\beta}_{1G})'$ と表わそう。

（7）　$\hat{\theta}_O=(X'X)^{-1}X'y$

（8）　$\hat{\theta}_G=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$

但し Σ は u の共分散行列 $E(uu')$ である。

先ず独立変数が確率変数である場合のガウス・マルコフの定理を用いれば、GLS$\hat{\theta}_G$がOLS$\hat{\theta}_O$に比較して有効であることが次の様にして理解出来る。即ち、$\hat{\theta}_O$、$\hat{\theta}_G$のXの条件付き分散は

$$V(\hat{\theta}_O \mid X)=(X'X)^{-1}X'\Sigma X(X'X)^{-1} \tag{9}$$

$$V(\hat{\theta}_G \mid X)=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1} \tag{10}$$

となる。ここでDを

$$(X'X)^{-1}X'=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}+D \tag{11}$$

により定義すれば、Dは

$$DX=0 \tag{12}$$

を満たすことに注意しよう。そうすれば、

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}_O \mid X) &= ((X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}+D)\Sigma \\ &\quad (\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}+D') \\ &= V(\hat{\theta}_G \mid X)+D\Sigma D' \end{aligned} \tag{13}$$

となるが、$D\Sigma D'$は半正値定符号であるから、

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}_O)-V(\hat{\theta}_G) &= E(D\Sigma D') \\ &\geqq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

となり、GLS$\hat{\theta}_G$がOLS$\hat{\theta}_O$と比較してより有効であることが理解されるのである。

次にOLS$\hat{\theta}_O$とGLS$\hat{\theta}_G$の漸近的性質について整理しておこう。即ち、規格化行列Dを

$$D=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{15}$$

とすれば次の定理1が成立する。

定理1[1)]　仮定1、2、3の下で次の関係式が成立する。但し記号$\xrightarrow{d}$は分布収束を示す。

1) Choy and Taniguchi［2］と同様にすれば良い。

$$(16)\quad D(\hat{\theta}_O-\theta)\xrightarrow{d}N(0,\ \Sigma_O)$$

$$(17)\quad D(\hat{\theta}_G-\theta)\xrightarrow{d}N(0,\ \Sigma_G)$$

ここで、Σ_O、Σ_G はそれぞれ次式で与えられる。

$$(18)\quad \Sigma_O=\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi)^2} & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\alpha^2}{\sigma_v^2}\right)^2 2\pi\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda)f_u(\lambda)d\lambda \end{pmatrix}$$

$$(19)\quad \Sigma_G=\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi)^2} & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{f_x(\lambda)}{f_u(\lambda)}d\lambda\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

但し、$f_x(\lambda)$、$f_u(\lambda)$ は x_t 及び u_t のスペクトル密度関数であり、それぞれ次式で与えられる。

$$(20)\quad f_x(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\ \frac{\sigma_v^2}{|1-\alpha e^{i\lambda}|^2}$$

$$(21)\quad f_u(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{|1-\phi e^{i\lambda}|^2}\qquad(-\pi\leqq\lambda\leqq\pi)$$

上記定理1をもとにして OLS$\hat{\theta}_O$ と GLS$\hat{\theta}_G$ の漸近的性質について次の諸点に注意したい。

(i) $\hat{\theta}_O-\theta$ 及び $\hat{\theta}_G-\theta$ の確率オーダは共に $O_p\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$ である。

(ii) $T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{0O}-\beta_0)$ 及び $T(\hat{\beta}_{0G}-\beta_0)$ について

$$(22)\quad T(\hat{\beta}_{0O}-\beta_0)\text{ 及び } T(\hat{\beta}_{0G}-\beta_0)\xrightarrow{d}N\left(0,\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\phi)^2}\right)$$

$T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{1O}-\beta_1)$、$T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{1G}-\beta_1)$ について

$$(23)\quad T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{1O}-\beta_1)\xrightarrow{d}N\left(0,\left(\frac{1-\alpha^2}{\sigma_v^2}\right)^2 2\pi\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda)f_u(\lambda)d\lambda\right)$$

$$(24)\quad T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{1G}-\beta_1)\xrightarrow{d}N\left(0,\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_x(\lambda)}{f_u(\lambda)}\,d\lambda\right)^{-1}\right)$$

が成立し、$T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{0O}-\beta_0)$, $T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{0G}-\beta_0)$とは独立に分布する。極限正規分布の分散を具体的に求めれば次式となる。

$$(25)\quad \left(\frac{1-\alpha^2}{\sigma_v{}^2}\right)^2 2\pi\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda) f_u(\lambda)\,d\lambda = \frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{\sigma_v{}^2}\,\frac{(1-\alpha^2)(1+\alpha\phi)}{(1-\phi^2)(1-\alpha\phi)}$$

$$(26)\quad \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_x(\lambda)}{f_u(\lambda)}\,d\lambda\right)^{-1} = \frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{\sigma_v{}^2}\,\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\phi+\phi^2}$$

(iii) β_1に関して極限正規分布の分散の差を具体的に求めれば、

$$(27)\quad \frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{\sigma_v{}^2}\left(\frac{(1-\alpha^2)(1+\alpha\phi)}{(1-\phi^2)(1-\alpha\phi)} - \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\phi+\phi^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{\sigma_v{}^2}\,\frac{2\phi^2(1-\alpha^2)^2}{(1-\phi^2)(1-\alpha\phi)((\alpha-\phi)^2+1-\alpha^2)}$$

$$> 0$$

となり、OLSに対するGLSの漸近有効性が理解出来る。また、β_1についてGLSに対するOLSの漸近効率を両者の極限正規分布の分散比で定義すれば、

$$(28)\quad asy.eff(\hat{\beta}_{1O}) = \frac{(1-\alpha\phi)(1-\phi^2)}{(1+\alpha\phi)(1-2\alpha\phi+\phi^2)}$$

となる[2)]。一例として例えば$\alpha=0.6$、$\phi=0.9$であれば、$asy.eff(\hat{\beta}_{1O}) \fallingdotseq 0.078$となり、GLSに比較してOLSが著しく劣ることが理解出来るのである。

なお、ϕが未知であれば（8）式で定義した$\hat{\theta}_G$はθの実行可能GLSではない。但しその場合でもOLS残差に基づいてϕ、$\sigma_\varepsilon{}^2$、及びΣを一致的に推定可能である。

以上、独立変数及び誤差項が共に独立な定常過程に従う単回帰モデルを取り上げて、OLSとGLSの統計的性質について整理し、特にOLSに対するGLSの優位性を指摘した。ところでこれとは別に独立変数が所謂near $I(1)$過程ないし非定常な$I(d)$過程$(d>\frac{1}{2})$に従う場合についても本節で整理した特徴は同様に成立するのであろうか。本稿ではこの問題について次節以降で順次考察

2) Fuller［3］は（28）式の逆数で漸近効率を定義している。

し、OLS と GLS の統計的性質を明らかにすることにしたい。

Ⅲ 独立変数が near $I(1)$ 過程に従う場合について

前節に代わって独立変数 x_t が near $I(1)$ 過程に従い、誤差項 u_t がこれとは独立に定常 AR(1)過程に従う(1)式で表わされる単回帰モデルについて考察しよう。ここでも2節の仮定2、3を同様に設定することにし、仮定1に代わって次の仮定1′を設定することにする。

仮定1′ $x_t=\left(1-\frac{c}{T}\right)x_{t-1}+e_t,\ c\geqq 0$

$$e_t=\psi(L)v_t,\ \psi(L)=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i L^i$$

$$\psi_0=1,\ \sum_{j=0}^{\infty}j\mid\psi_j\mid<\infty$$

$\psi(z)=0$ の根は単位円外にある。

仮定1′は x_t が誤差項 e_t が定常線形過程 $\psi(L)v_t$ の near $I(1)$ 過程に従うことを示しており、特に $c=0$ であれば x_t は誤差項 e_t が定常線形過程に従う酔歩過程（ランダムウォーク過程）となる。またこれは次節の $d=1$ の場合の和分過程に相当することに注意しよう。

さて以下の議論に次の補題1が有効である。

補題1 [3] $X_c(r)$ $(r\in[0,1])$ を次式で与えられるO－U過程（Ornstein-Uhlenbeck 過程）とする。

(29) $dX_c(r)=-cX_c(r)dr+dW_v(r)$

但し $W_v(r)$ は標準ブラウン運動である。このとき以下の関係式が成立する。但し $W_\varepsilon(r)$ は $W_v(r)$ と独立な標準ブラウン運動であり、また記号 $\Rightarrow$ は関連する確率測度の弱収束を示す。

3) Phillips［4］を参照。

(ⅰ) $\dfrac{1}{T^{\frac{1}{2}}} x_{[Tr]} \Rightarrow \sigma_v \psi(1) X_c(r)$

(ⅱ) $\dfrac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \sum_{t=1}^{T} x_t \Rightarrow \sigma_v \psi(1) \int_0^1 X_c(r) dr$

(ⅲ) $\dfrac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^{T} x_t^2 \Rightarrow \sigma_v^2 \psi^2(1) \int_0^1 X_c^2(r) dr$

(ⅳ) $\dfrac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t u_t \Rightarrow \sigma_v \sigma_\varepsilon \dfrac{\psi(1)}{\phi(1)} \int_0^1 X_c(r) dW_\varepsilon(r)$

θのOLS及びGLSを(7)、(8)式と同様に$\hat{\theta}_O$、$\hat{\theta}_G$と表わそう。規格化行列をD

(30) $$D = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

とすれば、OLS$\hat{\theta}_O$について

(31) $$D(\hat{\theta}_O - \theta) = (D^{-1}X'XD^{-1})^{-1} D^{-1}X'u$$

となる。ここで上記補題1を用いれば上式右辺の$D^{-1}X'XD^{-1}$及び$D^{-1}X'u$が次式の関係式を満たすことが明らかになる。

(32) $$D^{-1}X'XD^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & \dfrac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \sum_{t=1}^{T} x_t \\ *, & \dfrac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} x_t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1, & \sigma_v \psi(1) \int_0^1 X_c(r) dr \\ *, & \sigma_v^2 \psi^2(1) \int_0^1 X_c^2(r) dr \end{pmatrix} \equiv \mathrm{H}$$

(33) $$D^{-1}X'u = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^{T} u_t \\ \dfrac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t u_t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\begin{pmatrix} W_\varepsilon(1) \\ \sigma_v\Psi(1)\int_0^1 X_c(r)dW_\varepsilon(r) \end{pmatrix} \equiv \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}K$$

従って (32)、(33) 式より $D(\hat{\theta}_O-\theta)$ が次式を満たすことがわかる。

(34) $$D(\hat{\theta}_O-\theta) \Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\mathrm{H}^{-1}\mathrm{K}$$

次に θ の GLS$\hat{\theta}_G$ について考察しよう。そのために先ず u の共分散行列を Σ としよう。

(35) $$\Sigma=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \cdots & \phi^{T-1} \\ \phi & 1 & \phi & \cdots & \phi^{T-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \phi^{T-1} & \phi^{T-2} & \phi^{T-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \equiv \sigma_\varepsilon^2\Omega$$

ここで Ω^{-1} が

(36) $$\Omega^{-1}=M'M$$

(37) $$M=\begin{pmatrix} (1-\phi^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\phi & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\phi & \ddots & \vdots \\ 0 & & -\phi & 1 \end{pmatrix}$$

と分解出来ることに注意しよう。そうすれば

(38) $$D(\hat{\theta}_G-\theta)=(D^{-1}X'M'MXD^{-1})^{-1}D^{-1}X'M'Mu$$

と表わせることがわかる。ここで再び補題1を用いれば $D^{-1}X'M'MXD^{-1}$ 及び $D^{-1}X'M'Mu$ が次式の関係式を満たすことが明らかになる。

(39) $$D^{-1}X'M'MXD^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{(1-\phi^2)+(1-\phi)^2(T-1)}{T}, & \dfrac{(1-\phi^2)x_1+(1-\phi)\sum_{t=1}^{T}(1-\phi L)X_t}{T^{\frac{3}{2}}} \\ * \quad , & \dfrac{(1-\phi^2)x_1^2+\sum_{t=2}^{T}((1-\phi L)x_t)^2}{T^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi^2(1)H$$

(40)
$$D^{-1}X'M'Mu=\begin{pmatrix}\dfrac{(1-\phi^2)u_1+(1-\phi)\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t}{T^{\frac{1}{2}}}\\ \dfrac{(1-\phi^2)x_1u_1+\sum_{t=2}^{T}((1-\phi\mathrm{L})x_t)\varepsilon_t}{T}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_\varepsilon\,\phi(1)K$$

上式で所謂 Beveridge-Nelson 分解を用いて $\phi(L)$ を

(41) $\phi(L)=\phi(1)+\phi(1-L)$

と表現出来ること、並びに $T\rightarrow\infty$ で0に確率収束する部分を無視出来ることを用いている。従って (39)、(40) 式より $D(\hat{\theta}_G-\theta)$ が

(42) $D(\hat{\theta}_G-\theta)\Rightarrow\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}H^{-1}K$

を満たすことが明らかになった。

以上の結果をまとめれば次の定理2が成立することが明らかになる。

定理2　仮定1´、2、3の下で次の関係式が成立する。

(43) $D(\hat{\theta}_O-\theta)$ 及び $D(\hat{\theta}_G-\theta)\Rightarrow\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}H^{-1}K$

上記定理2をもとにすれば、独立変数、誤差項が共に独立に定常AR(1)過程に従うとする2節の結果と比較して、OLS$\hat{\theta}_O$ と GLS$\hat{\theta}_G$ の漸近的性質に関して以下の諸点が明らかになる。

(i)　$\hat{\beta}_{0O}-\beta_0$、$\hat{\beta}_{0G}-\beta_0$ の確率オーダが $O_p\left(\dfrac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$ であるのに対して、$\hat{\beta}_{1O}-\beta_1$、$\hat{\beta}_{1G}-\beta_1$ の確率オーダは $O_p\left(\dfrac{1}{T}\right)$ となる。

(ii)　条件付き分散 (9)、(10) 式及び定理2から明らかになる様に、$D(\hat{\theta}_O-\theta)$、$D(\hat{\theta}_G-\theta)$ の極限分布は共に同一の混合正規分布 $MN\left(0,\ \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\phi^2(1)}H^{-1}\right)$ となる。なお、$D(\hat{\theta}_O-\theta)$ 及び $D(\hat{\theta}_G-\theta)$ の2つの個別の要素について次の関係式が成立することに注意したい[4)]。

(44) $T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{0O}-\beta_0)$ 及び $T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{0G}-\beta_0)$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)} \frac{\int_0^1 P(r)dW_\varepsilon(r)}{\int_0^1 P^2(r)dr}$$

(45) $T(\hat{\beta}_{1O}-\beta_1)$ 及び $T(\hat{\beta}_{1G}-\beta_1)$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_v} \frac{1}{\phi(1)\psi(1)} \frac{\int_0^1 X_c{*}(r)dW_\varepsilon(r)}{\int_0^1 X_c{*}(r)^2dr}$$

ここで、$P(r)$、$X_c{*}(r)$ はそれぞれ

(46) $$P(r)\equiv 1-\frac{\int_0^1 X_c(r)dr}{\int_0^1 X_c(r)^2dr}X_c(r)$$

(47) $$X_c{*}(r)\equiv X_c(r)-\int_0^1 X_c(r)dr$$

である。

以上の諸性質からも明らかになる様に、前節の結果と異なり、独立変数が near $I(1)$ 過程に従い、諸差項がこれとは独立な定常 AR(1) 過程に従う単回帰モデルに於ては OLS$\hat{\theta}_O$ と GLS$\hat{\theta}_G$ は同一の極限混合正規分布に従うことに注意したい。なお特に $c=0$ とすれば上記性質は Phillips and Park [5] の結果と一致する。

Ⅳ 独立変数が $I(d)$ 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従う場合について

最後に独立変数 x_t が非定常な次数 d の和分過程 $I(d)$ 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従い、誤差項 u_t がこれとは独立に定常 AR(1) 過程に従う (1) 式で表わされる単回帰モデルについて考察しよう。ここでも前2節と同様に仮定2、3を設定するが、仮定1、1′に代わって次の仮定1″を設定することにしよう。

4) Frish-Waugh 定理を用いればよい。

仮定1″　$(1-L)^d x_t = e_t \qquad d > \frac{1}{2}$

$$e_t = \psi(L) v_t, \quad \psi(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i L^i$$

$$\psi_0 = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} j \mid \psi_j \mid < \infty$$

$\psi(z) = 0$ の根は単位円外にある。

なお本稿では $d = \frac{1}{2}$ の場合を除外することにする。この場合には以下とは異なる規格化が必要となる。

以下の議論に次の補題2が有効である。

補題2[5]　$F_{d-1}(r)$ を次式で定義される $(d-1)$ 重和分ブラウン運動とする。

$$F_{d-1}(r) = \frac{\sigma_v \psi(1)}{\Gamma(d)} \int_0^r (r-s)^{d-1} dW_v(s) \tag{48}$$

このとき以下の関係式が成立する。

(i)　$\frac{1}{T^{d-\frac{1}{2}}} x_{[Tr]} \Rightarrow F_{d-1}(r)$

(ii)　$\frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^{T} x_t \Rightarrow \int_0^1 F_{d-1}(r) dr$

(iii)　$\frac{1}{T^{2d}} \sum_{t=1}^{T} x_t^2 \Rightarrow \int_0^1 F_{d-1}^2(r) dr$

(iv)　$\frac{1}{T^{d}} \sum_{t=1}^{T} x_t u_t \Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)} \int_0^1 F_{d-1}(r) dW_\varepsilon(r)$

θ のOLS及びGLSを（7）、（8）式と同様に $\hat{\theta}_O$、$\hat{\theta}_G$ と表わし，規格化行列 D を

5）杉原［6］を参照。

(49) $$D=\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}}, & 0 \\ 0, & T^{d} \end{pmatrix}$$

としよう。

先ず OLS$\hat{\theta}_O$ について、(31) 式右辺で表わされる $D(\hat{\theta}_O-\theta)$ の各項について、補題 2 を用いれば次式が成立することがわかる。

(50) $$D^{-1}X'XD^{-1}=\begin{pmatrix} 1, & \frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t \\ *, & \frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^{T}x_t^2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1, & \int_0^1 F_{d-1}(\mathrm{r})dr \\ *, & \int_0^1 F_{d-1}^2(\mathrm{r})dr \end{pmatrix}\equiv H$$

(51) $$D^{-1}X'u=\begin{pmatrix} \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}u_t \\ \frac{1}{T^{d}}\sum_{t=1}^{T}x_t u_t \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\begin{pmatrix} W_\varepsilon(1) \\ \int_0^1 F_{d-1}(\mathrm{r})dW_\varepsilon(\mathrm{r}) \end{pmatrix}\equiv\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}K$$

従って

(52) $$D(\hat{\theta}_O-\theta)\Rightarrow\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}H^{-1}K$$

が成立することが明らかになる。

次に GLS$\hat{\theta}_G$ について、(38) 式右辺で表わされる $D(\hat{\theta}_G-\theta)$ の各項について、補題 2 を用いれば次式が成立する。

(53) $$D^{-1}X'M'MXD^{-1}=$$
$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\phi^2)+(1-\phi)^2(T-1)}{T}, & \frac{(1-\phi^2)x_1+(1-\phi)\sum_{t=2}^{T}(1-\phi L)x_t}{T^{d+\frac{1}{2}}} \\ *, & \frac{(1-\phi^2)\ x_1^2+\sum_{t=2}^{T}((1-\phi L)x_t)^2}{T^{2\mathrm{d}}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi^2(1)H$$

(54) $$D^{-1}X'M'Mu=\left(\begin{array}{c}\dfrac{(1-\phi^2)u_1+(1-\phi)\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t}{T^{\frac{1}{2}}},\\ \dfrac{(1-\phi^2)x_1u_1+\sum_{t=2}^{T}((1-\phi L)x_t)\varepsilon_t}{T^d}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \phi(1)\sigma_\varepsilon K$$

従って

(55) $$D(\hat{\theta}_G-\theta)\ \Rightarrow\ \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}H^{-1}K$$

が成立することが明らかになる。

従って以上の結果より次の定理3が成立することが明らかになる。

定理3 仮定1″、2、3の下で次の関係式が成立する。

(56) $$D(\hat{\theta}_O-\theta)\ \text{及び}\ D(\hat{\theta}_G-\theta)\ \Rightarrow\ \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}H^{-1}K$$

上記定理3をもとにすれば、2、3節の場合と異なり、OLS$\hat{\theta}_O$、GLS$\hat{\theta}_G$の漸近的性質に関して以下の諸点が明らかになる。

(i) $\hat{\beta}_{0O}-\beta_0$、$\hat{\beta}_{0G}-\beta_0$の確率オーダが$O_p\left(\dfrac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$であるのに対して、$\hat{\beta}_{1O}-\beta_1$、$\hat{\beta}_{1G}-\beta_1$の確率オーダは$O_p\left(\dfrac{1}{T^d}\right)$となる。

(ii) 条件付き分散(9)、(10)式及び定理3より、$D(\hat{\theta}_O-\theta)$及び$D(\hat{\theta}_G-\theta)$の極限分布は共に同一の混合正規分布$MN\left(0,\ \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\phi^2(1)}H^{-1}\right)$となる。なお$D(\hat{\theta}_O-\theta)$及び$D(\hat{\theta}_G-\theta)$の2つの個別の要素について次の関係式が成立する。

(57) $$T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{0O}-\beta_0)\ \text{及び}\ T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{0G}-\beta_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)} \frac{\int_0^1 P(r)dW_\varepsilon(r)}{\int_0^1 P^2(r)dr}$$

(58) $T^d(\hat{\beta}_{1O}-\beta_1)$及び$T^d(\hat{\beta}_{1G}-\beta_1)$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)} \frac{\int_0^1 F_{d-1}^*(r)dW_\varepsilon(r)}{\int_0^1 F_{d-1}^*(r)^2dr}$$

ここで、$P(r)$、$F_{d-1}^*(r)$はそれぞれ

(59) $$P(r) \equiv 1 - \frac{\int_0^1 F_{d-1}(r)dr}{\int_0^1 F_{d-1}(r)^2dr} F_{d-1}(r)$$

(60) $$F_{d-1}^*(r) \equiv F_{d-1}(r) - \int_0^1 F_{d-1}(r)dr$$

である。

以上の諸性質からも明らかになる様に、2節の結果と異なり、この場合にも3節と同様にOLS$\hat{\theta}_O$とGLS$\hat{\theta}_G$は同一の極限混合正規分布に従うことに注意しよう。なお特に$d=1$とした場合がPhillips and Park［5］に他ならない。

V おわりに

本稿では独立変数がnear $I(1)$過程ないし$I(d)$過程($d>\frac{1}{2}$)に従い、誤差項がこれとは独立にAR(1)過程に従う単回帰モデルをとり上げて、OLSとGLSの統計的性質について考察し、特にOLSとGLSの漸近的同等性を明らかにした。(3、4節）この性質は独立変数、誤差項が共に独立に定常過程に従う単回帰モデルに於けるOLSに対するGLSの漸近的有効性と際立った対照をなしている。(2節）但し本節で明らかにした性質は漸近的性質であり、標本の大きさが有限な場合の性質、特にOLSとGLSの小標本特性についてさらに考察する必要があるであろう。この問題については今後の研究課題としたい。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

参考文献

[1] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York.

[2] Choy, K. and Taniguchi, M. (1999), "Stochastic Regression Model with Dependent Disturbances," To appear in *Journal of Time Series Analysis*.

[3] Fuller, W. A. (1996), *Introduction to Statistical Time Series (2 nd ed.)*, John Wiley, New York.

[4] Phillips, P. C. B. (1987), "Towards a Unified Asymptotic Theory for Autoregression," *Biometrika*, 74, 535−547.

[5] Phillips, P. C. B. and Park, J. Y. (1988), "Asymptotic Equivalence of Ordinary Least Squares and Generalized Least Squares in Regression with Integrated Regressors," *Journal of the American Statistical Association*, 83, 111−115.

[6] 杉原左右一 (1998), *Least Squares Estimation of the Regression Model with I (d) Regressor*, 日本統計学会講演報告集.

[7] Tanaka, K. (1996), *Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory*, Jonh Wiley, New York.