包絡分析法と多目的線形計画法

瀬　見　　博

I　はじめに

包絡分析法(Data Envelopment Analysis：以下、DEAと略す)は、複数個の同種のインプットを投入して、複数個の同種のアウトプットを産出する、複数個の同じ業務を遂行している事業体(Decision Making Unit：以下、*DMU*と略す)間の相対的効率性を測定・評価するために、1978年、Charnes, Cooper and Rhodesによって提案された手法である[1)]。その後、DEAは、理論面で一層の精緻化がはかられると同時に、応用面でもさまざまな分野に適用され大きな成果を収めつつある[2)]。

一方、多目的線形計画法(Multiple Objective Linear Programming：以下、MOLPと略す)は、複数個の互いに相競合する目的関数を、与えられた制約条件の下で最適化しなければならない多目的計画問題を解くために開発された手法であり、特に1970年代以降、多基準意思決定問題(Multiple Criteria Decision Making ： MCDM)を分析するための代表的なツールの1つであると考えられてきた。

1) Charnes, A.,Cooper, W. W. and Rhodes, E. (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, No. 6, pp. 429−444.
2) 例えば、Seiford, L. M. (1994), A DEA Bibliography (1978−1992), in Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A.Y. and Seiford, L. M. (eds.), *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology, and Application*, Kluwer Academic Publishers, pp. 437−469を参照されたい。

ところで、DEA と MOLP は、その起源や成り立ち、使用されている用語に大きな違いはあるけれども、技術的な観点から見た場合、極めて類似した手法であると見なすことができる。なぜなら、両モデルとも、ある空間の中で、効率的な点を見つけだし、その情報に基づいて非効率的な点の改善をはかることを目的としている手法であると解釈できるからである。したがって、これまで個々別々に展開されてきた2つの手法の関連性を解明することは、それぞれの理論の発展に正の相乗効果をもたらす可能性があると考えられるため、十分に意義がある。しかし、DEA と MOLP の関連性を本格的に論じた研究は、いまのところごく少数に限られているように思われる[3)]。

そこで、本稿では、DEA と MOLP の関係を明らかにするための1つの試みとして、Joro, Korhonen and Wallenius[4)] を取りあげ、それに基づきながら、DEA のインプット指向型 *CCR* モデルと MOLP の参考点モデルの構造上の類似性を比較・検討してみることにする。

II DEA のインプット指向型 *CCR* モデル

いま、分析対象である事業体の数が n 個あり、それを $DMU_j, (j=1, \ldots\ldots, n)$ で表すことにする。また、各 DMU_j は m 種類のインプット $i, (i=1, \ldots\ldots, m)$ をそれぞれ x_{ij} 単位投入することによって、t 種類のアウトプット $r, (r=1, \ldots\ldots, t)$

3) 両手法の関係を論じた研究として、例えば、Golany, B. (1988), An Interactive MOLP Procedure for the Extension of DEA to Effectiveness Analysis, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 39, No. 8, pp. 725−734.：Kornbluth, J. S. H. (1991), Analysing Policy Effectiveness Using Cone Restricted Data Envelopment Analysis, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 42, No. 12, pp. 1097−1104.：Belton, V. and Vickers, S. P. (1993), Demystifying DEA-A Visual Interactive Approach Based on Multiple Criteria Analysis, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 44, No. 9, pp. 883−896.：Doyle, J. and Green, R. (1993), Data Envelopment Analysis and Multiple Criteria Decision Making, *Omega*, Vol. 21, No. 6, pp. 713−715.：Stewart, T. J. (1996), Relationships between Data Envelopment Analysis and Multicriteria Decision Analysis, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 47, No. 5, pp. 654−665 などをあげることができる。

4) Joro, T., Korhonen, P. and Wallenius, J. (1998), Structural Comparison of Data Envelopment Analysis and Multiple Objective Linear Programming, *Management Science*, Vol. 44, No. 7, pp. 962−970.

をそれぞれ y_{rj} 単位産出しているものとしよう。このとき、測定されるインプット項目とアウトプット項目はともに、すべての DMU_j で共通していることが必要である。しかし、各項目の測定単位は異なっていてもよい。さらに、x_{ij}, y_{rj} の値は観測可能で、正の値をとると仮定する。

さて、このような状況下で DMU_j の効率性を、効率性＝アウトプット／インプットにより測定しようとすれば、m 種類のインプット i と t 種類のアウトプット r を、何らかの方法により、それぞれ単一の仮想的インプットと単一の仮想的アウトプットに変換しなければならない。このとき通常よく用いられるのが加重和をとる方法である。すなわち、

$$\text{効率性} = \sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}, \quad j=1, \ldots\ldots, n \tag{1}$$

で示されるように、インプット値の加重和とアウトプット値の加重和を求め、その比を効率性の測定尺度と見なすのである。ここに、v_i と u_r はインプット i とアウトプット r に付与される加重値である。

ところで、（1）式が意味を持つためには、これらの加重値を確定しなければならない。しかし、すべての DMU_j に共通した公平な加重値を求めることは極めて難しい。

Charnes, Cooper and Rhodes は、かかる問題を解決するために次のような方法を提案している。すなわち、いま効率性の評価がなされる特定の事業体を DMU_o であるとしたとき、

1） すべての DMU_j の効率性を 1 以下に抑えながら、DMU_o の効率性が最大になるように、DMU_o に対する v_i と u_r の値を、

$$Max \quad h_o = u^T y_o \,/\, v^T x_o \tag{2}$$

$$s.t. \quad u^T y_j \,/\, v^T x_j \leq 1, \quad j=1, \ldots\ldots, n \tag{3}$$

$$v \geq 0, \quad u \geq 0 \tag{4}$$

の分数計画モデルを解くことによって定め、DMU_oの効率性を評価する、

2） DMU_o 以外の DMU_j の効率性を、1）で求めた v_i と u_r の値を用いること

により計算する、

というものである。そして、上記1)、2)の手続を評価対象である n 個のすべての DMU_j に対して実行する。ここに、$x_j=(x_{1j},\ldots\ldots,x_{mj})^T$, $y_j=(y_{1j},\ldots\ldots,y_{tj})^T$, $v=(v_1,\ldots\ldots,v_m)^T$, $u=(u_1,\ldots\ldots,u_t)^T$ である。このようにすれば、各 DMU_j がそれぞれ独自の価値判断システムに基づいて、自己に最も都合のよい固有の加重値を合理的に決定することができ、すべての DMU_j の効率性の相対的評価が可能となる。

分数計画モデルの目的関数 h_o の値は、DMU_o が他の DMU_j と比較して効率的であると見なされる場合には $h_o=1$、そうでない場合には $h_o<1$ となる。さらに、$h_o<1$ と判定された DMU_o に対しては、それを非効率的と判断させた別の効率的な DMU_j が存在していることになる。かかる効率的な DMU_j の集合を DMU_o に対する参照集合 (reference set) という。また、参照集合に属する DMU_j の張る凸集合を有効フロンティア(efficient frontier)とか包絡面(envelopment surface)と呼ぶ。

さて、(2)~(4)式の分数計画モデルは、それと同値の線形計画モデル(5)~(8)式に変換することができる。これを、乗数形式(multiplier form)のインプット指向型 CCR モデル(以下、CCR_P-I と略す) という。また、CCR_P-I の双対モデルは包絡形式(envelopment form)のインプット指向型 CCR モデル(以下、CCR_D-I と略す)と呼ばれ、θ と $\lambda=(\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda_n)^T$ を双対変数とすれば、(9)~(12)式で表すことができる。

<CCR_P-I>

$$\begin{aligned} Max \quad & w_o=u^Ty_o && (5)\\ s.t. \quad & v^Tx_o=1 && (6)\\ & u^TY-v^TX\leq 0 && (7)\\ & v^T\geq \varepsilon e,\ u^T\geq \varepsilon e && (8) \end{aligned}$$

<CCR_D-I>

$$\begin{aligned} Min \quad & z_o=\theta-\varepsilon(es^++es^-) && (9)\\ s.t. \quad & \theta x_o-s^+=X\lambda && (10)\\ & Y\lambda-s^-=y_o && (11)\\ & \lambda,\ s^+,\ s^-\geq 0 && (12) \end{aligned}$$

ここに、$X=(x_1,\ldots\ldots,x_n)\in R^{m\times n}$, $Y=(y_1,\ldots\ldots,y_n)\in R^{t\times n}$, $s^+=(s_1^+,\ldots\ldots,s_m^+)^T$, $s^-=(s_1^-,\ldots\ldots,s_t^-)^T$, $e=(1,\ldots\ldots,1)$ であり、θ には符号制約がない。なお、

非アルキメデス無限小定数と呼ばれる非常に小さな正数 ε が上記モデルに組み込まれているが、この ε の存在によって、CCR_P-I では、すべての加重値を正に保つことが可能となり、CCR_D-I では、DMU_o の効率性を計算する際に、最適な目的関数値がスラック変数に割り当てられる値によって影響されるのを防ぐことができる。

ところで、CCR モデルでは、事業体のインプット値 $x \in R^m$ とアウトプット値 $y \in R^t$ の対 (x, y) がとり得る実行可能領域 P として、

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, \ y \leq Y\lambda, \ \lambda \geq 0\} \tag{13}$$

を想定している。ここに、P は生産可能集合と呼ばれる。したがって、この P を前提にすれば、CCR_D-I は、DMU_o の現在のアウトプット値 y_o を最低限保証しながら、それが達成できる最小のインプット値 θx_o を P の中で求めることを意図したモデルであると解釈することができる。また、θ は効率性改善のために DMU_o のすべてのインプット値に適用される縮小率であると見なすことができる。

DMU_o は、CCR_D-I の最適解が $\theta=1$ かつ $s^+=s^-=0$ であるとき、あるいは、CCR_P-I の最適解が $w_o=1$ となるときにのみ効率的である。DMU_o が非効率的と判断される場合には $\theta<1$，$w_o<1$ となる。また、非効率的であると判定された DMU_o に対する参照集合 E_o は、

$$E_o = \{j \mid \lambda_j > 0, \ j = 1, \ldots\ldots, n\} \tag{14}$$

で与えられる。さらに、非効率的な DMU_o は、(10), (11)式を用いて、インプット値 x_o を $\theta x_o - s^+$ に、アウトプット値 y_o を $y_o + s^-$ に変更することにより、効率的な DMU_o へと改善できることがわかる。

III　MOLP の参考点モデル

一般に、多目的線形計画問題は次のように定式化できる。

$$Max \quad v = Cx \tag{15}$$

$$s.t. \quad x \in X = \{x \mid Ax \leq b, \ x \geq 0\} \tag{16}$$

ここに、$x \in R^n$ は決定変数ベクトル、$b \in R^m$ は右辺定数値ベクトル、$A \in R^{m \times n}$ は投入係数行列、$C \in R^{t \times n}$ は目的関数の係数行列である。このとき、(15), (16)式は、m 個の制約条件と n 個の非負条件を満たす実行可能領域の中で、t 個のすべての目的関数を同時に最大化する n 個の決定変数の値を求める問題であると理解することができる。しかし、通常、t 個の目的関数を同時にすべて最大にするような完全最適解(perfect optimal solution)は見いだせない。なぜなら、多くの場合、各目的間にはコンフリクトや非通約性が存在しているからである。したがって、多目的線形計画問題では完全最適解にかわって、まず、パレート最適解(Pareto optimal solution)、有効解(efficient solution)、非劣解(non-inferior solution)、非優越解(non-dominated solution)などと呼ばれる解の集合が解析的に導きだされ、次にその中から意思決定者の主観的価値判断に基づいて選好解(preferred solution)、最良妥協解(best compromise solution)が決定されるという2段階の手順を踏んで解が求められることになる。

パレート最適解の概念は目的関数ベクトルを用いて、以下のように定義することができる。

[定義1] (15), (16)式において、$Cx \geq Cx^*$ かつ $Cx \neq Cx^*$ であるような別の $x \in X$ が存在しないとき、$x^* \in X$ はパレート最適解である。

[定義2] (15), (16)式において、$Cx > Cx^*$ であるような別の $x \in X$ が存在しないとき、$x^* \in X$ は弱パレート最適解(weak Pareto optimal solution)である。

ここで、$V = \{v = Cx \mid x \in X\}$ を、実行可能な目的関数ベクトルの集合であるとしよう。このとき、パレート最適解(弱パレート最適解)に対応するベクトル $v \in V$ を非優越目的関数ベクトル(弱非優越目的関数ベクトル)、また、すべてのパレート最適解(弱パレート最適解)の集合をパレート最適集合(弱パレート最適集合)、すべての非優越目的関数ベクトル(弱非優越目的関数ベクト

ル)の集合を非優越集合(弱非優越集合)と呼ぶことにする。

さて、多目的計画法の分野では、従来から、パレート最適集合あるいは非優越集合を導きだすために、さまざまなタイプの手法が考案されてきた。その代表的なものとして、スカラー化手法(例えば、重みづけ法(weighting method)、ε 制約法(ε constraint method)など)や対話型手法(例えば、代理価値トレード・オフ法(surrogate worth trade-off method)、Geoffrion-Dyer-Feinberg 法、Zionts-Wallenius 法など)をあげることができる。それらの中で、Wierzbicki は参考点法(reference point method)と呼ばれる対話型方法を提案している[5)]。それは、1)t 個の目的関数のそれぞれに対して意思決定者が参考点(希求水準)を設定する、2)設定された参考点に対して、意思決定者の価値観を反映した達成度スカラー化関数(achievement scalarizing function)を最適化することにより、パレート最適解とそれに対応する目的関数値を求める、3)それが意思決定者に受けいれられなければ、その時点で得られている目的関数の達成水準を考慮しながら、対話的に次々と参考点を変更していく、という一連の手順を、最終的に満足できるパレート最適解が見いだされるまで繰り返すという手法である。

いま、具体的な達成度スカラー化関数 $s(g, v, w, \rho)$ の形として、

$$s(g, v, w, \rho)=\left\{\underset{i\in T}{Max}\left[(g_i-v_i)\big/w_i\right]+\rho\sum_{i=1}^{t}(g_i-v_i)\right\} \tag{17}$$

を用いることにしよう。このとき、以下の定理1と定理2から、次の問題(18),(19)式を解くことによりパレート最適解を導きだせることがわかっている[6)]。

5) Wierzbicki, A. P. (1980), The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization, in Fandel, G. and Gal, T. (eds.), *Multiple Criteria Decision Making, Theory and Application*, Springer-Verlag, pp. 468－486. : Wierzbicki, A. P. (1999), Reference Point Approaches, in Gal, T., Stewart, T. J. and Hanne, T. (eds.), *Multicriteria Decision Making : Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, pp. 9-1～9-39.

6) 定理1と2については、例えば、Joro, Korhonen and Wallenius, *op. cit.*, p. 964 や、Korhonen, P. (1997), Reference Direction Approach to Multiple Objective Linear Programming : Historical Overview, in Karwan, M. H., Spronk, J. and Wallenius, J. (eds.), *Essays in Decision Making*, Springer-Verlag, p. 77などを参照されたい。

$$Min \quad s(g, v, w, \rho) \tag{18}$$

$$s.t. \quad V = \{v = Cx \mid x \in X\} \tag{19}$$

ここに、$w(w>0,\ w \in R^t)$ は加重値ベクトル、$\rho>0$ はスカラー、$T=\{1, \ldots\ldots, t\}$ である。また、ベクトル $g \in R^t$ は目的関数空間における所与の点（参考点）であり、その要素は希求水準と呼ばれる。さらに、$v \in V$ である。

［定理１］$w>0$ を任意のベクトルとする。$v^* = Cx^*$ が(18), (19)式の解であるような $g \in R^t$ と $\rho>0$ が存在するとき、点 $x^* \in X$ はパレート最適解である。$x^* \in X$ がパレート最適解であれば、$g = v^*$ のとき、$v^* = Cx^*$ が(18), (19)式の解であるような $\rho>0$ が存在する。そのとき、$s(g, v, w, \rho)$ の最適値は０になる。

［定理２］$w>0$ を任意のベクトルとする。$v^* = Cx^*$ が(18), (19)式の解であるような $g \in R^t$ と $\rho \geq 0$ が存在するとき、点 $x^* \in X$ は弱パレート最適解である。$x^* \in X$ が弱パレート最適解であれば、$g = v^*$ かつ $\rho = 0$ のとき、$v^* = Cx^*$ は(18), (19)式の解である。そのとき、$s(g, v, w, 0)$ の最適値は０になる。

以上から、(17)～(19)式を用いることによって、任意の所与の点 $g \in R^t$ を、それが実行可能であろうとなかろうと、非優越集合上に射影することができる。

ところで、参考点 $g \in R^t$ を所与としたとき、$s(g, v, w, \rho)$ の最小値は、以下の線形計画問題を解くことによって求められる。

$$Min \quad \theta + \rho \sum_{i=1}^{t} (g_i - v_i) \tag{20}$$

$$s.t. \quad \theta \geq (g_i - C_i x) / w_i, \ \ i = 1, \ldots\ldots, t \tag{21}$$

$$x \in X, \ \ x \geq 0 \tag{22}$$

ここに、C_i, $(i = 1, \ldots\ldots, t)$ は目的関数係数行列 C の i 行目の要素である。さらに、(20)～(22)式は、次のように書き直すことができる。

$$Min \quad \theta+\rho\sum_{i=1}^{t}(g_i-v_i) \tag{23}$$

$$s.t. \quad Cx+\theta w-s^-=g \tag{24}$$

$$x\in X \tag{25}$$

$$x,\ s^-\geq 0 \tag{26}$$

ところで、$\theta w_i-s_i^-=g_i-C_ix$, $(i=1,\ldots\ldots,t)$から、目的関数(23)式は、

$$\theta+\rho\sum_{i=1}^{t}(g_i-v_i)=\theta+\rho\sum_{i=1}^{t}(\theta w_i-s_i^-)=\theta(1+q\rho)-\rho\sum_{i=1}^{t}s_i^-$$

$$=(1+q\rho)[\theta-\frac{\rho}{1+q\rho}\sum_{i=1}^{t}s_i^-]$$

と表せる。ただし、$q=\sum_{i=1}^{t}w_i$ である。

したがって、$\delta=\rho/(1+q\rho)>0$ とおくことによって、(17)～(19)式で与えられる元の問題は、

$$Min \quad \theta-\delta es^- \tag{27}$$

$$s.t. \quad Cx+\theta w-s^-=g \tag{28}$$

$$Ax+s^+=b \tag{29}$$

$$x,\ s^-,\ s^+\geq 0,\ \delta>0 \tag{30}$$

を解くことと同値であることがわかる。ただし、θ には符号制約はない。以下、これを参考点モデルと呼ぶことにする。

Ⅳ　インプット指向型 CCR モデルと参考点モデルの構造上の比較

CCR_D-I モデル(9)～(12)式と参考点モデル(27)～(30)式の構造を比較するため、参考点モデルを、新たに、n 個の DMU_j が、m 種類の共通のインプット(資源)を用いて、最大化されるべき t 種類のアウトプットを生産するという状

況を表すモデルであると解釈し直すことにする。そこで、参考点モデルの記号を、CCR_D-I モデルの記号と一致させるために、$C \to Y$，$A \to X$，$x \to \lambda$ に変更することにしよう。その結果、参考点モデルは以下のように書き直すことができる。

$$Min \quad \theta - \delta e s^- \tag{31}$$
$$s.t. \quad X\lambda + s^+ = b \tag{32}$$
$$Y\lambda + \theta w - s^- = g \tag{33}$$
$$\lambda,\ s^-,\ s^+ \geq 0,\ \delta > 0 \tag{34}$$

これを CCR_D-I モデル(9)～(12)式と比較してみると、目的関数に es^+ が含まれていない点、また、θx_0 が b に、y_0 が $g-\theta w$ に変更されている点を除けば、形式上、参考点モデルと CCR_D-I モデルは極めて類似した構造を持っていることがわかる。さらに、構造上の類似性は参考点モデル(31)～(34)式の双対形(35)～(38)式と CCR_P-I モデル(5)～(8)式を対比させることにより一層明瞭になる。

$$Max \quad u^T g - v^T b \tag{35}$$
$$s.t. \quad u^T w = 1 \tag{36}$$
$$u^T Y - v^T X \leq 0 \tag{37}$$
$$v^T \geq 0,\ u^T \geq \delta e \tag{38}$$

ここに、$u=(u_1, \ldots\ldots, u_t)^T$, $v=(v_1, \ldots\ldots, v_m)^T$ は双対変数である。

以上から、$b=x_o$，$g=y_o$ とおき、$w>0$ をさまざまに変化させれば、参考点モデル(31)～(34)式を用いて、DMU_j の効率性を CCR モデルと同様に評価できることがわかる。その際、目的関数(31)式に es^+ が含まれていないため、CCR_D-I モデルで非効率的であると判断された DMU_j が、参考点モデルでは効率的であると判定される可能性がある。そこで、かかる事態を避けるために、例えば、(31)式に es^+ を加えて、目的関数を

$$\theta-\delta(es^{-}+es^{+}) \tag{39}$$

に変更するといった工夫が必要になる。

V　おわりに

DEAとMOLPは、技術的な分析手順が非常に似通っているにもかかわらず、両者の関係についてこれまであまり議論されることはなかった。そこで、本稿では、DEAとMOLPの類似性を明らかにするために、Joro, Korhonen and Walleniusに依拠しながら、DEAのインプット指向型*CCR*モデルとMOLPの参考点モデルを取りあげ、それらが構造的に極めて類似していることを指摘した。しかし、形式的に見た構造上の類似性は確認されたが、それがいかなる意味を持つのかといった実質的な関連性については言及できなかった。また、インプット指向型*CCR*モデルと参考点モデル以外の他のモデル間の類似性についても検討する必要があるだろう。それらが、今後に残された課題である。

（筆者は関西学院大学商学部教授）