階層化意思決定法について

瀬　見　　　博

I．序

意思決定とは、いくつかの実行可能な代替案の中から、目的の達成にとって最も望ましいと考えられる1つの代替案を、一定の評価基準(選択基準)に基づいて選択することである。その際、評価基準が1つで、しかも、それが明確に定義されており客観的に測定できるものであるならば、代替案の選択は比較的容易に行える。しかし、実際の意思決定はそれほど単純ではない。何故なら、対象となる問題自体が、様々な種類の曖昧性や多様性を含み、極めて複雑な様相を呈しているからである。したがって、現実の意思決定問題の解決にあたっては、1つの評価基準を用いるだけでは不十分であり、通常、いくつもの評価基準が必要とされることになる。また同時に、評価基準の選定が意思決定者の主観的判断に委ねられることが多いので、意思決定者ごとに評価基準が異なる可能性があるとか、評価基準が客観的に評価できない場合がある、といった問題も生じる。例えば、住宅の購入という決定問題に直面した時、価格、住宅の規模、間取り、交通の至便性、近隣の環境など多くの評価基準を同時に考慮して、いくつかの候補の中から1つの住宅が選定される。この場合、客観的に判断できる量的な基準と、主観的にしか評価できない質的な基準とが混交して用いられることになる。また、意思決定者が異なれば、インテリアの良し悪しや家屋の築年数といった別の評価基準が採用されることもある。

かかる状況下での意思決定問題を解決するための有力な手法の1つに、サー

ティ(Saaty, T. L.)が考案した階層化意思決定法(Analytic Hierarchy Process：以下、AHP と略す）がある[1]。AHP は曖昧で主観的な判断を利用して意思決定が行える問題解決型手法であるため、開発されてからまだ20年にもならないが、既に様々な分野の問題解決に適用され、その有用性が数多くの実証研究によって明らかにされている[2]。

そこで、本稿では、サーティの AHP を取り上げ、まず、それが如何なる手法であるのかを概観し、次いで、AHP を実際に適用した時に起こり得ると考えられるいくつかの問題点と、その解決策について考察してみることにする。

II. AHP の概要

AHP では、通常、次に示す 4 つのステップを踏んで意思決定問題が解決される。

第 1 ステップ－意思決定問題を、まず、それに関連するいくつかの意思決定要素(決定属性)に分解し、次いで、それらの意思決定要素を、さらにそれらに関連する要素に分解していくという手続きを次々と繰り返すことによって、現実の複雑な意思決定問題が 1 つの階層構造の形を用いて表現される。

第 2 ステップ－意思決定要素の一対比較により、要素間の相対的加重値を導きだすためのインプットデータが収集される。

---

1) T. L. Saaty, *Multicriteria Decision Making－The Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications, Pittsburgh, 1990.
T. L. Saaty, *Decision Making for Leaders*, RWS Publications, Pittsburgh, 1995.
T. L. Saaty, *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications,Pittsburgh, 1994.
T. L. Saaty and L. G. Vargas, *The Logic of Priorities: Applications of the Analytic Hierarchy Process in Business, Energy, Health, and Transportation*, RWS Publications, Pittsburgh, 1991.
T. L. Saaty and K. P. Kearns, *Analytical Planning: The Organization of Systems*, RWS Publications, Pittsburgh, 1991.

2) 適用例については、例えば、F. Zahedi, “The Analytic Hierarchy Process－A Survey of the Method and its Applications”, *Interfaces*, Vol. 16, No. 4, 1986, pp. 96–108 を参照されたい。

第 3 ステップ－固有値法(eigenvalue method)を用いて、意思決定要素の相対的加重値が推定される。

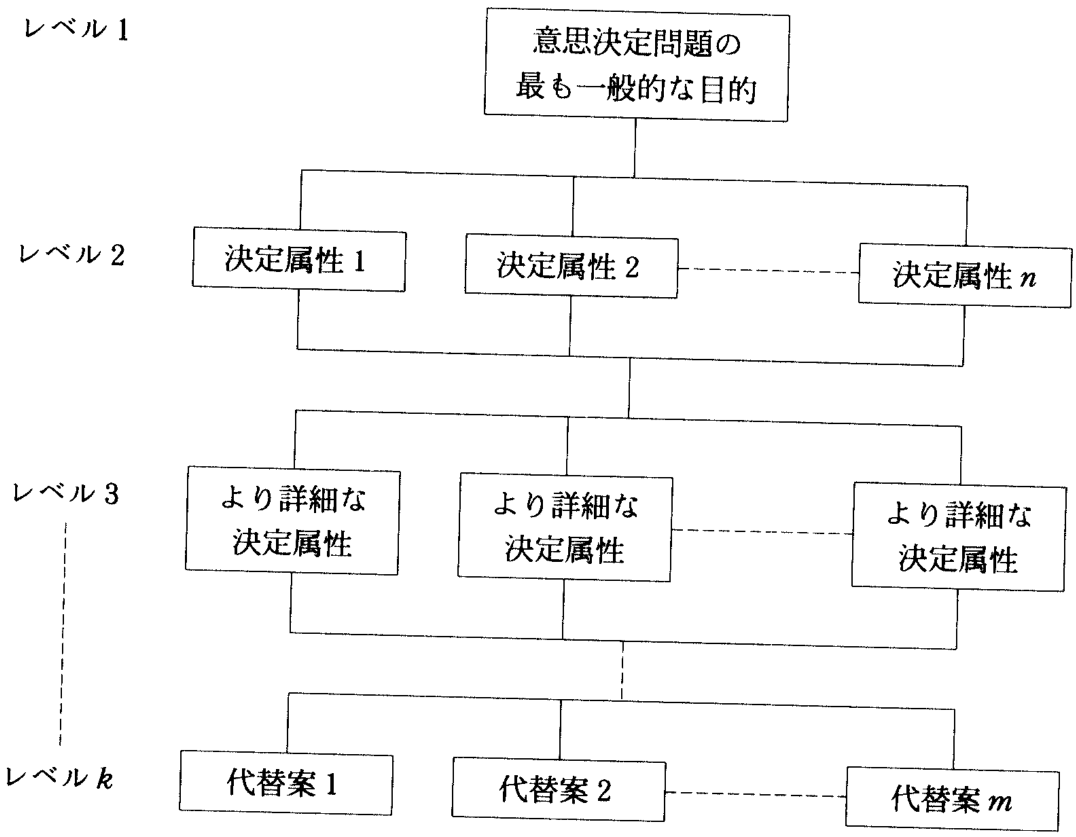
第 4 ステップ－意思決定要素の相対的加重値を総合化することにより、意思決定代替案(結果)の序列が決定される。

以下、それぞれのステップを簡単に概観しておくことにする。

第 1 ステップ

階層構造の構築は、AHP の中でも特に重要な位置を占める。しかし、問題を階層化していく際に従うべき確定された客観的ルールがあるわけではない。一般に、階層構造の最上位は、1 つの要素からなり、最もマクロ的な意思決定目的がおかれる。それより下位の各階層レベルの要素は、意思決定の特性に関連する諸属性(諸下位目的)から構成される。あるレベルの諸要素(諸属性)は、その 1 つ上のレベルの親要素(親属性)との関係から主観的に決定される。 これらの

第 1 図　標準的階層構造



要素(属性)は、階層レベルがより下位になるにつれてさらに細かく分かれていく。すなわち、階層構造のレベルが下がるにつれて属性は具体化されたものになっていく。したがって、最下位の階層レベルに、最も具体的な意思決定代替案がおかれることになる。ここで、階層構造の標準形を図示すれば、第1図のように表すことができる。なお、階層構造を構築する際、階層レベルの数を特に制限する必要はない。それは、意思決定問題の複雑性と、分析者が問題をどの程度詳細に分析することを望んでいるかに依存して決められる。しかし、各階層レベルにおける要素の数は、要素間で一対比較が行われるので、通常、制限することが必要になる。サーティは、それを最大限9個に制限すべきことを提案している。もし、これ以上になれば、人間の比較判断能力の制約から、一対比較に何らかの矛盾が生じる可能性が高くなると考えられるからである。但し、この制約が AHP を適用する際の絶対的な必要条件になるというわけでは決してない。

第2ステップ

第2ステップでは、ある1つのレベルにおける要素間の一対比較が、その1つ上のレベルの親要素を評価基準にして行われる。その際、第1表に与えられている評価値(重要度)が、要素 i と要素 j の比較の結果を表すために用いられる。この尺度は、人間には質的な差異を5段階に分けて明確に区別できる能力があること、しかも、5段階の中の隣接する段階間で質的な違いをはっきり区別できない場合には、どちらともいえないという判断が下せること、さらに、人間の感覚の大きさは、フェヒナーの法則(Fechner's law)に見られるように、等差級数的に変化すること、などを考慮して考案されたものであり、その妥当性が多くの実験により確かめられている。

ところで、比較すべき要素の数が n 個ある時には、$n(n-1)/2$ 組の一対比較を行うことによって、それらの結果を n 行 n 列の正方行列の形で表すことができる。これを n 次の一対比較行列(pairwise comparison matrix)と呼ぶ。一対比較行列では、対角要素の値はすべて1であり、また i 行 j 列の値は j 行 i 列の値の逆数で与えられる。

第1表　一対比較のための基本的尺度

評価値	意味
1	要素 i と j が同程度に重要(equal importance)
3	要素 i が j よりやや重要(moderate importance)
5	要素 i が j より重要(strong importance)
7	要素 i が j よりかなり重要(very strong importance)
9	要素 i が j より極めて重要(extreme importance)
2,4,6,8	上の隣接する2つの判断の中間値。どちらともいえず、妥協が必要な時に用いる。
上記数値の逆数	要素 i と j を入れ換えて比較した場合に用いる。

第3ステップ

第2ステップで得られた一対比較値を用いて、それぞれのレベルにおける要素間の相対的加重値を計算する。

いま、階層のあるレベルの要素 $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ のすぐ上のレベルの要素に対する加重値ベクトル $w=(w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n)^T$ を求めることを考える。C_j に対する C_i の重要度を a_{ij} で表すと、n 個の要素 $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ の一対比較行列 A は、

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

で与えられる。ここに、

$$a_{ji}=1/a_{ij} \tag{2}$$

が成り立つことから、A は逆数行列(reciprocal matrix)と呼ばれる。

ところで、加重値ベクトル w が既知であれば、a_{ij} は、

$$a_{ij}=w_i/w_j \tag{3}$$

と表せるので、すべての i, j, k について、推移律(transitive law)

$$a_{ik}=a_{ij}\times a_{jk} \tag{4}$$

が成立する。これは、一対比較において意思決定者の判断に全く矛盾がないこ

とを意味する。したがって、この場合の一対比較行列 A は次のような整合行列(consistent matrix)になる。

$$A=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots\cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots\cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots\cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

また、(3)式から容易に、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot w_j = n w_i \qquad i=1,\ldots\ldots,n \tag{6}$$

あるいは、

$$Aw=nw \tag{7}$$

の関係式が求められる。この(7)式は、n が A の固有値、w が固有値 n に対応する A の固有列ベクトルであることを示している。ここで、①整合行列 A の階数は1であるから、固有値のうち1つだけが非零の値をとり、残りの$(n-1)$個の固有値は零となること、②行列 A の主対角要素の和は n であること、という2つの事柄を考慮すれば、零でないただ1つの固有値は n で与えられることがわかる。すなわち、n が整合行列 A の最大固有値になる。それ故、加重値ベクトル w は、整合行列 A の最大固有値に対応する固有ベクトルを、その要素の総和が1になるように規準化したものであると解することができる。

さて、意思決定者により作成された実際の一対比較行列 A を考えた場合、それが(5)式のような整合行列の形をしていることは殆ど望めない。何故なら、元来、加重値ベクトル w は未知であり、意思決定者は主観的判断に基づいて一対比較を行うからである。そこには矛盾した判断が含まれる可能性が多分にある。しかし、実際に得られた一対比較行列 A には、ある程度の不整合性は存在しているものの、その度合いはそれほど大きくなく、A はほぼ整合行列に近い形をしたものになっていることが多くの観察や実験によって確かめられている。しかも、(5)式の整合行列 A の整合性が少し失われても、A の最大固有値 λ_{max} は n に近い値を、また残りの固有値も零に近い値をとることが証明でき

る。したがって、n 個の要素の加重値ベクトル w の推定値 w^* は、(7)式と同様に、

$$A^*w^*=\lambda_{\max}w^* \tag{8}$$

から得ることができる。ここに、A^* は実際の一対比較行列を、$\lambda_{\max}$ は A^* の最大固有値を表すものとする。

(8)式において、$\lambda_{\max}$ は(7)式における n の推定値であると見なすことができる。また、一般に、$\lambda_{\max}$ は、

$$\lambda_{\max}\geqq n \tag{9}$$

の関係を満たす[3]。ここに、等号は A^* が整合行列である時にのみ成立する。それ故、$\lambda_{\max}$ の値が n に近い値をとればとるほど、A^* の整合性はよくなることがわかる。

サーティは、A^* の整合性を測る尺度として 2 つの指標を提示している。1 つは、整合度(consistency index)と呼ばれるもので、

$$CI=(\lambda_{\max}-n)/(n-1) \tag{10}$$

により定義される。ここで、行列 A^* は n 個の固有値を持ち、それらの総和が n になることを想起すれば、CI は、最大固有値 $\lambda_{\max}$ 以外の $(n-1)$ 個の固有値の平均的な大きさを示す指標であると見なすことができる。経験則から、この値が 0.1(場合によっては0.15)以下であれば、A^* の整合性に問題はないと判断される。しかし、CI の値が0.1(場合によっては0.15)よりも大きくなれば、行列 A^* そのものを再検討する必要がでてくる。

もう 1 つは、整合比(consistency ratio)と呼ばれる指標である。これは、

$$CR=CI/ARI \tag{11}$$

により与えられる。ここに、ARI とは、1/9, 1/8, ... , 1/2, 1, 2, ... , 9 の各値をランダムに挿入してできる一対比較逆数行列 A の整合度(CI)を多数回計算し、それらの平均をとった値であり、平均ランダム指数(average random index)と名づけられている。サーティの計算結果によれば、次数(n)が 1 から

3) 証明については、例えば、刀根薫、『ゲーム感覚意思決定法－AHP 入門』、日科技連、1986年、35-36頁を参照されたい。

15までの行列についてのARIは、第2表で示されるような値をとる[4]。整合比も整合度と同様に、経験則から、0.1(場合によっては0.15)以下であれば、問題はないとされる。

第2表　平均ランダム指数

n	1	2	3	4	5	6	7	8
ARI	0.00	0.00	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.40
n	9	10	11	12	13	14	15	
ARI	1.45	1.49	1.51	1.54	1.56	1.57	1.58	

第4ステップ

分析対象になっている問題の最も一般的な目的を達成するために、代替案の順位づけに役立つ合成加重値ベクトルが算定される。これは、第3ステップで得られた階層の各レベルにおける相対的加重値w^*を、

$$C[1,k]=\prod_{i=2}^{k} B_i \tag{12}$$

により集計することで求められる。ここに、$C[1,k]$は第1レベルの要素に関する第kレベルの要素の合成加重値ベクトル、B_iはその行の要素が推定加重値ベクトルw^*から構成されるn_{i-1}行n_i列の行列を表す。また、n_iはレベルiにおける要素の数を示し、(7)式のnと同じものである。但し、それがレベルiに関するものであることを明瞭にするために、iをnの下付添字として用いている。

また、最後に、階層構造全体の整合性をチェックしておく必要がある。階層構造全体の整合比CRH(consistency ratio of the hierarchy)は、

$$CRH=M/M^* \tag{13}$$

で与えられる。ここに、Mは、個々の一対比較行列の整合度(CI)と、その1つ

4) T. L. Saaty, *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications,Pittsburgh, 1994, p. 84.

上のレベルの親要素の相対的加重値との積を、階層構造全体についてすべて加算することにより求められる。同様に、個々の一対比較行列の次数(n)によって決まる平均ランダム指数(ARI)に、その1つ上のレベルの親要素の相対的加重値を掛けて、それらの階層構造全体としての総和をとれば、M^* が算定できる。なお、CRH の値が0.1よりも小さくなれば、階層構造全体の整合性は維持されていると考えられる。

Ⅲ. 仮設例

具体的な意思決定問題に AHP を適用してみよう。ここでは、サーティによって示された仮設例が例示のために用いられる[5]。

いま、ある家族が休暇を有意義に過ごすことのできる旅行先の選択問題に頭を悩ませているものとしよう。

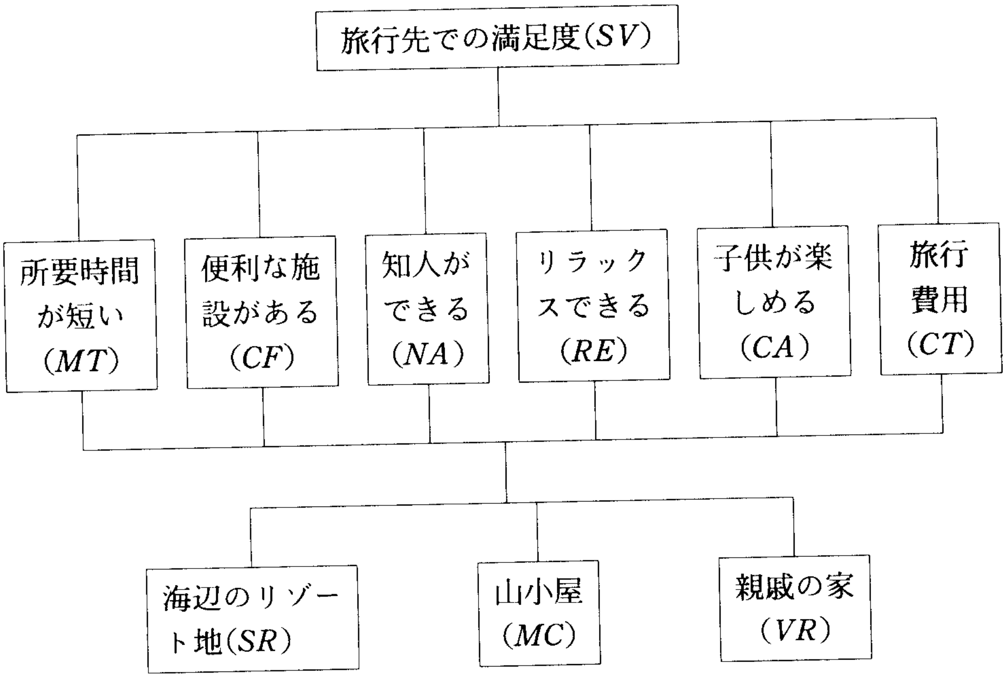
第1ステップ

まず、旅行先選択問題において達成すべき目的は何か、また、家族の各メンバーがその目的に対してどのような考えや希望を抱いているのかが明示されなければならない。例えば、できるだけ大きな満足が得られる場所で休暇をとること(*SV*)が、ここでの一般的な目的であり、そのために、家族の各メンバーが、以下の6個の要件を考慮すべきであるとの意見を有していることがわかったものとしよう。それらの要件とは、候補地までの所要時間が短いこと(*MT*)、ショッピングや外食のための施設が近くにあること(*CF*)、新しい知人ができること(*NA*)、リラックスできる環境であること(*RE*)、子供が楽しめること(*CA*)、旅行費用(*CT*)の6個である。これらは、旅行先での満足度というレベル1の目的の下位目的であると同時に、具体的な旅行先を選択する際の評価基準にもなっている。なお、旅行先の候補地として、海辺のリゾート地(*SR*)、山小屋(*MC*)、親戚の家(*VR*) の3箇所があげられているものとする。

5) T. L. Saaty and L. G. Vargas, *The Logic of Priorities: Applications of the Analytic Hierarchy Process in Business, Energy, Health, and Transportation*, RWS Publications, Pittsburgh, 1991, pp. 34–37.

以上から、当該意思決定問題は次のような階層構造で表すことができる。

第2図 旅行先選定問題の階層構造



第2ステップ

階層構造ができ上がると、各レベルにおける要素(評価基準・代替案)間で、第1表の数値を参考にしながら、意思決定者の主観に基づいて一対比較が行われる。

まず、レベル1の旅行先での満足度(SV)を基準にして、レベル2の各要素(6個の評価基準：MT, CF, NA, RE, CA, CT)についての一対比較が実施される。その結果、第3表が得られたものとする。この一対比較表は、旅行先での満足度(SV)に関して、例えば、「候補地までの所要時間が短いこと(MT)」が「新しい知人ができること(NA)」よりかなり重要視され、また、「候補地までの所要時間が短いこと(MT)」に比べて「旅行費用(CT)」の方がやや重要視される、といった意思決定者の判断を比率尺度で表したものである。

次に、レベル3における各要素(3個の代替案：SR, MC, VR)間の一対比較が、レベル2の6個の要素の各々を評価基準として行われる。その結果が、第

4表のようになったものとしよう。ここでも、例えば、第4–4表の1行3列の数値5は、「リラックスできる環境であること(*RE*)」に関していえば、「海辺のリゾート地(*SR*)」の方が「親戚の家(*VR*)」よりもリラックスできる、という評価が下されたことを示している。

第3表　旅行先での満足度に関するレベル2の各要素の一対比較表

SV	*MT*	*CF*	*NA*	*RE*	*CA*	*CT*
MT	1	1	7	5	3	1/3
CF	1	1	5	3	1	1
NA	1/7	1/5	1	1/3	1/7	1/9
RE	1/5	1/3	3	1	1/3	1/3
CA	1/3	1	7	3	1	1/5
CT	3	1	9	3	5	1

第4表　レベル2のそれぞれの要素に関するレベル3の各要素の一対比較表

(第4–1表)

MT	*SR*	*MC*	*VR*
SR	1	1/7	1/5
MC	7	1	5
VR	5	1/5	1

(第4–2表)

CF	*SR*	*MC*	*VR*
SR	1	9	5
MC	1/9	1	1/9
VR	1/5	9	1

(第4–3表)

NA	*SR*	*MC*	*VR*
SR	1	9	7
MC	1/9	1	1/9
VR	1/7	9	1

(第4–4表)

RE	*SR*	*MC*	*VR*
SR	1	1/5	5
MC	5	1	9
VR	1/5	1/9	1

(第4–5表)

CA	*SR*	*MC*	*VR*
SR	1	9	5
MC	1/9	1	1/7
VR	1/5	7	1

(第4–6表)

CT	*SR*	*MC*	*VR*
SR	1	1/7	1/9
MC	7	1	1/5
VR	9	5	1

第３ステップ

一対比較表(第３表と第４表)から、各レベルにおける要素間の相対的加重値が算定される。

まず、第３表の一対比較行列(６行６列)について、その最大固有値 λ_{max} とそれに対応する規準化された固有列ベクトル w^* が求められる。それらは、

$$\lambda_{max}=6.47499$$

$$w^*=(0.224 \quad 0.191 \quad 0.028 \quad 0.065 \quad 0.132 \quad 0.360)^T$$

で与えられる。また、この時、整合度(CI)と整合比(CR)は、

$$CI=(6.47499-6)/(6-1)=0.095$$

$$CR=0.095/1.25=0.076$$

となり、何れも0.1以下であることがわかる。したがって、第３表の整合性に問題はないと判断される。

次に、第４表の６個の一対比較行列(３行３列)のそれぞれについて、最大固有値とそれに対応する規準化された固有列ベクトルが求められる。その結果を纏めて表したものが第５表である。この表から、特に、第4–2表、第4–3表の整合性に問題があることがわかる。それ故、場合によっては、この２つの表の一対比較をもう一度やり直す必要がある。

第５表　第４表の規準化固有ベクトル・固有値・整合度・整合比

	MT	CF	NA	RE	CA	CT
SR	0.0668	0.7107	0.7511	0.2067	0.7219	0.0510
MC	0.7147	0.0462	0.0436	0.7352	0.0510	0.2271
VR	0.2185	0.2431	0.2053	0.0581	0.2271	0.7219
λ_{max}	3.1828	3.2948	3.4357	3.1171	3.2085	3.2085
CI	0.0914	0.1474	0.2178	0.0586	0.1042	0.1042
CR	0.1757	0.2834	0.4189	0.1126	0.2005	0.2005

第４ステップ

代替案(旅行先)の順位づけに必要な合成加重値を得るために、⑿式を用い

て、第3ステップで求められた相対的加重値が集計される。すなわち、

$$C[1,3]=B_2 \cdot B_3$$
$$=(0.299 \quad 0.306 \quad 0.395)$$

ここに、B_2 と B_3 は、

$$B_2=(0.224 \quad 0.191 \quad 0.028 \quad 0.065 \quad 0.132 \quad 0.360)$$

$$B_3=\begin{bmatrix} 0.0668 & 0.7147 & 0.2185 \\ 0.7107 & 0.0462 & 0.2431 \\ 0.7511 & 0.0436 & 0.2053 \\ 0.2067 & 0.7352 & 0.0581 \\ 0.7219 & 0.0510 & 0.2271 \\ 0.0510 & 0.2271 & 0.7219 \end{bmatrix}$$

である。したがって、以上の分析から、この家族にとって最も選好される旅行先は、親戚の家(VR)であるとの結論が得られる。

なお、最後に念のため、階層構造全体の整合性を、⒀式を用いてチェックしておこう。⒀式の M と M^* の値は、

$$M=0.095+0.224\times0.0914+0.191\times0.1474+0.028\times0.2178$$
$$+0.065\times0.0586+0.132\times0.1042+0.360\times0.1042$$
$$=0.2048$$

$$M^*=1.25+0.224\times0.52+0.191\times0.52+0.028\times0.52$$
$$+0.065\times0.52+0.132\times0.52+0.360\times0.52$$
$$=1.77$$

で与えられる。それ故、階層構造全体の整合比は、

$$CRH=0.1157$$

となり、かろうじて整合性が維持されていることがわかる。

Ⅳ. AHP 適用上の問題点と解決策

AHP を現実の意思決定問題に適用する際、様々な不都合が生じる可能性がある。本節では、このうち特に頻繁に起こると考えられる3つのケース、すな

わち、(1)一対比較行列の整合性が悪い場合、(2)不完全な一対比較行列しか得られない場合、(3)グループ内で一対比較値について意見の一致が見られない場合、を取り上げ、それらの解決策を簡単に考察してみることにする。

(1)一対比較行列の整合性が悪い場合

一対比較行列の整合度(CI)と整合比(CR)の値が0.1(場合によっては0.15)以上であれば、その行列のどこかで整合性のない誤った判断が下されていることになる。したがって、その箇所を探しだし、そこの一対比較をもう1度やり直す必要がある。しかし、比較される要素の数が多い場合には、どの一対比較値が整合性に反しているのかを見つけだすことは容易でない。

従来から、再検討すべき一対比較値を効率的に見いだすために、数多くの方法が考案されてきたが、比較的簡単でよく用いられるのは、「一対比較行列Aの規準化固有ベクトル値(相対的加重値)から、その比w_i/w_jを要素とする行列Wを作り、AとWの差の絶対値$|a_{ij}-(w_i/w_j)|$を要素にもつ行列Bを求める。そして、Bの中で最大の値をもつ要素、あるいはその行和の値が最大となる行の要素について再度一対比較を行う」という方法である。

例えば、第4-2表の一対比較行列の場合、その整合度と整合比は、それぞれ、$CI=0.1474$、$CR=0.2834$となり、整合性が極めて悪い。そこで、第5表の相対的加重値($w_1=0.7107$, $w_2=0.0462$, $w_3=0.2431$)を用いて、行列Wを作り、Bを求める。すなわち、

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 15.383 & 2.923 \\ 0.065 & 1 & 0.190 \\ 0.342 & 5.262 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & \underline{6.383} & \underline{2.077} \\ 0.046 & 0 & 0.079 \\ 0.142 & \underline{3.738} & 0 \end{bmatrix}$$

である。行列Bを見れば、下線を施した箇所で差の絶対値が大きくなっていることがわかる。それ故、これらの箇所の一対比較値が再検討される。その結果、AがA^*のように修正されたものとしよう。

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1/7 & 1 & 1/7 \\ 1/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

A^* の最大固有値 λ_{max} は3.05362であり、その整合度と整合比は、それぞれ、$CI=0.0268$、$CR=0.0516$で与えられる。これを見る限り、修正された新たな一対比較行列の整合性に、もはや問題は認められない。

(2)一対比較行列が不完全な場合

要素(評価基準・代替案)間で一対比較を行う際、どう判断してよいかわからず、一対比較行列を、一部の評価値が無回答のまま不完全な形で、作成しなければならないような状況がしばしば起こる。ここでは、そのような不完全一対比較行列しか得られない場合であっても、間接的に固有値法を用いて相対的加重値が推定できる方法を示す[6]。

例えば、4行4列の一対比較行列 A について、$a_{13}=1/5$, $a_{23}=2$, $a_{24}=3$ の一対比較値だけが得られたものとしよう。この時、不完全一対比較行列 A は、すべての対角要素が1であること、また、行列の要素間で(2)式の逆数関係が成り立つことを勘案して、次のように表すことができる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & * & 1/5 & * \\ * & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1/2 & 1 & * \\ * & 1/3 & * & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

ここに、$*$は一対比較値が不明の箇所を示している。

ところで、$*$の箇所を(3)式で置き換えてできる一対比較行列に関しても、形式上、(7)式と同様の関係式、

6) P. T. Harker, "Alternative Modes of Questioning in the Analytic Hierarchy Process", *Mathematical Modelling*, Vol. 9, 1987, pp. 353–360.

$$\begin{bmatrix} 1 & w_1/w_2 & 1/5 & w_1/w_4 \\ w_2/w_1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1/2 & 1 & w_3/w_4 \\ w_4/w_1 & 1/3 & w_4/w_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

が成立するはずである。しかも、(15)式は、

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1/2 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

と表現し直すことができる。したがって、(14)式の不完全一対比較行列 A の相対的加重値を求めるためには、

$$A^+ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 1/2 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

の最大固有値 λ_{max} とそれに対応する規準化された固有ベクトル w を計算すればよいことがわかる。(17)式の A^+ の最大固有値と規準化固有ベクトルは、

$$\lambda_{max} = 4 \qquad w = (0.052 \quad 0.517 \quad 0.259 \quad 0.172)$$

で与えられる。なお、一般に、A^+ は不完全一対比較行列 A の＊の要素を 0 とおき、同時に、A の各対角要素の 1 の値を、(その行の＊の個数＋1)の数に置き換えることによって導きだせることが知られている。

(3)グループ内で合意が得られない場合

複数の意思決定者がグループとして一対比較を行わなければならない場合、何らかの方法(例えば、デルファイ法：Delphi method、ノミナル・グループ技法：nominal group technique など)を駆使して、最終的に各自の異なった判断を合意により 1 つに纏め上げる努力がなされる。しかし、どうしても最後まで意見の一致が見られない時には、各自が別々に見積もった一対比較値を、機械的に処理することによって 1 つの値に絞り込まなければならない。そのため

の有効な処理方法として、各自の一対比較値の幾何平均(geometric mean)をとることが考えられる。

例えば、3人の意思決定者がある問題について一対比較を行ったが、下表のように、1箇所(1行3列の要素)だけ評価値が異なり、どうしてもそれらを1つの数値に絞り込むことができなかったものとしよう。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

この場合、3つの数値の幾何平均をとり、その値、

$$\sqrt[3]{5\times7\times2}=\sqrt[3]{70}=4.1213$$

をグループ全体の評価値と見なす。それ故、この場所(1行3列)と対称な位置(3行1列)にある評価値は、(2)式から、1/4.1213でなければならないことがわかる。ところが、この値は、3行1列の3つの数値の幾何平均の値、

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{70}}=\frac{1}{4.1213}$$

に一致する。このように、幾何平均を用いれば、必ず(2)式の逆数関係が成立するので、算術平均 (arithmetic mean) など他の平均を利用する場合よりも好都合であるといえる。

(筆者は関西学院大学商学部教授)