# 独立変数が非定常フラクショナル過程に従うSURモデルの特定化誤差問題について

杉　原　左右一

## I　はじめに

周知の様に$I(d)$過程（$d>\frac{1}{2}$）は特に非定常時系列分析に重要な役割を果たすものであるが、本稿では独立変数が$I(d)$過程（$d>\frac{1}{2}$）に従うSURモデル（Seemingly Unrelated Model）をとりあげて、特に切片項に関する特定化誤差問題について考察することにしたい。

以下まずII節で本稿で取り扱う基本モデルと仮定について述べた後、III節では真のモデルが切片項を含まないSURモデルであるにも拘わらず誤ってこれを含めて推定する特定化誤差問題を、またIV節では逆に真のモデルが切片項を含むSURモデルであるにも拘わらず誤ってこれを除外して推定する特定化誤差問題を取りあげて、それぞれの場合について特に推定量の漸近的挙動を中心に考察することにしたい。最後のV節は本稿のまとめにあてられる。

## II　モデルと仮定

$y_{1t}$、$y_{2t}$を従属変数、$x_{1t}$、$x_{2t}$を確率的独立変数、$u_{1t}$、$u_{2t}$を誤差項として、次式で表わされる切片項を含まないSURモデル（Seemingly Unrelated Model）、及び切片項を含むSURモデルを考える。

（1）$y_{it}=\beta_i x_{it}+u_{it}\qquad i=1,2\quad t=1,2,\cdots,T$

（2）$y_{it}=\alpha_i+\beta_i x_{it}+u_{it}\quad i=1,2\quad t=1,2,\cdots,T$

但し、$\alpha_i$、$\beta_i$はそれぞれ切片項及び傾きを表わすパラメータであり、確率的独

立変数及び誤差項が満たすべき仮定については後述することにする。

以後の分析の便宜のためにここで次の諸記号を定義することにしよう。

(3) $y=(y_1',y_2')'$, $y_1=(y_{11},y_{12},\cdots,y_{1T})'$, $y_2=(y_{21},y_{22},\cdots,y_{2T})'$

$$X=\begin{pmatrix} i & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1T})' \\ x_2=(x_{21},x_{22},\cdots,x_{2T})' \end{array}$$

$X_i=(i,x_i)$ $\quad i=(1,1,\cdots,1)'$

$\theta=(\theta_1',\theta_2')'$ $\quad \theta_1=(\alpha_1,\beta_1)',\theta_2=(\alpha_2,\beta_2)'$

$\alpha=(\alpha_1、\alpha_2)',\beta=(\beta_1,\beta_2)'$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$u=(u_1',u_2')',u_1=(u_{11}、u_{12}、\cdots、u_{1T})',u_2=(u_{21},u_{22},\cdots,u_{2T})'$

そうすれば上記記号を用いて、(1)、(2)式をそれぞれ(4)、(5)式の様に簡潔に表現することが出来る。

(4) $y=x\beta+u$

(5) $y=X\theta+u$

さてSURモデルに本稿では以下の仮定1、2を設定することにする。但し$L$はラグ演算子を意味する。

**仮定1**

$$(1-L)^{d_i}x_{it}=\omega_{it},\omega_{it}=\psi_i(L)\varepsilon_{it},\ d_i>\frac{1}{2}$$

$$\psi_i(L)=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_{ij}L^j(\psi_{i0}=1),\ \sum_{j=0}^{\infty}j\,|\psi_{ij}|<\infty,$$

$\psi_i(z)=0$の根は単位円外にある。$x_{is}=0$ $(s\leqq 0)$ $(i=1,2)$

**仮定2**

$\varepsilon_t=(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t})'\sim IID\,(0,\Sigma_\varepsilon)$, $\quad \Sigma_\varepsilon=\mathrm{Diag}(\sigma_{\varepsilon 11},\sigma_{\varepsilon 22})$

$$u_t=(u_{1t},u_{2t})'\sim IID\,(O,\Sigma_u),\quad \Sigma_u=\begin{pmatrix} \sigma_{u11} & \sigma_{u12} \\ \sigma_{u21} & \sigma_{u22} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{it}$と$u_{js}$は互いに独立である。

仮定1で$x_{1t}$、$x_{2t}$は$d_1$、$d_2>\frac{1}{2}$を満たす非定常フラクショナル過程である。本稿では特に$d_1=d_2=\frac{1}{2}$の場合を除外していることに注意したい。この場合には下記とは異なった規格化が必要である。仮定2で$\varepsilon_t$と$u_t$が系列的相関構造を持つ場合への拡張も可能であるが、分析がより複雑なものとなるため本稿ではひとまず上記仮定2を設定することにする。

以上の準備の下に、本稿ではSURモデルの切片項の特定化誤差問題について以下の2種類のケースを考えることにしよう。

**ケース1**

真のモデルが切片項を含まない

(6) $y=x\beta+u$

であるにも拘わらず、誤って切片項$\alpha$を含めて推定する場合。

**ケース2**

真のモデルが切片項を含む

(7) $y=X\theta+u$

であるにも拘わらず、誤って切片項$\alpha$を除外して推定する場合。

本稿では上記2ケースについて、推定量の漸近的挙動を中心に考察することにしたい。そのために次の補題が有効である。

**補題**

$x_{iT}(r)$（$0\leqq r\leqq 1$）を次式で定義される部分和過程とする。

(8) $$x_{iT}(r)=T^{-\left(d_i-\frac{1}{2}\right)}x_{it}+T(r-T^{-1})T^{-\left(d_i-\frac{1}{2}\right)}(x_{it}-x_{it-1})$$

$$(i=1,2,\ T^{-1}(t-1)\leqq rT^{-1}t,\ t=1,2,\cdots,T)$$

そうすれば次式が成立する。但し$F_{d_i-1}(r)$は（$d_i-1$）重和分ブラウン運動である。また$W_{\varepsilon i}(s)$、$W_{uj}(r)$は互いに独立なブラウン運動である。($i,j=1,2$)

(9) $$x_{iT}(r)\to F_{d_i-1}(r)\equiv\frac{\Psi_i(1)}{\Gamma(d_i)}\int_0^r(r-s)^{d_i-1}dW_{\varepsilon i}(s)$$

$$T^{-\left(d_i+\frac{1}{2}\right)}\sum_{t=1}^{T}x_{it}\to\int_0^1 F_{d_i-1}(r)dr$$

$$T^{-2d_i}\sum_{t=1}^{T}x_{it}^2 \to \int_0^1 F_{d_i-1}^2(r)dr$$

$$T^{-(d_1+d_2)}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t} \to \int_0^1 F_{d_1-1}(r)F_{d_2-1}(r)dr$$

$$T^{-d_i}\sum_{t=1}^{T}x_{it}u_{jt} \to \int_0^1 F_{d_i-1}(r)dW_{uj}(r)$$

上記補題については Sugihara［2］、Tanaka［3］を参照されたい。

## Ⅲ 切片項の特定化誤差問題（ケース１）

まずモデル $y=x\beta+u$ を正しく用いた場合の β の OLS $\hat{\beta}_{1TO}$ 及び実行可能 GLS $\hat{\beta}_{1TG}$ をそれぞれ次式で定義しよう。

(10) $\hat{\beta}_{1TO}=(x'x)^{-1}x'y$

(11) $\hat{\beta}_{1TG}=(x'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}x)^{-1}x'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}y$

ここで（11）式の $\hat{\Sigma}_u$ は、各方程式の OLS 残差をもとにして次の様にして求められるものである。即ち、まず各方程式毎に $\beta_i$ の OLS $\hat{\beta}_{i1TO}$ を求める。

(12) $\hat{\beta}_{i1TO}=(x_i'x_i)^{-1}x_i'y_i$

次に、$M_i$ を

(13) $M_i=I_T-x_i(x_i'x_i)^{-1}x_i'$

として OLS 残差ベクトル $\hat{u}_i$ を求めれば、

(14) $\hat{u}_i=M_iy_i=M_iu_i$

となる。そこで $\sigma_{uii}$、$\sigma_{uij}$ を次式により推定しよう。

(15) $\hat{\sigma}_{uii}=(T-2)^{-1}\hat{u}_i'\hat{u}_i$

(16) $\hat{\sigma}_{uij}=(T-2)^{-1}\hat{u}_i'\hat{u}_j$

そうすれば $\hat{\Sigma}_u$ は

(17) $\hat{\Sigma}_u=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{u11} & \hat{\sigma}_{u12}\\ \hat{\sigma}_{u21} & \hat{\sigma}_{u22}\end{pmatrix}$

で与えられる。

そこで OLS $\hat{\beta}_{1TO}$ と実行可能 GLS $\hat{\beta}_{1TG}$ の漸近的挙動について考察しよう。

規格化行列 $D$ を

(18) $D=\mathrm{Diag}(T^{d_1},T^{d_2})$

とすれば、OLS $\hat{\beta}_{1TO}$ について

(19) $D(\hat{\beta}_{1TO}-\beta)'=(D^{-1}x'xD^{-1})^{-1}D^{-1}x'u$

となる。ここで上記補題を用いれば、

(20) $$D^{-1}x'xD^{-1}=\mathrm{Diag}\left(T^{-2d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}^2,T^{-2d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}^2\right)$$
$$\rightarrow\mathrm{Diag}\left(\int_0^1 F_{d_1-1}^2(r)dr,\int_0^1 F_{d_2-1}^2(r)dr\right)\equiv H_1$$

(21) $$D^{-1}x'u=\left(T^{-d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{1t},T^{-d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{2t}\right)'$$
$$\rightarrow\left(\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dW_{u1}(r),\int_0^1 F_{d_2-1}(r)dW_{u2}(r)\right)'\equiv K_1$$

となる。従って

(22) $D(\hat{\beta}_{1TO}-\beta)'\rightarrow H_1^{-1}K_1$

が成立することが分かる。

次に（11）式で与えられる実行可能GLS $\hat{\beta}_{1TG}$ の漸近的挙動について考察しよう。そのためにまず（11）式の $\hat{\Sigma}_u$ の漸近的性質について調べよう。補題を用いれば $\hat{\sigma}_{uii}$, $\hat{\sigma}_{uij}$ について次式が成立することが分かる。

(23) $$\hat{\sigma}_{uii}=(T-2)^{-1}u_i'M_i\,u_i$$
$$=(T-2)^{-1}\left\{u_i'u_i-(T^{-d_i}x_i'u_i)(T^{-2d_i}x_i'x_i)^{-1}(T^{-d_i}x_i'u_i)\right\}\rightarrow\sigma_{ii}$$

(24) $$\hat{\sigma}_{uij}=(T-2)^{-1}u_i'M_i\,M_j\,u_j$$
$$=(T-2)^{-1}\Big\{u_i'u_j-(T^{-d_j}x_j'u_i)'(T^{-2d_j}x_j'x_j)^{-1}(T^{-d_j}x_j'u_j)'$$
$$-(T^{-2d_i}x_i'u_i)'(T^{-2d_i}x_i'x_i)^{-1}(T^{-d_i}x_i'u_j)'$$
$$+(T^{-d_i}x_i'u_i)'(T^{-2d_i}x_i'x_i)^{-1}(T^{-(d_i+d_j)}x_i'x_j)(T^{-2d_j}x_j'x_j)^{-1}(T^{-d_j}x_j'u_j)\Big\}$$
$$\rightarrow\sigma_{ij}$$

従って

(25) $\hat{\Sigma}_u \to \Sigma$

となり、$\hat{\Sigma}_u$ が $\Sigma_u$ の一致推定量となっていることが分かるのである。

さて (18) 式で与えられる規格化行列 $D$ を用いれば

(26) $D(\hat{\beta}_{1TG}-\beta)=(D^{-1}x'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}xD^{-1})^{-1}D^{-1}x'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}u$

と表わせることに注意しよう。ここで補題を用いれば次式が成立することが分かる。

(27) $D^{-1}x'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}xD^{-1}$

$$=\hat{k}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{u22}T^{-2d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}^2, & -\hat{\sigma}_{u12}T^{-(d_1+d_2)}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t} \\ -\hat{\sigma}_{u21}T^{-(d_1+d_2)}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}, & \hat{\sigma}_{u11}T^{-2d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}^2 \end{pmatrix}$$

$$\to k\begin{pmatrix} \sigma_{u22}\int_0^1 F_{d_1-1}^2(r)dr, & -\sigma_{u12}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)F_{d_2-1}(r)dr \\ -\sigma_{u21}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)F_{d_2-1}(r)dr, & \sigma_{u11}\int_0^1 F_{d_2-1}^2(r)dr \end{pmatrix}\equiv H_2$$

(28) $D^{-1}x'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}u$

$$=\hat{k}\Bigg(\hat{\sigma}_{u22}T^{-d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{1t}-\hat{\sigma}_{u12}T^{-d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{2t},$$

$$-\hat{\sigma}_{u12}T^{-d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{1t}+\hat{\sigma}_{u11}T^{-d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{2t}\Bigg)'$$

$$\to k\Bigg(\sigma_{u22}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dW_{u1}(r)-\sigma_{u12}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dW_{u2}(r),$$

$$-\sigma_{u12}\int_0^1 F_{d_2-1}(r)dW_{u1}(r)+\sigma_{u11}\int_0^1 F_{d_2-1}(r)dW_{u2}(r)\Bigg)'\equiv K_2$$

但し、上式で $\hat{k}$、$k$ は

(29) $\hat{k}=|\hat{\Sigma}_u|^{-1},\quad k=|\Sigma_u|^{-1}$

である。

従って

(30) $D(\hat{\beta}_{1TG}-\beta)\to H_2^{-1}K_2$

が成立することが分かるのである。

次に誤ってモデルに切片項を加えて

(31) $y=X\theta+u$

として$\theta$を推定した場合の特定化誤差問題について考察しよう。本稿では次式で表わされる$\theta$のOLS $\hat{\theta}_{1FO}$と実行可能GLS $\hat{\theta}_{1FG}$の漸近的挙動について考察することにする。

(32) $\hat{\theta}_{1FO}=(X'X)^{-1}X'y$

(33) $\hat{\theta}_{1FG}=(X'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}X)^{-1}X'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}y$

但し (33) 式の$\hat{\Sigma}_u$は前述と同様にして各方程式のOLS残差をもとに次の様にして求められるものである。まず$\theta_{iF}$のOLSを$\hat{\theta}_{i1FO}$とすれば

(34) $\hat{\theta}_{i1FO}=(X_i'X_i)^{-1}X_i'y_i$

となる。次に行列$M_i$を

(35) $M_i=I_T-X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'$

としてOLS残差を求めれば

(36) $\hat{u}_i=M_i y_i=M_i u_i$

となる。そこで前述と同様にして$\hat{\sigma}_{uii}, \hat{\sigma}_{uij}$を次式により求める。

(37) $\hat{\sigma}_{uii}=(T-2)^{-1}\hat{u}_i'\hat{u}_i$

(38) $\hat{\sigma}_{uij}=(T-2)^{-1}\hat{u}_i'\hat{u}_j$

上式をもとに$\hat{\Sigma}_u$は

(39) $\hat{\Sigma}_u=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{u11} & \hat{\sigma}_{u12}\\ \hat{\sigma}_{u21} & \hat{\sigma}_{u22}\end{pmatrix}$

で与えられるものである。

さてOLS $\hat{\theta}_{1FO}$と実行可能GLS $\hat{\theta}_{1FG}$の漸近的挙動について考察しよう。規格化行列$D$を

(40) $D=\mathrm{Diag}(T^{\frac{1}{2}},T^{d_1},T^{\frac{1}{2}},T^{d_2})$

とすれば、まずOLS $\hat{\theta}_{1FO}$について

(41) $D(\hat{\theta}_{1FO}-(0,\beta_1,0,\beta_2)')=(D^{-1}X'XD^{-1})^{-1}D^{-1}X'u$

となる。ここで補題を用いれば、

$$(42)\quad D^{-1}X'XD^{-1}=\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1, & T^{-\left(d_1+\frac{1}{2}\right)}\sum_{t=1}^{T}x_{1t} \\ T^{-\left(d_1+\frac{1}{2}\right)}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}, & T^{-2d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}^2 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1, & T^{-\left(d_2+\frac{1}{2}\right)}\sum_{t=1}^{T}x_{2t} \\ T^{-\left(d_2+\frac{1}{2}\right)}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}, & T^{-2d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}^2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathrm{Diag}(H_{11}、H_{22})\equiv H_3$$

となる。但し $H_{ii}(i=1,2)$ は以下で与えられる。

$$(43)\quad H_{ii}=\begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 F_{d_i-1}(r)dr \\ \int_0^1 F_{d_i-1}(r)dr, & \int_0^1 F_{d_i-1}^2(r)dr \end{pmatrix}$$

また、

$$(44)\quad D^{-1}X'u=\left(T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}u_{1t}, T^{-d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{1t}, T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}u_{2t}, T^{-d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{2t}\right)'$$

$$\rightarrow\left(W_{u1}(1),\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dW_{u1}(r), W_{u2}(1),\int_0^1 F_{d_2-1}(r)dW_{u2}(r)\right)'\equiv K_3$$

となる。従って次式が成立することが分かるのである。

$$(45)\quad D(\hat{\theta}_{1FO}-(0,\beta_1,0,\beta_2)')\rightarrow H_3^{-1}K_3$$

次に θ の実行可能 GLS $\hat{\theta}_{1FG}$ の漸近的挙動について考察しよう。そのためにまず（33）式の $\hat{\Sigma}_u$ の漸近的性質を調べよう。規格化行列 $D_i$ を

$$(46)\quad D_i=\mathrm{Diag}(T^{\frac{1}{2}},T^{d_1})$$

として、$\hat{\sigma}_{uii}$, $\hat{\sigma}_{uij}$ を次式の様に表わそう。

$$(47)\quad \hat{\sigma}_{uii}=(T-2)^{-1}u_i'M_i u_i$$
$$=(T-2)^{-1}\left\{u_i'u_i-(D_i^{-1}X_i'u_i)(D_i^{-1}X_i'X_i D_i)^{-1}(D^{-1}X_i'u_i)\right\}$$

(48) $\hat{\sigma}_{uij} = (T-2)^{-1} u_i' M_i \, M_j \, u_j$

$$= (T-2)^{-1} \Big\{ u_i' u_i - (D_i^{-1} X_j' u_i)' (D_j^{-1} X_j' X_j \, D_j^{-1})^{-1} (D_j^{-1} X_j' u_j) - (D_i^{-1} X_i' u_i)' (D_i^{-1} X_i' X_i \, D_i^{-1})^{-1} (D_j^{-1} X_i' u_j) + (D_i^{-1} X_i \, u_i)' (D_i^{-1} X_i' X_i \, D_i^{-1})(D_i^{-1} X_i' X_j \, D_j^{-1})(D_j^{-1} X_j \, X_j \, D_j^{-1})^{-1} (D_j^{-1} X_j \, u_j) \Big\}$$

そうすれば補題を用いて

(49) $\hat{\sigma}_{uii} \rightarrow \sigma_{uii}, \quad \hat{\sigma}_{uij} \rightarrow \sigma_{uij}$

が成立し、

(50) $\hat{\Sigma}_u \rightarrow \Sigma_u$

となることが分かるのである。

さてこの場合にも上述と同様にすれば

(51) $D(\hat{\theta}_{1FG} - (0,\beta_1,0,\beta_2)') = (D^{-1} X' (\hat{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} X D^{-1})^{-1} D^{-1} X' (\hat{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} u$

となる。そこで補題を用いればそれぞれ次式が成立することが分かる。

(52) $D^{-1} X' (\hat{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} X D^{-1}$

$$= \hat{k} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{u22} \begin{pmatrix} 1 & T^{-\left(d_1+\frac{1}{2}\right)} \sum_{t=1}^{T} x_{1t} \\ T^{-\left(d_1+\frac{1}{2}\right)} \sum_{t=1}^{T} x_{1t} & T^{-2d_1} \sum_{t=1}^{T} x_{1t}^2 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_{u12} \begin{pmatrix} 1 & T^{-\left(d_2+\frac{1}{2}\right)} \sum_{t=1}^{T} x_{2t} \\ T^{-\left(d_1+\frac{1}{2}\right)} \sum_{t=1}^{T} x_{1t} & T^{-(d_1+d_2)} \sum_{t=1}^{T} x_{1t} x_{2t} \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_{u21} \begin{pmatrix} 1 & T^{-\left(d_1+\frac{1}{2}\right)} \sum_{t=1}^{T} x_{1t} \\ T^{-\left(d_2+\frac{1}{2}\right)} \sum_{t=1}^{T} x_{2t} & T^{-(d_1+d_2)} \sum_{t=1}^{T} x_{1t} x_{2t} \end{pmatrix} & \hat{\sigma}_{u11} \begin{pmatrix} 1 & T^{-\left(d_2+\frac{1}{2}\right)} \sum_{t=1}^{T} x_{2t} \\ T^{-\left(d_2+\frac{1}{2}\right)} \sum_{t=1}^{T} x_{2t} & T^{-2d_2} \sum_{t=1}^{T} x_{2t}^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow k \begin{pmatrix} \sigma_{u22} H_{11} & -\sigma_{u12} H_{12} \\ -\sigma_{u12} H_{21} & \sigma_{u11} H_{22} \end{pmatrix} \equiv H_4$$

但し上式で $\hat{k}$、$k$ は (29) 式と同様にして与えられ、また $H_{12}$、$H_{21}$ は次式で定義される。

(53) $H_{12} = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 F_{d_{2-1}}(r)dr \\ \int_0^1 F_{d_{1-1}}(r)dr, & \int_0^1 F_{d_{1-1}}(r) F_{d_{2-1}}(r)dr \end{pmatrix}$

(54) $H_{21} = H_{12}'$

また次式が成立する。

(55)　$D^{-1}X'(\hat{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1}u$

$$= \hat{k}\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{u22}T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}u_{1t}-\hat{\sigma}_{u12}T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}u_{2t} \\ \hat{\sigma}_{u22}T^{-d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{1t}-\hat{\sigma}_{u12}T^{-d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{2t} \\ -\hat{\sigma}_{u12}T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}u_{1t}+\hat{\sigma}_{u11}T^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}u_{2t} \\ -\hat{\sigma}_{u12}T^{-d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{1t}+\hat{\sigma}_{u11}T^{-d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\to k\begin{pmatrix} \sigma_{u22}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}}W_u(1)-\sigma_{u12}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}}W_u(1) \\ \sigma_{u22}\sigma_{u11}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dW_{u1}(r)-\sigma_{u12}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dW_{u2}(r) \\ -\sigma_{u12}\sigma_{u11}^{\frac{1}{2}}W_{u1}(1)+\sigma_{u11}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}}W_{u2}(1) \\ -\sigma_{u12}\sigma_{u11}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dW_{u1}(r)+\sigma_{u11}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dW_{u2}(r) \end{pmatrix}$$

$$\equiv K_4$$

従って

(56)　$D(\hat{\theta}_{1FG}-(0,\beta_1,0,\beta_2)')\to H_4^{-1}K_4$

が成立することが分かるのである。

## Ⅳ　切片項の特定化誤差問題（ケース２）

次にケース２についてまずモデル $y=X\theta+u$ を正しく用いた場合の $\theta$ の OLS $\hat{\theta}_{2TO}$ 及び実行可能 GLS $\hat{\theta}_{2TG}$ をそれぞれ次式で定義しよう。

(57)　$\hat{\theta}_{2TO}=(X'X)^{-1}X'y$

(58)　$\hat{\theta}_{2TG}=(X'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}X)^{-1}X'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}y$

但し (58) 式で $\hat{\Sigma}_u$ は前節と類似した方法により求められる。そこで OLS $\hat{\theta}_{2TO}$ と実行可能 GLS $\hat{\theta}_{2TG}$ の漸近的挙動について考察しよう。

規格化行列 $D$ を

(59)　$D=\mathrm{Diag}(T^{\frac{1}{2}},T^{d_1},T^{\frac{1}{2}},T^{d_2})$

としてまずOLS $\hat{\theta}_{2TO}$ について

(60) $D(\hat{\theta}_{2TO}-\theta)=(D^{-1}X'XD^{-1})^{-1}D^{-1}X'u$

となる。従って前節と同様にすれば

(61) $D(\hat{\theta}_{2TO}-\theta)\to H_3^{-1}K_3$

が成立することが分かる。但し $H_3$, $K_3$ は (42)、(44) 式で与えられる。

次に実行可能GLS $\hat{\theta}_{2TG}$ について、前節と同様にして

(62) $\hat{\Sigma}_u\to\Sigma_u$

となることに注意しよう。そうすれば (59) 式の規格化行列を用いて

(63) $D(\hat{\theta}_{2TG}-\theta)=(D^{-1}X'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}XD^{-1})^{-1}D^{-1}X'(\hat{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}u$

となり、前節と同様にして

(64) $D(\hat{\theta}_{2TG}-\theta)\to H_4^{-1}K_4$

が成立することが分かる。但し $H_4$, $K_4$ は (52)、(55) 式で与えられる。

最後に誤ってモデルから切片項 $\alpha$ を除外して

(65) $y=x\beta+u$

として $\beta$ を推定した場合の特定化誤差問題について考察しよう。特にこの場合にはケース1と同様にしても $\Sigma_u$ の一致推定量を求めることは出来ないことに注意したい。そこで、次式で表わされる $\beta$ の OLS $\hat{\beta}_{2FO}$ の漸近的挙動について考察することにする。

(66) $\hat{\beta}_{2FO}=(x'x)^{-1}x'y$

規格化行列を

(67) $D=\mathrm{Diag}(T^{d_1},T^{d_2})$

とすればこの場合には

(68) $T^{-\frac{1}{2}}D(\hat{\beta}_{2FO}-\beta)=(D^{-1}x'xD^{-1})^{-1}(T^{-\frac{1}{2}}D^{-1}x'E\alpha)+(D^{-1}x'xD^{-1})^{-1}(D^{-1}x'u)T^{-\frac{1}{2}}$

となる。そこで補題を用いれば、

(69) $$D^{-1}x'xD^{-1}=\mathrm{Diag}\left(T^{-2d_1}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}^2,T^{-2d_2}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}^2\right)$$

$$\to Diag\left(\int_0^1F_{d_1-1}^2(r)dr,\int_0^1F_{d_2-1}^2(r)dr\right)\equiv H_5$$

$$(70)\quad T^{-\frac{1}{2}}D^{-1}x'E\alpha=\left(\alpha_1 T^{-\left(d_1+\frac{1}{2}\right)}\sum_{t=1}^{T}x_{1t},\alpha_2 T^{-\left(d_2+\frac{1}{2}\right)}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}\right)'$$

$$\to\left(\alpha_1\int_0^1 F_{d_1-1}(r)dr,\alpha_2\int_0^1 F_{d_2-1}(r)dr\right)'\equiv K_5$$

となる。従って

$$(71)\quad T^{-\frac{1}{2}}D(\hat{\beta}_{2FO}-\beta)' \quad\to\quad H_5^{-1}K_5$$

が成立することが分かるのである。

## V おわりに

本稿では独立変数が $I(d)$ 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従う2方程式から成る SUR モデルについて、特に（1）真のモデルが切片項を含まない SUR モデルであるにも拘わらず誤ってこれを含めて推定する特定化誤差問題（ケース1（Ⅲ節））と、逆に（2）真のモデルが切片項を含む SUR モデルであるにも拘わらず誤ってこれを除外して推定する特定化誤差問題（ケース2（Ⅳ節））をとりあげて、それぞれの場合について OLS と実行可能 GLS の漸近的性質を中心に考察した。特に独立変数がある種の正則条件を満たす確定的変数である場合には、ケース1の特定化誤差の場合について推定量の確率的オーダーは $O_p(T^{-\frac{1}{2}})$ であり、極限分布は正規分布となり、またケース2の特定化誤差の場合については推定量が一致性を失うことを容易に示すことが出来る。これに対して、独立変数が $I(d)$ 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従う場合には、本稿で明らかにした様に推定量の確率的オーダーは大きく変化し、また極限分布も混合正規分布を主体とするものとなることが理解出来るのである。今後大標本時及び小標本時における推定量の性質についてさらに比較検討を行うことが必要であるが、本稿はそのための一つの手がかりを与えるものとなっている。また本稿では特に切片項に関する特定化誤差問題を取り扱ったがそれ以外にも種々の特定化誤差問題が考えられる。関連する他の諸問題と共に今後さらに考察を行う所存である。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

## 参考文献

[1] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measure*, Wiley, New York.

[2] Sugihara, S. (1997), "Statistical Estimation of Simple Regression Model with Nonstationary I(d) Regressor and Stationary Autoregressive Error Term," *International Review of Business,* 2, 43−49.

[3] Tanaka, K. (1999), "The Nonstationary Fractional Unit Root," *Econometric Theory,* 15, 549−582.