包絡分析法の基本モデル

—*CCR* モデルと *BCC* モデル—

瀬　見　　博

1．序

一般に、事業体の活動は、営利・非営利組織を問わず、インプットを結合してアウトプットに変換する資源転換過程であるとみなすことができ、その効率性は、次の比率尺度によって測定される。

効率性＝アウトプット／インプット　　(1)

しかし、現実には多種類のインプットやアウトプットが存在しているため、(1)式をそのまま用いて、各事業体の効率性を単純に計算し、それらを比較・評価することはできない。その場合には、何らかの方法によって、インプットやアウトプットを集計したり、個々別々に求められた各種比率を総合化したりしなければならず、効率性の評価と比較が極めて難しくなる。

かかる問題を解決するための１つの手段として、包絡分析法（Data Envelopment Analysis：以下、DEA と略す）と呼ばれる手法が、1970年代の後半に開発された。その後、DEA の研究は急速に進展し、今日、理論と応用の両面で大きな成果を上げつつある。

本稿では、現在発展しつつある DEA が本来どのような考え方に基づく分析法であるのかを明らかにするために、初期の２つのタイプの基本モデルを取りあげ、各モデルがもつ意味や特徴を検討してみることにする。

2. *CCR* モデル

いま、同じ活動を行っている n 個の事業体（Decision Making Unit）を DMU_j,（$j=1, \ldots\ldots, n$）で表すことにする。また、各 DMU_j は m 種類のインプット i,（$i=1, \ldots\ldots, m$）をそれぞれ x_{ij} 単位投入することによって、t 種類のアウトプット r,（$r=1, \ldots\ldots, t$）をそれぞれ y_{rj} 単位産出しているものとしよう。このとき、測定されるインプット項目とアウトプット項目は共に、すべての DMU_j で共通していることが必要である。しかし、各項目の測定単位は異なっていてもよい。さらに、x_{ij} と y_{rj} の値は観測可能で、正の値をとると仮定する。

さて、このような状況下で DMU_j の効率性を(1)式により測定しようとすれば、何らかの方法を用いて、m 種類のインプット i と t 種類のアウトプット r を、それぞれ単一の仮想的インプット（single virtual input）と単一の仮想的アウトプット（single virtual output）に変換しなければならない。このとき、よく用いられるのが加重和をとる方法である。すなわち、

$$\text{効率性}=\sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij}, \quad j=1, \ldots\ldots, n \tag{2}$$

で与えられるように、インプット値の加重和とアウトプット値の加重和を求め、その比を効率性の測定尺度とみなすのである。ここに、ν_i と u_r はインプット i とアウトプット r に付与される加重値である。

ところで、(2)式が有効に機能するためには、これらの加重値を確定しなければならない。しかし、すべての DMU_j に共通した公平な加重値を求めることは極めて難しい。

チャーンズ (Charnes, A.)、クーパー (Cooper, W. W.)、ローズ (Rhodes, E.) は、かかる問題を解決するために次のような方法を提案している[1]。すなわち、いま効率性の評価がなされる特定の事業体を DMU_o であるとしたとき、

1)　すべての DMU_j の効率性を 1 以下に抑えながら、DMU_o の効率性が最大に

1) 参考文献［6］。

なるように、DMU_o に対する ν_i と u_r の値を、

$$\text{Max} \quad h_o = \sum_{r=1}^{t} u_r y_{ro} \Big/ \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} \tag{3}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \leqq 1\,, \qquad j=1,\ldots\ldots,n \tag{4}$$

$$\nu_i,\ \ u_r \geqq 0, \qquad \forall\, i, r \tag{5}$$

の分数計画モデルを解くことによって定め、DMU_o の効率性を評価する、

2） DMU_o 以外の DMU_j の効率性を、1）で求めた ν_i と u_r の値を用いることにより計算する、

というものである。そして、上記 1)、2) の手続きを評価対象である n 個のすべての DMU_j に対して実行する。このようにすれば、各 DMU_j がそれぞれ独自の価値判断システムに基づいて、自己に最も都合のよい固有の加重値を合理的に決定することができ、すべての DMU_j の効率性の相対的評価が可能となる。

分数計画モデルの目的関数 h_o の値は、DMU_o が他の DMU_j と比較して効率的であると判定される場合には、$h_o=1$ となる。しかし、逆に $h_o=1$ であっても、インプットやアウトプットの値にスラックが発生していることがあるため、その DMU_o が必ずしも効率的であるということはできない。また、DMU_o が効率的でない場合には $h_o<1$ となる。さらに、$h_o<1$ と判定された DMU_o に対しては、それを非効率的と判断させた別の効率的な DMU_j を見いだすことができる。このとき、かかる DMU_j の集合を DMU_o に対する参照集合（reference set）という。また、参照集合に属する DMU_j の張る凸集合を有効フロンティア（efficient frontier）とか包絡面（envelopment surface）と呼ぶ。

さて、(3)〜(5)式の分数計画モデルは、それと同値の線形計画モデル(6)〜(9)式に変換できることがわかっている[2)]。

$$\text{Max} \quad w_o = \sum_{r=1}^{t} u_r y_{ro} \tag{6}$$

2）分数計画モデルから線形計画モデルへの変換については、Charnes, A., Cooper, W. W. (1962), Programming with Linear Fractional Functionals, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 9, No. 3 & 4, pp. 181–186 を参照されたい。

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} = 1 \tag{7}$$

$$\sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \leqq 0, \qquad j=1, \ldots\ldots, n \tag{8}$$

$$\nu_i, \quad u_r \geqq \varepsilon, \qquad \forall\, i, r \tag{9}$$

これを、乗数形式（multiplier form）のインプット指向型 CCR モデル（以下、CCR_P–I と略す）という。また、CCR_P–I の双対モデルは、θ と λ_j,（$j=1, \ldots\ldots, n$）を双対変数とすれば、

$$\text{Min} \quad z_o = \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^{+} + \sum_{r=1}^{t} s_r^{-}\right) \tag{10}$$

$$\text{s. t.} \quad \theta x_{io} - s_i^{+} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j, \qquad i=1, \ldots\ldots, m \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j - s_r^{-} = y_{ro}, \qquad r=1, \ldots\ldots, t \tag{12}$$

$$\lambda_j, \quad s_i^{+}, \quad s_r^{-} \geqq 0, \qquad \forall\, j, i, r \tag{13}$$

と表すことができる。ここに、θ には符号制約がない。これを、包絡形式（envelopment form）のインプット指向型 CCR モデル（以下、CCR_D–I と略す）という。なお、CCR_P–I と CCR_D–I において非アルキメデス無限小定数（non–Archimedean infinitesimal constant）と呼ばれる非常に小さな正数 ε が用いられているが、この ε をモデルに組み込むことによって、CCR_P–I では、すべての加重値を正に保つことが可能となり、CCR_D–I では、DMU_o の効率性を計算する際に、最適な目的関数値がスラック変数に割り当てられる値によって影響されるのを防ぐことができる。

ところで、CCR_D–I をみれば、CCR モデルでは、事業体の m 個のインプット値 $x \in R^m$ と t 個のアウトプット値 $y \in R^t$ の対 (x, y) がとり得る実行可能領域 P に、

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\} \tag{14}$$

を想定していることがわかる。ここに、$x_j = (x_{1j}, \ldots\ldots, x_{mj})^T$, $y_j = (y_{1j}, \ldots\ldots, y_{tj})^T$, $X = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in R^{m \times n}$, $Y = (y_1, \ldots\ldots, y_n) \in R^{t \times n}$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n)^T$ で

ある。また、P は生産可能集合（production possibility set）と呼ばれる。なお、$\lambda \geq 0$ のとき、$(X\lambda, Y\lambda)$ の集合は凸錐になる。すなわち、CCR モデルでは、DMU_j のインプット値の任意の非負結合 $X\lambda$ より大きな x と、それに対応する非負結合のアウトプット値 $Y\lambda$ より小さな y の対 (x, y) をもつ事業体の活動が認められており、しかも有効フロンティア上の (x, y) について、規模に関する収穫不変の仮定がおかれていることになる。したがって、CCR_D–I は DMU_o の現在のアウトプット値 y_{ro} を最低限保証しながら、それが達成できる最小のインプット値 θx_{io} を P の中で求めようとするモデルであると解釈することができる。CCR_P–I と CCR_D–I がインプット指向型と呼ばれる所以がここにある。また、θ は効率性を改善するために DMU_o のすべてのインプット値に適用される縮小率であるとみなすことができる。

DMU_o は、CCR_D–I の最適解が $\theta=1$ かつ $s_i^+=s_r^-=0,\ \forall\, i, r$ であるとき、または、CCR_P–I の最適解が $w_o=1$ となるときにのみ効率的である。一方、非効率的であると判定された DMU_o は、そのインプット値 x_{io} とアウトプット値 y_{ro} を、それぞれ $\theta x_{io}-s_i^+$ と $y_{ro}+s_r^-$ に変更することによって効率的な DMU_o へと改善できる。また、非効率的な DMU_o に対する参照集合 E_o は、

$$E_o=\{j \mid \lambda_j>0, j=1, \ldots\ldots, n\} \tag{15}$$

で与えられる。

さて、インプット指向型 CCR モデルに対して、アウトプット指向型 CCR モデルを同様に定式化することが可能である[3]。すなわち、乗数形式のアウトプット指向型 CCR モデル（以下、CCR_P–O と略す）は、(3)、(4)式の分母と分子を入れ替え、(4)式の不等号の向きを逆にし、目的関数を最小化することによって、

$$\text{Min} \quad w_o=\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} \tag{16}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{r=1}^{t} u_r y_{ro}=1 \tag{17}$$

3）インプット指向型 CCR モデルとアウトプット指向型 CCR モデルの関係については、例えば、参考文献[10] 49–50頁を参照されたい。

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} \geqq 0, \qquad j=1,\ldots\ldots,n \tag{18}$$

$$\nu_i,\quad u_r \geqq \varepsilon, \qquad \forall\, i,r \tag{19}$$

と表すことができる。また、CCR_P–O の双対形である包絡形式のアウトプット指向型 CCR モデル（以下、CCR_D–O と略す）は、ϕ と λ_j,（$j=1,\ldots\ldots,n$）を双対変数とすれば、

$$\text{Max} \qquad z_o = \phi + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^+ + \sum_{r=1}^{t} s_r^-\right) \tag{20}$$

$$\text{s. t.} \qquad x_{io} - s_i^+ = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j, \qquad i=1,\ldots\ldots,m \tag{21}$$

$$\phi y_{ro} + s_r^- = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j, \qquad r=1,\ldots\ldots,t \tag{22}$$

$$\lambda_j, s_i^+, s_r^- \geqq 0, \qquad \forall\, j,i,r \tag{23}$$

となることがわかる。ここに、ϕ には符号制約がない。CCR_D–O をみれば、アウトプット指向型 CCR モデルは、DMU_o の現在のインプット値 x_{io} を維持しながら、最大限可能なアウトプット値 ϕy_{ro} を生産可能集合 P の中で達成することを意図したモデルであるとみなすことができる。DMU_o が効率的であるためには、$\phi=1$ かつ $s_i^+=s_r^-=0$, $\forall\, i,r$ が満たされているか、あるいは、$w_o=1$ でなければならない。また、DMU_o が非効率的なときには、$\phi>1$ となる。ϕ は効率性改善のために DMU_o のすべてのアウトプット値に適用される拡大率である。なお、非効率的な DMU_o に対する改善策の一つとして、x_{io} を $x_{io}-s_i^+$ に、y_{ro} を $\phi y_{ro}+s_r^-$ に変更することが考えられる。

3．*BCC* モデル

CCR モデルに対して、バンカー（Banker, R. D.)、チャーンズ、クーパーは、⒁式に、$e\lambda=1$ という条件を追加することにより、規模に関して収穫が変化する状況を想定したモデル（以下、BCC モデルと略す）を提案している[4]。すなわち、BCC モデルの生産可能集合 $T=\{(x,y)\,|\,x\geq X\lambda, y\leq Y\lambda, e\lambda=1, \lambda\geq 0\}$ は、

4）参考文献［2］。

DMU_j 集合の凸包とそれより大きなインプット値と小さなアウトプット値をもつ点の集合から構成されることになる。したがって、効率的な DMU_j の数は CCR モデルの場合より一般に増加する。

BCC モデルは、CCR_D–I と CCR_D–O の制約条件に $e\lambda=1$ という条件が付け加えられた形で表される。したがって、包絡形式のインプット指向型 BCC モデル（以下、BCC_D–I と略す）は、

$$\text{Min} \quad z_o=\theta-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^+ + \sum_{r=1}^{t} s_r^-\right) \tag{24}$$

$$\text{s. t.} \quad \theta x_{io}-s_i^+=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j, \qquad i=1,\ldots\ldots,m \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j-s_r^-=y_{ro}, \qquad r=1,\ldots\ldots,t \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j=1 \tag{27}$$

$$\lambda_j,\ \ s_i^+,\ \ s_r^-\geqq 0, \qquad \forall\, j,i,r \tag{28}$$

で、また、その双対形である乗数形式のインプット指向型 BCC モデル（以下、BCC_P–I と略す）は、(27)式の $e\lambda=1$ に対する双対変数を U_o とすれば、

$$\text{Max} \quad w_o=\sum_{r=1}^{t} u_r y_{ro}-U_o \tag{29}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io}=1 \tag{30}$$

$$\sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij}-U_o\leqq 0, \qquad j=1,\ldots\ldots,n \tag{31}$$

$$\nu_i,\ \ u_r\geqq\varepsilon, \qquad \forall\, i,r \tag{32}$$

で与えられることがわかる。ここに、U_o には符号制約がない。なお、効率性の判定条件と効率化のための改善策は、インプット指向型 CCR モデルの場合と同じである。

ところで、有効フロンティア上の点は規模に関して収穫逓増、不変、逓減のいずれかのタイプに属することになるが、どのタイプに分類されるかはバンカー等による以下の定義を用いて確認することができる[5)]。

5）参考文献［2］p. 1087を参照されたい。

[定義] いま、有効フロンティア上にある点 (x_o, y_o) の近傍の点を、$Z_\delta=[(1+\delta)x_o, (1+\delta)y_o]$ で表すことにする。ここに、δ は微小な数である。そのとき、

（a） $\delta^*>\delta\geqq 0$ に対して $Z_\delta\in T$ であり、かつ、$-\delta^*<\delta<0$ に対して $Z_\delta\notin T$ である1つの $\delta^*>0$ が存在するならば、(x_o, y_o) は規模に関して収穫逓増である。

（b） $|\delta|<\delta^*$ となるすべての δ に対して $Z_\delta\in T$ であるか、または、$0<|\delta|<\delta^*$ となるすべての δ に対して $Z_\delta\notin T$ であるような $\delta^*>0$ が存在するならば、(x_o, y_o) は規模に関して収穫不変である。

（c） $\delta^*>\delta>0$ に対して $Z_\delta\notin T$ であり、かつ、$-\delta^*<\delta\leqq 0$ に対して $Z_\delta\in T$ である $\delta^*>0$ が存在するならば、(x_o, y_o) は規模に関して収穫逓減である。

また、刀根は以上の定義から、(x_o, y_o) が規模に関して収穫逓増、不変、逓減のいずれであるかの判定をより具体的に行うために、次のような方法を提案している[6)]。すなわち、BCC_P-I の最適解をもたらす U_o の最大値を U^+、最小値を U_- としたとき、(a) $U_-<U^+\leqq 0$ または $U_-=U^+<0$ ならば、(x_o, y_o) は規模に関して収穫逓増である、(b) $U_-<0<U^+$ または $U_-=U^+=0$ ならば、(x_o, y_o) は規模に関して収穫不変である、(c) $0\leqq U_-<U^+$ または $0<U_-=U^+$ ならば、(x_o, y_o) は規模に関して収穫逓減である、というものである。

一方、包絡形式のアウトプット指向型 BCC モデル（以下、BCC_D-O と略す）は、

$$\text{Max}\quad z_o=\phi+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^+ + \sum_{r=1}^{t} s_r^-\right) \tag{33}$$

$$\text{s. t.}\quad x_{io}-s_i^+=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j,\qquad i=1,\ldots\ldots,m \tag{34}$$

$$\phi y_{ro}+s_r^-=\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j,\qquad r=1,\ldots\ldots,t \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \tag{36}$$

$$\lambda_j,\ \ s_i^+,\ \ s_r^-\geqq 0,\qquad \forall\, j, i, r \tag{37}$$

6）参考文献[10] 70-72頁を参照されたい。

で、乗数形式のアウトプット指向型 *BCC* モデル（以下、BCC_P-*O* と略す）は、

$$\text{Min} \quad w_o = \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} - V_o \tag{38}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{r=1}^{t} u_r y_{ro} = 1 \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{t} u_r y_{rj} - V_o \geqq 0, \qquad j=1,\ldots\ldots,n \tag{40}$$

$$\nu_i, \quad u_r \geqq \varepsilon, \qquad \forall\, i,r \tag{41}$$

で示すことができる。ここに、V_o は $e\lambda=1$ に対する双対変数であり、符号の制約はない。また、効率性の判定条件と効率化のための改善策は、アウトプット指向型 *CCR* モデルのときと同じになることはいうまでもない。

4．数値例

以上、2 タイプ 4 種類の基本モデルについて考察してきたが、それらを簡単な数値例に適用してみることにしよう。数値例として、8 個の事業体 A,B,C,D,E,F,G,H のインプットとアウトプットが第 1 表のように与えられている状況を想定する。

第 1 表

事　業　体	A	B	C	D	E	F	G	H
インプット	2	3	4	5	6	8	9	10
アウトプット	3	6	2	4	8	7	9	8

まず、インプット指向型 *CCR* モデルを用いて 8 個の事業体の効率性を測定・評価してみよう。そのためには、各事業体ごとに CCR_P-*I* と CCR_D-*I* を定式化し、それらの最適解を求めなければならない。その結果を纏めたのが第 2 表である。

第2表

事業体	$\langle CCR_D\text{-}I \rangle$ $z_o=\theta$	s^+	s^-	λ	$\langle CCR_P\text{-}I \rangle$ w_o	u	ν
A	3/4	0	0	$\lambda_2=1/2$	3/4	1/4	1/2
B	1	0	0	$\lambda_2=1$	1	1/6	1/3
C	1/4	0	0	$\lambda_2=1/3$	1/4	1/8	1/4
D	2/5	0	0	$\lambda_2=2/3$	2/5	1/10	1/5
E	2/3	0	0	$\lambda_2=4/3$	2/3	1/12	1/6
F	7/16	0	0	$\lambda_2=7/6$	7/16	1/16	1/8
G	1/2	0	0	$\lambda_2=3/2$	1/2	1/18	1/9
H	2/5	0	0	$\lambda_2=4/3$	2/5	1/20	1/10

ここで、例えば事業体 A の最適解は、$CCR_P\text{-}I$ の場合、

$$\begin{aligned}
&\text{Max} && w_o=3u \\
&\text{s. t.} && 2\nu=1,\quad 3u-2\nu\leqq 0,\quad 6u-3\nu\leqq 0,\quad 2u-4\nu\leqq 0, \\
& && 4u-5\nu\leqq 0,\quad 8u-6\nu\leqq 0,\quad 7u-8\nu\leqq 0,\quad 9u-9\nu\leqq 0, \\
& && 8u-10\nu\leqq 0,\quad \nu\geqq\varepsilon,\quad u\geqq\varepsilon
\end{aligned}$$

を、$CCR_D\text{-}I$ の場合、

$$\begin{aligned}
&\text{Min} && z_o=\theta-\varepsilon(s^++s^-) \\
&\text{s. t.} && 2\theta-2\lambda_1-3\lambda_2-4\lambda_3-5\lambda_4-6\lambda_5-8\lambda_6-9\lambda_7-10\lambda_8-s^+=0 \\
& && 3\lambda_1+6\lambda_2+2\lambda_3+4\lambda_4+8\lambda_5+7\lambda_6+9\lambda_7+8\lambda_8-s^-=3 \\
& && s^+\geqq 0,\quad s^-\geqq 0,\quad \lambda_j\geqq 0,\quad (j=1,\ldots\ldots,8)
\end{aligned}$$

を、解くことによって求められる。第 2 表をみれば、効率的な事業体は B のみであり、B がすべての事業体の参照集合になっていること、また、例えば、非効率的と判定された事業体 A は、現在のインプット値を 3/4 倍に縮小することによって効率的な事業体へと改善できること、などがわかる。

同様に、第 1 表のデータをアウトプット指向型 *CCR* モデルに適用すれば、第 3 表のような結果が得られる。

第 3 表

事業体	<CCR_D–O>				<CCR_P–O>		
	$z_o=\phi$	s^+	s^-	λ	w_o	u	ν
A	4/3	0	0	$\lambda_2=2/3$	4/3	1/3	2/3
B	1	0	0	$\lambda_2=1$	1	1/6	1/3
C	4	0	0	$\lambda_2=4/3$	4	1/2	1
D	5/2	0	0	$\lambda_2=5/3$	5/2	1/4	1/2
E	3/2	0	0	$\lambda_2=2$	3/2	1/8	1/4
F	16/7	0	0	$\lambda_2=8/3$	16/7	1/7	2/7
G	2	0	0	$\lambda_2=3$	2	1/9	2/9
H	5/2	0	0	$\lambda_2=10/3$	5/2	1/8	1/4

アウトプット指向型 *CCR* モデルの有効フロンティアは、第 3 表からもわかるように、インプット指向型 *CCR* モデルのそれと同じになる。しかし、非効率的と判定された事業体の改善策には違いがみられる。例えば、非効率的な事業体 A の効率化は、前述のインプット指向型 *CCR* モデルの場合と異なり、現在のアウトプット値を 4/3 倍に拡大することによって達成される。

次に、インプット指向型 *BCC* モデルを用いて数値例を分析した結果を示すと、第 4 表のようになる。ここで、例えば事業体 B の最適解を求めるためには、BCC_P–I の場合、

$$\begin{array}{lllll}
\text{Max} & w_o=6u-U_o & & \\
\text{s. t.} & 3\nu=1, & 3u-2\nu-U_o\leqq 0, & 6u-3\nu-U_o\leqq 0, \\
& 2u-4\nu-U_o\leqq 0, & 4u-5\nu-U_o\leqq 0, & 8u-6\nu-U_o\leqq 0, \\
& 7u-8\nu-U_o\leqq 0, & 9u-9\nu-U_o\leqq 0, & 8u-10\nu-U_o\leqq 0, \\
& \nu\geqq\varepsilon, & u\geqq\varepsilon &
\end{array}$$

を、BCC_D–I の場合、

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & z_o=\theta-\varepsilon(s^++s^-) \\
\text{s. t.} & 3\theta-2\lambda_1-3\lambda_2-4\lambda_3-5\lambda_4-6\lambda_5-8\lambda_6-9\lambda_7-10\lambda_8-s^+=0
\end{array}$$

$$3\lambda_1+6\lambda_2+2\lambda_3+4\lambda_4+8\lambda_5+7\lambda_6+9\lambda_7+8\lambda_8-s^-=6$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8=1$$
$$s^+\geqq 0,\quad s^-\geqq 0,\quad \lambda_j\geqq 0,\quad (j=1,\ldots\ldots,8)$$

を、解けばよいことがわかる。

第4表

事業体	<BCC_D-I>				<BCC_P-I>			
	θ	s^+	s^-	λ	w_o	u	ν	U_o
A	1	0	0	$\lambda_1=1$	1	ε	1/2	$-1+3\varepsilon$
B	1	0	0	$\lambda_2=1$	1	1/9	1/3	$-1/3$
C	$1/2-\varepsilon$	0	1	$\lambda_1=1$	$1/2-\varepsilon$	ε	1/4	$-1/2+3\varepsilon$
D	7/15	0	0	$\lambda_1=2/3,\ \lambda_2=1/3$	7/15	1/15	1/5	$-1/5$
E	1	0	0	$\lambda_5=1$	1	1/4	1/6	1
F	9/16	0	0	$\lambda_2=1/2,\ \lambda_5=1/2$	9/16	3/16	1/8	3/4
G	1	0	0	$\lambda_7=1$	1	1/3	1/9	2
H	3/5	0	0	$\lambda_5=1$	3/5	3/20	1/10	3/5

第4表は、効率的な事業体が A,B,E,G の4つであること、また、非効率的であると判定された事業体に対する参照集合は、C の場合が A、D の場合が A と B、F の場合が B と E、H の場合が E であることを示している。さらに、例えば事業体 C は、現在のインプット値を1/2倍に縮小し、アウトプット値を1単位増やして3単位にすることによって効率化できることもわかる。なお、有効フロンティア上にある事業体 A,B,E,G が、規模に関して収穫逓増、不変、逓減のどのタイプに属するのかを判定するために、U_o の上限値 U^+ と下限値 U_- を求めると、

	A	B	E	G
U^+	$-1/2$	2	3	∞
U_-	-1	$-1/3$	1	2

を得る。したがって、A は逓増型、B は不変型、E と G は逓減型であるということができる。すなわち、例えば A は、現在の生産可能集合 T のもとで、規模の拡大によって、効率性を増大させることが可能であるといえる。

最後に、アウトプット指向型 *BCC* モデルへの適用結果を示すと、第5表のようになる。

第5表

事業体	<BCC_D-O>				<BCC_P-O>			
	ϕ	s^+	s^-	λ	w_o	u	ν	V_o
A	1	0	0	$\lambda_1=1$	1	1/3	1	1
B	1	0	0	$\lambda_2=1$	1	1/6	1/9	$-2/3$
C	10/3	0	0	$\lambda_2=2/3, \lambda_5=1/3$	10/3	1/2	1/3	-2
D	11/6	0	0	$\lambda_2=1/3, \lambda_5=2/3$	11/6	1/4	1/6	-1
E	1	0	0	$\lambda_5=1$	1	1/8	1/24	$-3/4$
F	26/21	0	0	$\lambda_5=1/3, \lambda_7=2/3$	26/21	1/7	1/21	$-6/7$
G	1	0	0	$\lambda_7=1$	1	1/9	ε	$-1+9\varepsilon$
H	$9/8+\varepsilon$	1	0	$\lambda_7=1$	$9/8+\varepsilon$	1/8	ε	$-9/8+9\varepsilon$

アウトプット指向型 BCC モデルの有効フロンティアは、インプット指向型 BCC モデルと同じ形をしているが、非効率的な事業体 C,D,F,H の参照集合には違いがある。すなわち、C と D に対しては B と E が、F に対しては E と G が、H に対しては G が、それぞれの参照集合になっている。また、非効率的な事業体の改善策もインプット指向型 *BCC* モデルの場合と異なっている。例えば、事業体 C は、現在のアウトプット値を 10/3 倍に拡大することによって効率的な事業体へと改善できる。

5. 結

実際に DMU_o の効率性を計算する場合には、乗数形式で表されたモデルよりも包絡形式で表されたモデルを解いた方が有利であることが多い。例えばインプット指向型 *CCR* モデルについてみてみると、1) CCR_P-I が $1+n+m+t$ 個の制約式をもつのに対して、CCR_D-I の制約式の数は $m+t$ 個であり、しかも n は

$m+t$ よりもかなり大きくなる可能性があるため、CCR_D-I の方が計算時間が少なくてすむ、2) CCR_D-I からは、最適な縮小率に加えてインプットとアウトプットのスラック値が求まるため、DMU_o が効率的でない場合に改善策を容易に見いだすことができる、といった利点を CCR_D-I についてあげることができる。同様のことが、インプット指向型 CCR モデル以外のモデルに対しても当てはまることはいうまでもない。

なお、本稿で取りあげた CCR モデルと BCC モデルのほかに、基本モデルとして、加法モデルと乗法モデルが考案されていることを付記しておく。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

<参考文献>

[1] Adolphson, D. L., Cornia, G. C., Walters, L. C. (1991), A Unified Framework for Classifying DEA Models, in Hugh E. Bradley (ed.), *Operational Research '90*, Pergamon Press, pp. 647–657.

[2] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W. (1984), Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, Vol. 30, No. 9, pp. 1078–1092.

[3] Banker, R. D., Thrall, R. M. (1992), Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, Vol. 62, No. 1, pp. 74–84.

[4] Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J. (1985), Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto–Koopmans Efficient Empirical Production Functions, *Journal of Econometrics*, Vol. 30, No. 1/2, pp. 91–107.

[5] Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y., Seiford, L. M. (eds.) (1994), *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology, and Applications*, Kluwer Academic Publishers.

[6] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E. (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, No. 6, pp. 429–444.

[7] Norman, M., Stoker, B. (1991), *Data Envelopment Analysis : The Assessment of Performance*, John Wiley & Sons.

[8] Seiford, L. M., Thrall, R. M. (1990), Recent Developments in DEA : The

Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis, *Journal of Econometrics*, Vol. 46, No. 1/2, pp. 7–38.

[9] 刀根薫（1993）「DEA のモデルをめぐって」『オペレーションズ・リサーチ』Vol. 38、No. 1、34–40頁。

[10] 刀根薫（1993）『経営効率性の測定と改善―包絡分析法 DEA による―』日科技連。

[11] 刀根薫（1995）「DEA のモデルをめぐって―再論―」『オペレーションズ・リサーチ』Vol. 40、No. 12、681–685頁。