入力変数が酔歩過程に従う有理型伝達関数モデルとその推定

杉　原　左右一

Ⅰ．はじめに

本稿では入力変数が酔歩過程に従う有理型伝達関数モデルをとりあげ、その誤差修正表現を導出して、母数の統計的推定問題について考察したい。特に本稿では初期値として一致推定量を用いる２段階推定法を提示してその統計的諸性質について考察する。

以下まずⅡ節で有理型伝達関数モデルの概要について述べ、同モデルの誤差修正表現を導出する。これをもとにⅢ節で母数の２段階推定法とその統計的諸性質を明らかにする。またⅣ節で簡単な有理型伝達関数モデルを用いて小規模ではあるが母数推定のシミュレーションを実行した結果を報告する。Ｖ節は本稿のまとめである。

Ⅱ．入力変数が酔歩過程に従う有理型伝達関数モデルとその誤差修正表現

x_t，y_t，u_tをそれぞれ入力変数、出力変数、攪乱項として、次式で表わされる有理型伝達関数モデルを考える。

$$(1)\quad y_t=\frac{b(L)}{a(L)}x_t+u_t$$

但し、Lはラグ演算子を示し、a(L)，b(L)は次式で与えられるラグ演算子である。

(2)　$a(L)=1-\sum_{i=1}^{p}a_i L^i$

(3)　$b(L)=b_0-\sum_{i=1}^{p}b_i L^i$

上式でLの次数pは固定されておりその値は既知であるものとする。

さて、上記有理型伝達関数モデルに次の仮定1、2、3を設定しよう。

仮定1　$x_t=x_{t-1}+\varepsilon_t$

仮定2　$a(z)=0$ の根は単位円外にある。

仮定3　$\begin{pmatrix}\varepsilon_t\\ u_t\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2 & 0\\ 0 & \sigma_u^2\end{pmatrix}\right)$

x_t が定常的に変動する場合に関しては既に幾つかの研究がなされているが[1)]、本稿では仮定1に示されている様に、従来の議論を x_t が酔歩過程に従う場合に拡張することを考える。仮定2はシステムの安定性を保証するものである。また本稿では仮定3で示される様に、入力変数 x_t と攪乱項 u_t は独立であるものとする。より一般的には x_t と u_t が相関を持つ場合も考えられようが、仮定3を設定しても本稿での議論の本質を見失うことはないであろう。

さて、上記有理型伝達関数モデルの誤差修正表現を導出するために、まず、$a(L)$, $b(L)$ を次の様に表現出来ることに注意しよう。

(4)　$a(L)=a(1)+(1-L)a^*(L)$

(5)　$b(L)=b(1)+(1-L)b^*(L)$

但し、$a(1)$, $b(1)$, $a^*(L)$, $b^*(L)$ はそれぞれ次式で定義される。

(6)　$a(1)=1-\sum_{i=1}^{p}a_i$、$b(1)=b_0-\sum_{i=1}^{p}b_i$

$a^*(L)=\sum_{i=0}^{p-1}a_i^*L^i$、$a_i^*=\sum_{j=1}^{p-i}a_{i+j}\ (i=0, 1, \cdots, p-1)$

$b^*(L)=\sum_{i=0}^{p-1}b_i^*L^i$、$b_i^*=\sum_{j=1}^{p-i}b_{i+j}\ (i=0, 1, \cdots, p-1)$

(4)、(5)式を用いれば(1)式の一つの誤差修正表現として次式を得る。

(7)　$y_t=\gamma x_t+\alpha(L)\triangle y_t+\beta(L)\triangle x_t+\xi_t$

(8)　$\quad=\gamma x_t-\dfrac{1}{a(1)}\sum_{i=1}^{p}a_i(y_t-y_{t-i})+\dfrac{1}{a(1)}\sum_{i=1}^{p}b_i(x_t-x_{t-i})+\xi_t$

1）一例として末尾の注を参照されたい。

(9)　$\xi_t = u_t - \alpha(L)\triangle u_t$

但し、上式の記号はそれぞれ次式を意味するものとする。

(10)　$\gamma = \dfrac{b(1)}{a(1)}$

$$\alpha(L) = -\frac{a^*(L)}{a(1)} = \sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i L^i,\quad \alpha_i = -\frac{a_i^*}{a(1)}$$

$$\beta(L) = \frac{b^*(L)}{a(1)} = \sum_{i=0}^{p-1}\beta_i L^i, \beta_i = \frac{b_i^*}{a(1)}$$

$$\triangle = (1-L)$$

(7)式で γx_t は x_t の y_t に対する所謂長期的効果を表わすものであり、また $\alpha(L)\triangle y_t + \beta(L)\triangle x_t$ は y_t と γx_t との誤差 $y_t - \gamma x_t$ の修正メカニズムを具体的に表現したものに他ならない。

上式で $\triangle x_t$, $\triangle y_t$, $(x_t - x_{t-i})$, $(y_t - y_{t-i})$ はそれぞれ

(11)　$\triangle x_t = \varepsilon_t$

$$\triangle y_t = \frac{b(L)}{a(L)}\triangle x_t + \triangle u_t$$

$$x_t - x_{t-i} = \sum_{s=0}^{i-1}\varepsilon_{t-s}$$

$$y_t - y_{t-i} = \frac{b(L)}{a(L)}(x_t - x_{t-i}) + (u_t - u_{t-i})$$

と表わせるから、$y_t - \gamma x_t$ が定常過程となっていることが理解出来る。

なお、(7)、(8)式とは別に(1)式の他の誤差修正表現として次式を用いることも有効であろう。

(12)　$a(L)(y_t - \gamma x_t) = (b^*(L) - \gamma a^*(L))\triangle x_t + a(L)u_t$

(13)　$= \sum_{i=1}^{p}(b_i - \gamma a_i)(x_t - x_{t-i}) + a(L)u_t$

以後の分析の便宜のために、ここで(7)式の母数を次の様にベクトル化して表わそう。

(14)　$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{p-1})'$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_{p-1})'$

$$\eta = (\alpha', \beta')', \delta = (\gamma, \eta')'$$

また、(8)式及び(12)、(13)式の母数を次の様にベクトル化して表わす。

(15)　$a=(a_1, a_2, \cdots, a_p)'$,　$b=(b_1, b_2, \cdots, b_p)'$,　$c=(a', b')'$,　$d=(\gamma, c')'$

特に c と η の間には次の様な関係が成立している。

(16)　$a=-D^{-1}\alpha$

$$b=(1+e'D^{-1}\alpha)\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\beta$$

但し、D、e はそれぞれ次式を意味するものとする。

$$(17)\quad D=\begin{pmatrix} 1-\alpha_0 & 1-\alpha_0 & \cdots & 1-\alpha_0 \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_1 & \cdots & 1-\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-1} & \cdots & 1-\alpha_{p-1} \end{pmatrix}_{p\times p}$$

$$e=(1, 1, \cdots, 1)'_{P\times 1}$$

なお、(7)、(8)、(12)、(13)式には母数 b_0 が含まれていないことに注意したい。b_0 は δ ないし d を用いて次の様に表わせる。

$$(18)\quad b_0=(1+e'D^{-1}\alpha)(\gamma+\beta_0) = \gamma a(1)+\sum_{i=1}^{p} b_i$$

Ⅲ．母数の2段階推定とその統計的性質

本稿では上記誤差修正表現モデルの母数 d の統計的推定について考察する。特に本稿では以下に示す様に第1段階として母数 δ の一致推定量を求め、これをもとに第2段階として Newton-Raphson 法により母数 d の推定量を求める2段階推定法を提示し、その統計的性質について考察することにしたい。

まず第1段階として、(7)式の母数 δ を操作変数法により推定する。操作変数としては、(7)式右辺第1項の x_t に対する操作変数として特に x_t 自身を選び、また右辺第2、3項の（$\triangle y_t$, $\triangle x_t$）に対しては適当なラグ付き $\triangle x_t$、ないし攪乱項 ξ_t が MA(P) 過程に従うことを考慮して ξ_t と無相関となる様に適当なラグ付き $\triangle y_t$ を選ぶことにする。

この様にして求められたδの操作変数推定量を$\tilde{\delta}=(\tilde{\gamma},\tilde{\eta}')'$と表わせば、若干の計算の後、$\tilde{\delta}$は$\delta$の一致推定量であり、特に$\tilde{\gamma}$についてはその極限分布として、

$$(19)\quad T(\tilde{\gamma}-\gamma)\xrightarrow{d}\frac{\int_0^1 W(r)dV(r)}{\int_0^1 W^2(r)dr}$$

が成立し[2]、さらに$\sqrt{T}(\tilde{\eta}-\eta)$の極限分布は$T(\tilde{\gamma}-\gamma)$とは独立に多変量正規分布に従うことを示すことが出来る。但し(19)式で$(W(r),V(r))'$は分散共分散行列が$\mathrm{Diag}(\sigma_\varepsilon^2,\ \sigma_u^2)$のウィナー過程である。特に、$\tilde{\gamma}$は$\gamma$の超一致推定量であり、その極限分布が(19)式右辺で与えられる混合正規分布となっていることに注意したい。後述する様にこの極限分布は2段階目に得られるγの推定量$\hat{\gamma}$の極限分布と一致していることから、操作変数を上記した様に選択することにより第1段階で既に第2段階で得られる推定量と同一の極限分布を持つ推定量を得ることが出来ることが分かるのである。この様にして求めた一致推定量$\tilde{\delta}$を用いて、a、bの一致推定量$\tilde{a}$, $\tilde{b}$を(16)式より、

$$(20)\quad \tilde{a}=-\tilde{D}^{-1}\tilde{\alpha}$$

$$\tilde{b}=(1+e'\tilde{D}^{-1}\tilde{\alpha})\begin{pmatrix}1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1\end{pmatrix}\tilde{\beta}$$

として求める。また、$\tilde{c}=(\tilde{a}',\tilde{b}')'$とし、dの一致推定量を$\tilde{d}=(\tilde{\gamma},\tilde{c}')'$と表わすことにする。

なお、b_0の一致推定量$\tilde{b}_0$は(18)式より

$$(21)\quad \tilde{b}_0=(1+e'\tilde{D}^{-1}\tilde{\alpha})(\tilde{\gamma}+\tilde{\beta}_0)$$

として求めることが出来る。但し、原モデルのすべての母数$(b_0,c')'$の推定量$(\tilde{b}_0,\tilde{c}')'$についてはその極限分布が縮退してしまうことを注意しておきたい。

---

2) 特に(19)式に関しては、例えばKaratzas, I., and S. E. Shreve〔1〕, Phillips, P. C. B.〔2〕が参考になる。

何故なら

$$(22)\quad \sqrt{T}(\tilde{b}-b_0, \tilde{c}'-c')' = \frac{\partial(b_0, c')'}{\partial\delta'}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} & & \\ & I_p & \\ & & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T(\tilde{\gamma}-\gamma) \\ \sqrt{T}(\tilde{\alpha}-\alpha) \\ \sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\text{ に関する 2 次微分} \\ \text{以上を含む項} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial(b_0, c')'}{\partial\delta'}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_p & \\ & & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T(\tilde{\gamma}-\gamma) \\ \sqrt{T}(\tilde{\alpha}-\alpha) \\ \sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta) \end{pmatrix} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

となるが、

$$(23)\quad K_0 = \frac{\partial(b_0, c')'}{\partial\delta'}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_p & \\ & & I_p \end{pmatrix}$$

とすると、一般に $\mathrm{rank}(K_0)=2p(<2p+1)$ となるからである。

さて、次に第2段階として、第1段階で求めた d の一致推定量 $\tilde{d}$ を初期値に用いて、Newton–Raphson 法により d の推定量 $\hat{d}=(\hat{\gamma}, \hat{c}')'$ を求める。(7)式を用いても良いが(12)式ないし(13)式の方が計算はより容易であろう。なお第2段階の Newton–Raphson 法は原則的には反復する必要はないことに注意したい。

第2段階で得られた推定量 $\hat{d}$ について、若干の計算の後、その極限分布が次式で与えられることを示すことが出来る[3)]。

$$(24)\quad T(\hat{\gamma}-\gamma) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 W(r)dV(r)}{\int_0^1 W^2(r)dr}$$

$$(25)\quad \sqrt{T}(\hat{c}-c) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_u^2\Omega_c^{-1})$$

但し、$(W(r), V(r))'$ は前述と同様であり、Ω_c は次式で与えられる。

3) 特に(24)式に関しては注2を参照のこと。

(26) $\Omega_c = p\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial u_t}{\partial c} \frac{\partial u_t}{\partial c'}$

ここで、u_t は

(27) $$u_t = y_t - \gamma x_t - \frac{1}{a(L)}(b^*(L) - \gamma a^*(L))\triangle x_t$$

$$= y_t - \gamma x_t - \frac{1}{a(L)} \sum_{i=1}^{p} (b_i - \gamma a_i)(x_t - x_{t-i})$$

である。また、$T(\hat{\gamma}-\gamma)$ と $\sqrt{T}(\hat{c}-c)$ とは漸近的に独立であることを指摘しておきたい。なお、上記極限分布に関して特に $T(\hat{\gamma}-\gamma)$ の極限分布が先述した様に第1段階で求めた $T(\tilde{\gamma}-\gamma)$ の極限分布と一致していることから、γ の推定量の極限分布に関して議論する限り第2段階目を実行する必要はない。但し実際には γ を含めた d について第2段階を実行することが好ましいであろう。b_0 については $\hat{d}$ を用いて、(18)式より

(28) $\hat{b}_0 = \hat{\gamma}\hat{a}(1) + \sum_{i=1}^{p} \hat{b}_i$

により推定すれば良い。また σ_u^2 については、$\hat{d}$ を用いて(27)式より求めた u_t の推定量 $\hat{u}_t$ をもとに推定すれば良いだろう。

なお、最後に、(1)式で表わされる原モデルのすべての母数 $(b_0, c')'$ の推定量 $(\hat{b}_0、\hat{c}')'$ についてもその極限分布が縮退してしまうことを指摘しておきたい。何故なら、前述と同様にすればこの場合には、

(29) $$\sqrt{T}(\hat{b}_0 - b_0、\hat{c}' - c')' = K_1 \begin{pmatrix} T(\hat{\gamma}-\gamma) \\ \sqrt{T}(\hat{a}-a) \\ \sqrt{T}(\hat{b}-b) \end{pmatrix} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$$

となる。ここで K_1 は

(30) $$K_1 = \frac{\partial(b_0, c')'}{\partial d'} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_p & \\ & & I_p \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} a(1), & -\gamma e', & e' \\ & I_p & \\ & & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_p & \\ & & I_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0, & -\gamma e', & e' \\ & I_p & \\ & & I_p \end{pmatrix}
$$

であり、$\mathrm{rank}(K_1)=2p(<2p+1)$となるからである。なお、別に(18)式を用いれば、

$$
(31)\quad \sqrt{T}(\hat{b}_0-b_0)=\frac{-1}{T}(T(\hat{\gamma}-\gamma)e'\sqrt{T}(\hat{a}-a))
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{T}}a(1)T(\hat{\gamma}-\gamma)
$$

$$
+e'(\sqrt{T}(\hat{b}-b)-\gamma\sqrt{T}(\hat{a}-a))
$$

と表わせることに注意しよう。上式で右辺第1項、第2項がそれぞれ$O_p\left(\frac{1}{T}\right)$, $O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$であることに注意すれば(30)式右辺の最後に与えられるK_1を用いてより直接的に(29)式を導出することも出来る。

Ⅳ. シミュレーション例

具体的な一例として、次式で表わされる簡単な有理型伝達関数モデルについて極めて小規模ではあるが本稿の2段階推定法を用いて母数推定を行ったシミュレーション結果を報告しておこう。

$$
(32)\quad y_t=\frac{b(L)}{a(L)}x_t+u_t
$$

$$
x_t=x_{t-1}+\varepsilon_t
$$

$$
a(L)=1-a_1L_1,\quad b(L)=b_0-b_1L
$$

この場合は仮定2より$|a_1|<1$である。

(7)、(9)式は次式で与えられる。

$$
(33)\quad y_t=\gamma x_t+\alpha_0\triangle y_t+\beta_0\triangle x_t+\xi_t
$$

$$
(34)\quad \xi_t=u_t-\alpha_0\triangle u_t
$$

ここで、γ、α_0、β_0はそれぞれ次式で与えられる。

(35) $\gamma=\dfrac{b(1)}{a(1)}=\dfrac{b_0-b_1}{1-a_1}$

$\alpha_0=-\dfrac{a_1}{a(1)},\ \beta_0=\dfrac{b_1}{a(1)}$

また、(12)式は次式で与えられる。

(36) $a(L)(y_t-\gamma x_t)=(b_1-\gamma a_1)\triangle x_t+a(L)u_t$

ここでは(32)式の母数$(a_1, b_0, b_1)'$と、分散$(\sigma_\varepsilon^2, \sigma_u^2)'$を具体的に$a_1=0.8$, $b_0=2$, $b_1=-1$, $\sigma_\varepsilon^2=2$, $\sigma_u^2=1$とする。従って$\gamma=\dfrac{b_0-b_1}{1-a_1}=15$となる。III節で述べた2段階推定法により(36)式の母数$d=(\gamma, a_1, b_1)'$とb_0, σ_u^2の推定値を求めた結果を下表に示す。但し第1段階で用いる操作変数はいずれも$\{x_t, \triangle x_{t-1}, \triangle x_t\}$であり、T=100とし、シミュレーション回数は200回である。また、モデルの初期値と操作変数のラグを考慮し、t=3, 4, …, 100について推定を行っている。

母数	推定値	真値
γ	15.0004 (0.0359)	15
a_1	0.8000 (0.0079)	0.8
b_1	−1.0041 (0.1667)	−1

母数	推定値	真値
b_0	1.9944 (0.0897)	2
σ_u^2	1.0328 (0.1974)	1

(( )内の数値は標準誤差を示す。)

今後本格的なシミュレーションを実施し、操作変数や標本数の選択に応じて結果がどの様に変化するかをより詳細に考察する必要があることは言うまでもないが、極めて小規模なシミュレーションであるとは言え、上記結果からも本稿で提示した2段階推定方法が妥当な推定値を与えていることが推察出来るのである。

V. おわりに

本稿では、入力変数が酔歩過程に従う有理型伝達関数モデルについて、その誤差修正表現を導出した上で、母数の2段階推定法と推定量の統計的性質につ

いて考察し、簡単な有理型伝達関数モデルについて小規模ではあるがシミュレーションを実行した一例を紹介した。本稿で提示した方法は、操作変数法を用いて一致推定量を求める第1段階と、Newton–Raphson 法により母数を推定する第2段階から成り、実用的にも有用な方法と言えるであろう。なお、極限分布に関して議論する限り、第2段階の Newton–Raphson 法では原則的には反復計算は不要であるが、実際には推定値が収束するまで反復計算を実行することが好ましいであろう。

なお、本稿の結果を用いて、本稿のモデルを入力変数がI(1) 変数である場合や2種類以上の入力変数が存在する場合に拡張することも可能である。シミュレーションやその他の問題と共に別稿でさらに考察することにしたい。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

（注） 入力変数が定常的に変動する場合について

参考までに、これまでの議論との比較の意味で、II節(1)式で表わされる有理型伝達関数モデルについて、仮定1に代わって、x_t が定常的に変動する場合として次の仮定1′を設定した場合について得られた結果をまとめておくことにしたい。なお他の仮定2、3については以前と同様であるものとする。

仮定1′ x_t は有界な確定的変数であり、

(1) $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-h}x_t x_{t+k}=\rho(h) \quad h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

が存在し、$\rho(0)>0$.

仮定1′より、x のスペクトル分布関数 $F_x(\lambda)$が存在して、

(2) $$\rho(h)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda h}\,dF_x(\lambda)$$

と表わせることに注意しよう。

以後の便宜のために、II節(1)式で表わされる原モデルの母数をベクトル化して次式で表わすことにする。

(3) $$a=(a_1, a_2, \cdots, a_p)',\quad b^0=(b_0, b_1, \cdots, b_p)',\quad c^0=(a', b^{0\prime})'$$

さて、母数 c^0 の最尤推定量を $\hat{c}^0$ とすれば、その極限分布について次式が成立することを示すことが出来る。

(4) $\sqrt{T}(\hat{c}^0 - c^0) \xrightarrow{d} N(0, \Omega_{c^0}^{-1})$

但し、Ω_{c^0} とその要素はそれぞれ次式で与えられる。

(5) $$\Omega_{c^0} = \begin{pmatrix} \Omega_{aa}, & \Omega_{ab^0} \\ \Omega_{ab^0}', & \Omega_{b^0b^0} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{aa} = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|b(e^{i\lambda})|^2}{|a(e^{i\lambda})|^4} E_a(e^{i\lambda}) E_a^*(e^{i\lambda}) dF_x(\lambda)$$

$$\Omega_{ab^0} = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b(e^{i\lambda})}{|a(e^{i\lambda})|^2 a(e^{i\lambda})} E_a(e^{i\lambda}) E_{b^0}^*(e^{i\lambda}) dF_x(\lambda)$$

$$\Omega_{b^0b^0} = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|a(e^{i\lambda})|^2} E_{b^0}(e^{i\lambda}) E_{b^0}^*(e^{i\lambda}) dF_x(\lambda)$$

上記の記号の意味はそれぞれ次式で与えられる。

(6) $$a(e^{i\lambda}) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k e^{i\lambda k}, \quad b(e^{i\lambda}) = b_0 - \sum_{k=1}^{p} b_k e^{i\lambda k}$$

$$E_a(e^{i\lambda}) = (-e^{i\lambda 1}, -e^{i\lambda 2}, \cdots, -e^{i\lambda p})'$$

$$E_{b^0}(e^{i\lambda}) = (e^{i\lambda 0}, e^{i\lambda 1}, \cdots, e^{i\lambda p})'$$

$$E_a^0(e^{i\lambda}) = E_a'(e^{-i\lambda}), \ E_{b^0}^*(e^{i\lambda}) = E_{b^0}'(e^{-i\lambda})$$

参考文献

〔1〕 Karatzas, I., and S. E. Shreve (1991), Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd. Ed., Springer-Verlag.

〔2〕 Phillips, P. C. B. (1987), "Time Series Regression with a Unit Root," Econometrica, 55, 277-301.