確率的回帰モデルにおける切片項の特定化誤差問題について

杉　原　左右一

I　はじめに

本稿では独立変数が確率過程に従う確率的回帰モデルとして、独立変数が特に（1）ドリフト無しランダムウォークに従う場合、（2）ドリフト付きランダムウォークに従う場合、並びに（3）I（d）過程（$d>\frac{1}{2}$）に従う場合の3種類のモデルを取り挙げて、それぞれのモデルについて切片項の特定化誤差問題について考察したい。

以下まずII節で本稿で取り扱う基本モデルと仮定について述べる。次にIII節では真のモデルが切片項を含まない確率的単回帰モデルであるにも拘わらず誤ってこれを含めて推定する特定化誤差問題（ケース1）と、逆に真のモデルが切片項を含む確率的単回帰モデルであるにも拘わらず誤ってこれを除外して推定する特定化誤差問題（ケース2）を取り挙げて、それぞれの場合について推定量の漸近的諸性質を明らかにすることにしたい。最後のIV節は本稿のまとめにあてられる。

II　モデルと仮定

以後の分析の便宜のために本稿で取り扱う確率的単回帰モデルの従属変数、確率的独立変数及び誤差項をそれぞれ次のベクトル $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ で表わすことにする。

（1）　$y=(y_1, y_2, \ldots, y_T)'$

$$x=(x_1, x_2, \dots, x_T)'$$
$$u=(u_1, u_2, \dots, u_T)'$$

またi, Xをそれぞれ

（2）　$i=(1, 1, \dots, 1)'$，$X=(i, x)$

と表わす。さらに切片項及び傾きを示すパラメータをそれぞれα, βで表わし

（3）　$\theta=(\alpha, \beta)'$

とする。

さて切片項の特定化誤差問題に関して以下の２種類のケースが考えられるであろう。

ケース１　真のモデルが切片項αを含まない

（4）　$y=x\beta+u$

であるにも拘わらず、誤って切片項αを含めて推定する場合。

ケース２　真のモデルが切片項αを含む

（5）　$y=X\theta+u$

であるにも拘わらず、誤って切片項αを除外して推定する場合。

一般にケース２の方がケース１と比較して推定量へ及ぼす影響は大きいものと考えられよう。本稿では確率的独立変数x_tに関して以下に挙げる３つの仮定を考えて、それぞれの場合に対する切片項に関する特定化誤差問題について順次考察することにしたい。

仮定１（x_tがドリフト無しランダムウォークに従う場合）

$$x_t=x_{t-1}+\varepsilon_t \qquad x_s=0 \quad (s\leqq 0)$$
$$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\,(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$$

仮定２（x_tがドリフト付きランダムウォークに従う場合）

$$x_t=c+x_{t-1}+\varepsilon_t \qquad x_s=0 \quad (s\leqq 0)$$
$$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\,(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$$

仮定３（x_tが$I(d)$過程$(d>\frac{1}{2})$に従う場合）

$$(1-L)^d x_t=\omega_t,\ \omega_t=\psi(L)\varepsilon_t,\ d>\frac{1}{2},\ x_s=0 \quad (s\leqq 0)$$
$$\psi(L)=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i L_i \quad (\psi_0=1),\ \sum_{i=0}^{\infty} i\,|\psi_i|<\infty$$

$\psi(z)=0$ の根は単位円外にある。

$\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}\ (0、\sigma_\varepsilon^2)$

ただし仮定3で L はラグ演算子を意味している。仮定2で c はドリフト項を示し、$c=0$ とすれば仮定1が得られる。また仮定3で特に $d=1$、$\psi(L)\equiv 1$ とした場合が仮定1に他ならない。なお仮定3に関して特に $d=\frac{1}{2}$ の場合には以下で明らかにする規格化とは異なった規格化が必要となり、本稿ではひとまずこれを除外することにする。

また本稿では以下誤差項について次の標準的な仮定4を設定することにする。

仮定4　$u_t \sim \mathrm{IID}\ (0, \sigma_u^2)$　　$t=1,\ 2, \ldots, T$

u_t と x_t は独立に分布する。

仮定4を u_t と x_s が系列的相関を持つ場合に拡張することも可能であるが、分析がやや複雑なものとなるため本稿ではひとまず最も基本的な仮定4を設定することにする。

なお参考までに仮定1～3を満たす確率的独立変数 x_t として次式で表わされる簡単な系列をとりあげ、その変動の様子をコンピュータシミュレーションにより数値的に発生させた一例を図示しておこう。

(6)　$x_t=x_{t-1}+\varepsilon_t$

$x_t=1+x_{t-1}+\varepsilon_t$

$(1-L)^{0.8}\ x_t=\varepsilon_t$

$(1-L)^{1.5}\ x_t=\varepsilon_t$

図1～図4はそれぞれ上式と順に対応しており、ε_t は

(7)　$\varepsilon_t \sim \mathrm{NID}\ (0,\ 1)$

であり、$T=500$である。これらの図からも x_t の特徴の一端を読みとることが出来るであろう。

Ⅲ　切片項の特定化誤差問題

1. x_t がドリフト無しランダムウォークに従う場合

図1　$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$

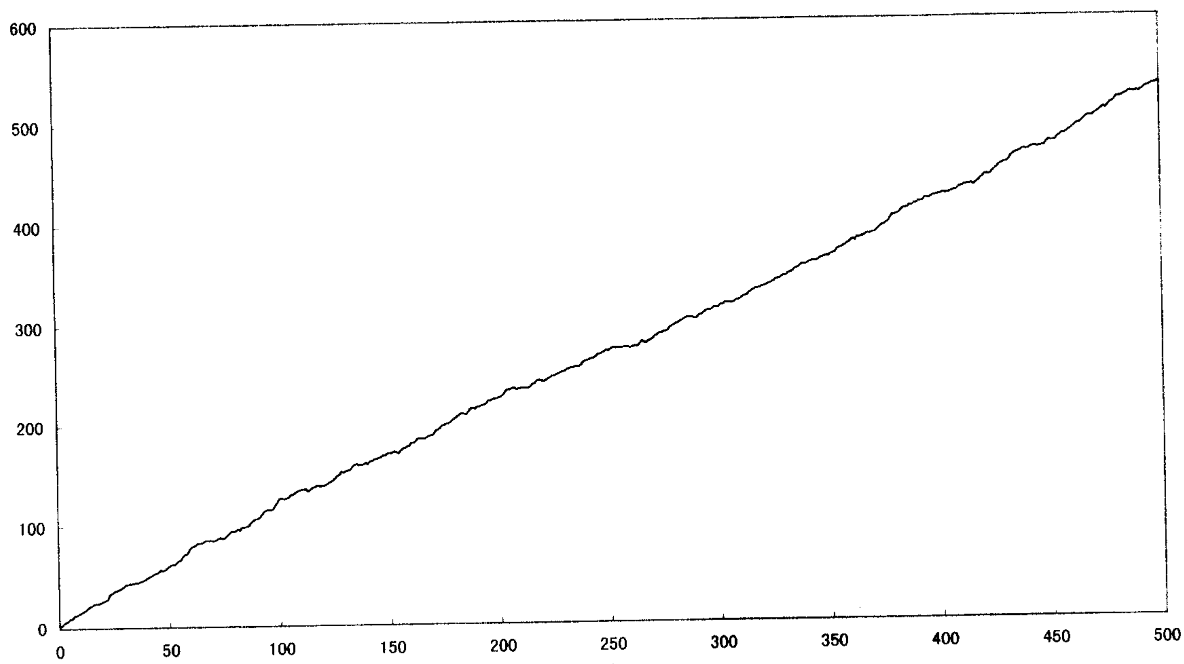

図2　$x_t = 1 + x_{t-1} + \varepsilon_t$

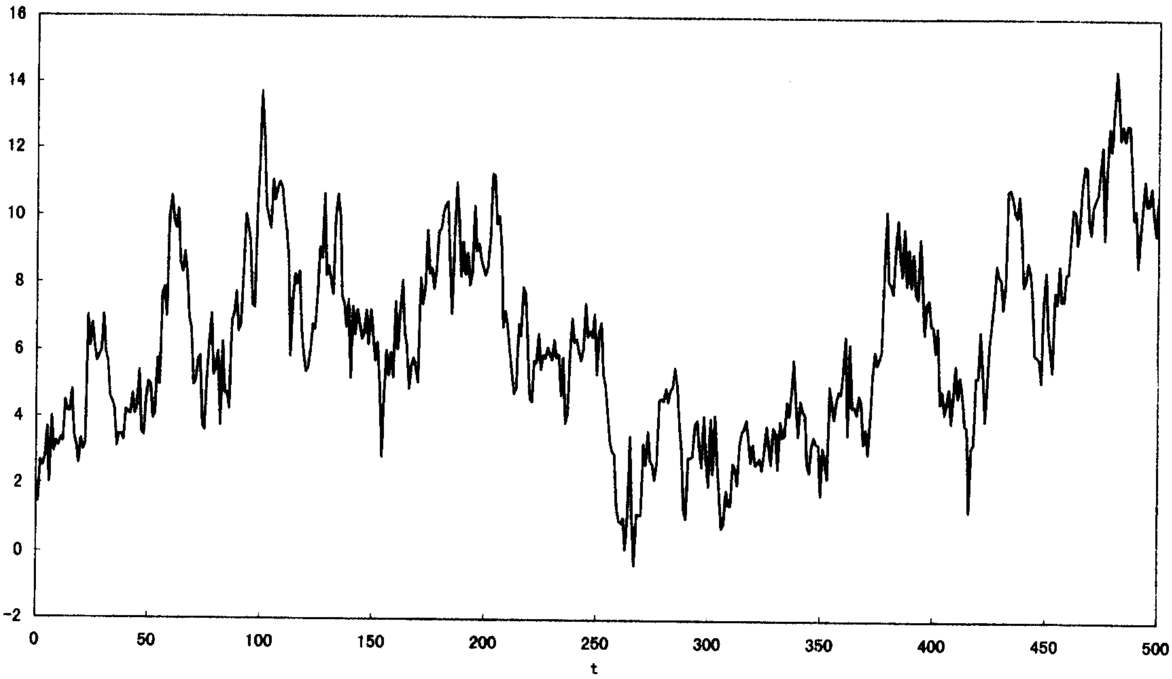

図3　$(1-L)^{0.8}x_t=\varepsilon_t$

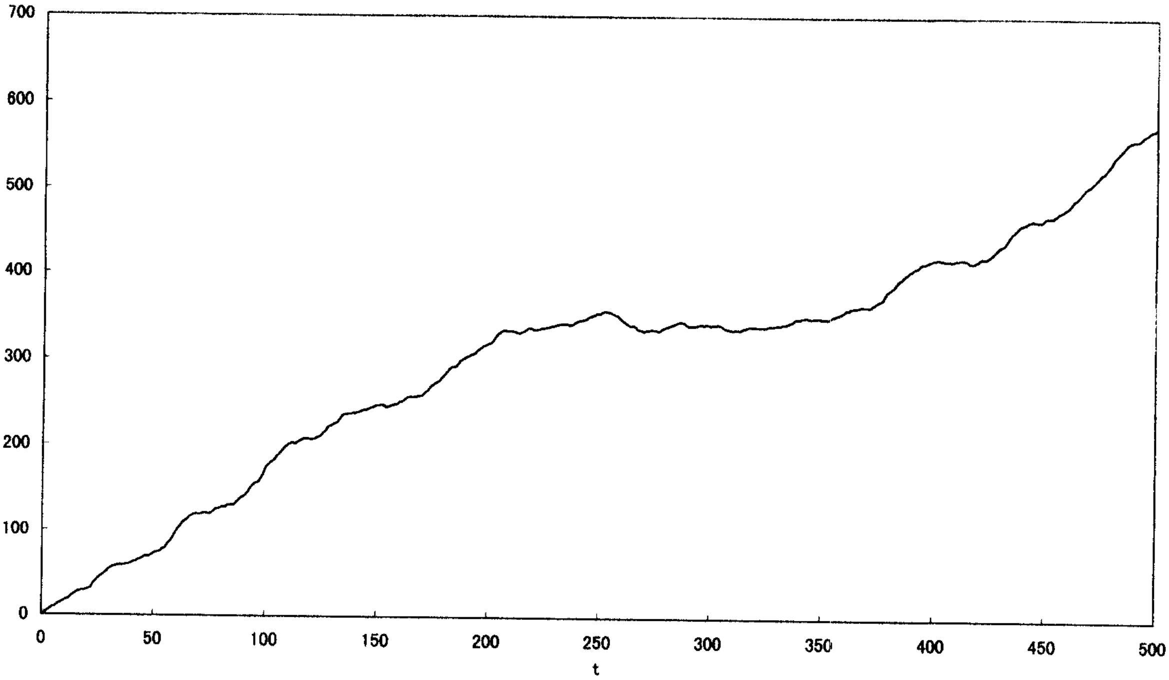

図4　$(1-L)^{1.5}x_t=\varepsilon_t$

本節では独立変数がドリフト無しランダムウォークに従う場合としてx_tが仮定1を満たす最も基本的な場合について考察することにしたい。
そのために以下の関係式が有効である。

(8) $\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}i'x \to \int_0^1 W_\varepsilon(r)dr$

(9) $\frac{1}{T}x'u \to \int_0^1 W_\varepsilon(r)dW_u(r)$

(10) $\frac{1}{T^2}x'x \to \int_0^1 W_\varepsilon^2(r)dr$

ただし、上式で$W_\varepsilon(r)$, $W_u(r)$はそれぞれε, uに対するブラウン運動である。

さて、特定化誤差問題を考察するに先立ってまずケース1、2に関してモデルを正しく推定した場合の推定量の漸近的性質を調べておこう。まずケース1についてモデルを正しく用いた場合のβのOLSを$\hat{\beta}_{1T}$

(11) $\hat{\beta}_{1T} = \frac{x'y}{x'x}$

とすれば、

(12) $T\left(\hat{\beta}_{1T} - \beta\right) = \frac{\frac{1}{T}x'u}{\frac{1}{T^2}x'x} \to \frac{\int_0^1 W_\varepsilon(r)dW_u(r)}{\int_0^1 W_\varepsilon^2(r)dr}$

が成立することがわかる。

次にケース2についてモデルを正しく用いた場合のθのOLSを

$\hat{\theta}_{2T} = \left(\hat{\alpha}_{2T}, \hat{\beta}_{2T}\right)'$

(13) $\hat{\theta}_{2T} = (X'X)^{-1}X'Y$

としよう。ここで規格化行列Dを

(14) $D = \mathrm{Diag}\left(T^{\frac{1}{2}}, T\right)$

とすれば、OLS $\hat{\theta}_{2T}$について

(15) $D(\hat{\theta}_{2T} - \theta) = (D^{-1}X'XD^{-1})^{-1}D^{-1}X'U$

となる。そこで(8)～(10)式を用いれば

$$(16)\quad D^{-1}X^{-1}XD^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}i'x \\ \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}i'x & \frac{1}{T^{2}}x'x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 W_\varepsilon(r)dr \\ \int_0^1 W_\varepsilon(r)dr & \int_0^1 W_\varepsilon^2(r)dr \end{pmatrix}\equiv K_D$$

$$(17)\quad D^{-1}X'u=\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}i'u,\frac{1}{T}x'u\right)'\rightarrow\left(W_u(1),\int_0^1 W_\varepsilon(r)dW_u(r)\right)'\equiv K_N$$

となることがわかる。従って

$$(18)\quad D(\hat{\theta}_{2T}-\theta)=(T^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}_{2T}-\alpha),T(\hat{\beta}_{2T}-\beta))'\rightarrow K_D^{-1}K_N$$

が成立することがわかるのである。

次にケース1、2の切片項の特定化誤差問題について考察しよう。

まずケース1について誤って$y=X\theta+u$としてθを推定したとしよう。θのOLSを以下$\hat{\theta}_{1F}=(\hat{\alpha}_{1F},\hat{\beta}_{1F})'$

$$(19)\quad \hat{\theta}_{1F}=(X'X)^{-1}X'y$$

とする。そうすれば規格化行列Dを用いて

$$(20)\quad D(\hat{\alpha}_{1F},\hat{\beta}_{1F}-\beta)'=(D^{-1}X'XD^{-1})^{-1}D^{-1}X'u$$

となる。従って上記と同様にして

$$(21)\quad (T^{\frac{1}{2}}\hat{\alpha}_{1F},T(\hat{\beta}_{1F}-\beta))'\rightarrow K_D^{-1}K_N$$

が成立することがわかる。

次にケース2について、誤って$y=x\beta+u$としてβを推定したとしよう。βのOLSを以下$\hat{\beta}_{2F}$

$$(22)\quad \hat{\beta}_{2F}=\frac{x'y}{x'x}$$

とする。そうすれば（8）～（10）式を用いて

$$(23)\quad T^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\beta}_{2F}-\beta\right)=\alpha\frac{\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}i'x}{\frac{1}{T^2}x'x}+\frac{\frac{1}{T}x'u}{\frac{1}{T^2}x'x}\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\rightarrow\alpha\frac{\int_0^1 W_\varepsilon(r)dr}{\int_0^1 W_\varepsilon^2(r)dr}$$

が成立することがわかるのである。

さて以上の2種類の特定化誤差問題から推定量に関してどの様な性質が明らかになるであろうか。この点を考察するために、独立変数が確定的変数である場合として x_t が以下の標準的な仮定5を満たす場合との比較を行うことにしよう。

仮定5　$|x_t|<\infty$

$$\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X'X\right)^{-1}$$ が存在する。

x_t が上記仮定5を満たす確定的変数である場合には以下の諸性質が成立することを容易に示すことが出来る。

$$(24)\quad T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{1T}-\beta)\rightarrow N\left(0,\frac{\sigma_u^2}{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}x'x}\right)$$

$$(25)\quad T^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}_{2T}-\alpha,\hat{\beta}_{2T}-\beta)'\rightarrow N\left(0,\sigma_u^2(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X'X)^{-1}\right)$$

$$(26)\quad T^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}_{1F},\hat{\beta}_{1F}-\beta)'\rightarrow N\left(0,\sigma_u^2(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X'X)^{-1}\right)$$

$$(27)\quad \hat{\beta}_{2F}-\beta\rightarrow\alpha\frac{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}i'x}{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}x'x}$$

なお、x_t が定常的確率変数である場合にも上式で極限($\lim_{T\to\infty}$)を確率極限($p\lim_{T\to\infty}$)で置き換えることにより同様の性質が成立することに注意したい。

さて上記した性質からも明らかになる様に、x_t が確定的変数や定常的変数である場合には、$\hat{\beta}_{2F}$ を除いて、推定量の確率的オーダーは

$O_p\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$ であり、極限分布は正規分布となる。これに対して x_t がドリフト無しランダムウォークに従う場合には、上述したことから $\hat{\beta}_{2F}$ を除いて推定量の確率的オーダーは切片項、傾きのそれぞれについて $O_p\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$、$O_p\left(\frac{1}{T}\right)$ であり、極限分布は混合正規分布となることがわかるのである。また x_t が確定的変数であれば $\hat{\beta}_{2F}$ は一致性を失うのに対して、ドリフト無しランダムウォークであれば (23) 式からもわかる様に $T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{2F}-\beta)$ は極限分布を持ち、$\hat{\beta}_{2F}$ は β の一致推定量となることにも注意したい。

次にケース1に関して、$\hat{\beta}_{1T}$、$\hat{\beta}_{1F}$ が共に β の一致推定量となっていることがわかる。

また確定的変数の場合と同様にして

(28) $\mathbf{Bias}(\hat{\beta}_{1T} \mid x) = 0$

(29) $\mathbf{Bias}(\hat{\beta}_{1F} \mid X) = 0$

となる。ただし x 及び X の条件付き分散を比較すれば

(30) $V(\hat{\beta}_{1T} \mid x) = \dfrac{\sigma_u^2}{x'x}$

(31) $V(\hat{\beta}_{1F} \mid X) = \dfrac{\sigma_u^2}{x'x - \frac{1}{T}(i'x)^2}$

となることから、

(32) $V(\hat{\beta}_{1T} \mid x) \leqq V(\hat{\beta}_{1F} \mid \mathrm{X})$

となることがわかるのである。次にケース2に関しては $\hat{\beta}_{2T}$、$\hat{\beta}_{2F}$ は共に β の一致推定量であるが、

(33) $\mathbf{Bias}(\hat{\beta}_{2T} \mid X) = 0$

(34) $\mathbf{Bias}(\hat{\beta}_{2F} \mid x) = \alpha \dfrac{i'x}{x'x}$

であり、一方

$$(35)\qquad V(\hat{\beta}_{2T}\mid X)=\frac{\sigma_u^2}{x'x-\frac{1}{T}(i'x)^2}$$

$$(36)\qquad V(\hat{\beta}_{2F}\mid x)=\frac{\sigma_u^2}{x'x}$$

より

$$(37)\qquad V(\hat{\beta}_{2F}\mid x)\leqq V(\hat{\beta}_{2T}\mid \mathrm{X})$$

となることがわかる。ただし $V(\hat{\beta}_{2F}\mid x)$ で分散 σ_u^2 を一致的には推定し得ないことに注意しなければならない。なおこれらの諸性質は確定的変数の場合と類似した性質であることを指摘しておきたい。

2．x_t がドリフト付きランダムウォークに従う場合

次に x_t がドリフト付きランダムウォークに従う場合として仮定1に代わって仮定2を設定しよう。
この場合には次の関係式が有効である。

$$(38)\qquad \frac{1}{T^2}i'x\to\frac{c}{2}$$

$$(39)\qquad \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}x'u\to N\left(0,\frac{c}{3}\sigma_u^2\right)$$

$$(40)\qquad \frac{1}{T^3}x'x\to\frac{c^2}{3}$$

従って (38) ～ (40) 式を用いれば3．1節と同様にすることにより次式が成立することがわかるのである。

$$(41)\qquad T^{\frac{3}{2}}(\hat{\beta}_{1T}-\beta)\to N\left(0,\frac{3}{c^2}\sigma_u^2\right)$$

$$(42)\qquad \left(T^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}_{2T}-\alpha),T^{\frac{3}{2}}(\hat{\beta}_{2T}-\beta)\right)'\to N(0,\sigma_u^2Q^{-1})$$

$$(43)\qquad \left(T^{\frac{1}{2}}\hat{\alpha}_{1F},T^{\frac{3}{2}}(\hat{\beta}_{1F}-\beta)\right)'\to N(0,\sigma_u^2Q^{-1})$$

$$(44)\qquad T(\hat{\beta}_{2F}-\beta)\to\frac{3\alpha}{2c}$$

ただし、上式で $\boldsymbol{Q}$ は

$$(45)\qquad Q=\begin{pmatrix}1 & \frac{c}{2}\\ \frac{c}{2} & \frac{c^2}{3}\end{pmatrix}$$

で与えられる。なお、(42)、(43) 式では

$$(46)\qquad \mathrm{D}=\mathrm{Diag}\left(T^{\frac{1}{2}},T^{\frac{3}{2}}\right)$$

として、$\boldsymbol{D^{-1}X'XD^{-1}}$、$\boldsymbol{D^{-1}X'u}$ がそれぞれ

$$(47)\qquad D^{-1}X'XD^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{T^2}i'x\\ \frac{1}{T^2}i'x & \frac{1}{T^3}x'x\end{pmatrix}\to Q$$

$$(48)\qquad D^{-1}X'u=\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}i'u,\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}x'u\right)'\to N(0,\sigma_u^2Q)$$

となること、また (44) 式では

$$(49)\qquad T\left(\hat{\beta}_{2F}-\beta\right)=\alpha\frac{\frac{1}{T^2}i'x}{\frac{1}{T^3}x'x}+\frac{\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}x'u}{\frac{1}{T^3}x'x}\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}$$

となることを用いている。

なお (41) ～ (44) 式が成立するのは、仮定2を満たすドリフト付きランダムウォークを

$$(50)\qquad x_t=ct+\sum_{s=1}^{t}\varepsilon_s$$

と表わすとき、上式右辺でオーダー的には第1項のタイムトレンド項 ct が第2項の純粋ランダムウオーク項 $\sum_{s=1}^{t}\varepsilon_s$ を優越することに起因する点を指摘しておきたい。この特徴は図1、図2からも読みとることが出来よう。

3. x_t が $I(d)$ 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従う場合

x_t が $I(d)$ 過程 $(d>\frac{1}{2})$ に従う場合として仮定1に代わって仮定3を設定しよう。

この場合には次の関係式が有効である。

$$(51)\qquad \frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}i'x \rightarrow \int_0^1 F_{d-1}(r)dr$$

$$(52)\qquad \frac{1}{T^d}x'u \rightarrow \int_0^1 F_{d-1}(r)dW_u(r)$$

$$(53)\qquad \frac{1}{T^{2d}}x'u \rightarrow \int_0^1 F_{d-1}^2(r)dr$$

ただし、$F_{d-1}(r)$ は次式で定義される $(d-1)$ 重和分ブラウン運動である。

$$(54)\qquad F_{d-1}(r)=\frac{1}{\Gamma(d)}\Psi(1)\int_0^r (r-s)^{d-1}dW_\varepsilon(s)$$

上記関係式については Sugihara［4］、Tanaka［5］を参照されたい。

さて、(51)～(53) 式を用いれば3.1節と同様にすることにより以下の諸性質が成立することを示すことが出来る。

$$(55)\qquad T^d(\hat{\beta}_{1T}-\beta)\rightarrow \frac{\int_0^1 F_{d-1}(r)dW_u(r)}{\int_0^1 F_{d-1}^2(r)dr}$$

$$(56)\qquad (T^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}_{2T}-\alpha),T^d(\hat{\beta}_{2T}-\beta))' \rightarrow L_D^{-1}L_N$$

$$(57)\qquad (T^{\frac{1}{2}}\hat{\alpha}_{1F},T^d(\hat{\beta}_{1F}-\beta))' \rightarrow L_D^{-1}L_N$$

$$(58)\qquad T^{d-\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{2F}-\beta)\rightarrow \alpha\frac{\int_0^1 F_{d-1}(r)dr}{\int_0^1 F_{d-1}^2(r)dr}$$

ただし、上式で L_D、L_N はそれぞれ次式で与えられる。

$$(59)\qquad L_D=\begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 F_{d-1}(r)dr \\ \int_0^1 F_{d-1}(r)dr & \int_0^1 F_{d-1}^2(r)dr \end{pmatrix}$$

$$(60) \qquad L_N = \left(W_u(1), \int_0^1 F_{d-1}(r) dW_u(r) \right)'$$

なお、(56)、(57) 式では D を

$$(61) \qquad D = \mathrm{Diag}\left(T^{\frac{1}{2}}, T \right)$$

として、$D^{-1}X'XD^{-1}$、$D^{-1}X'u$ がそれぞれ

$$(62) \qquad D^{-1}X'XD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{T^{\left(d+\frac{1}{2}\right)}} i'x \\ \dfrac{1}{T^{\left(d+\frac{1}{2}\right)}} i'x & \dfrac{1}{T^{2d}} x'x \end{pmatrix} \to L_D$$

$$(63) \qquad D^{-1}X'u = \left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} i'u, \frac{1}{T^{d}} x'u \right)' \to L_N$$

となること、また (58) 式では

$$(64) \qquad T^{d-\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_{2F} - \beta) = \alpha \frac{\dfrac{1}{T^{\left(d+\frac{1}{2}\right)}} i'x}{\dfrac{1}{T^{2d}} x'x} + \frac{\dfrac{1}{T^{d}} x'u}{\dfrac{1}{T^{2d}} x'x} \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}$$

となることを用いている。

以上の諸性質は3.1節の諸性質の $I(d)$ 過程 $(d > \frac{1}{2})$ の場合への直接的な拡張となっていることが理解できるのである。

Ⅳ　おわりに

本稿では独立変数が（1）ドリフト無しランダムウォークに従う場合、（2）ドリフト付きランダムウォークに従う場合、並びに（3）$I(d)$ 過程 $(d > \frac{1}{2})$ に従う場合の3種類の確率的単回帰モデルについて切片項の特定化誤差問題を取り挙げ、OLS の漸近的性質について考察した。その結果、独立変数が確定的変数や定常過程に従う場合と比較して、上記の非定常過程に従う場合には OLS の漸近的性質に大きな相異点があることが明らかになった。

なお本稿の議論は推定量の漸近的性質を中心としたものであり、検定統計量

の諸性質や推定量及び検定統計量の小標本特性についてもさらに考察されねばならない。また本稿では切片項に関する特定化誤差問題を取り扱っているが、その他にも種々の特定化誤差問題が考えられる。関連する他の問題と合わせて今後さらに考察を行う所存である。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

参考文献

[1] Anderson, T.W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series,* Wiley, New York.

[2] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measure,* Wiley, New York.

[3] Mandelbrot, B.B. and Van Ness, J.W. (1968), "Fractional Brownian Motions, Fractional Brownian Noises and Applications," *SIAM Review,* 10, 422−437.

[4] Sugihara, S. (1997), "Statistical Estimation of Simple Regression Model with Nonstationary I(d) Regressor and Stationary Autoregressive Error Term," *International Review of Business,* 2, 43−49.

[5] Tanaka, K. (1999), "The Nonstationary Fractional Unit Root," *Econometric Theory,* 15, 549−582.