動的非定常因子モデルとその統計的推定

杉　原　左右一

Ⅰ．はじめに

周知の様に、通常の古典的な因子分析に於ては共通因子の時間的な変動は考慮に入れられないことが多いが、共通因子の時系列的変動構造を分析することが重要な意味をもつ場合も少なくなく、特にこの様な因子分析を“動的因子分析”（Dynamic Factor Analysis）と呼んでいる。例えば経済の分野に於ける“景気変動”の概念の数量的分析はその好例である。

動的因子分析に関する理論的研究に関してはこれまでにも例えば Brillinger〔1〕，Box and Tiao〔2〕，Geweke〔3〕，Velue, Reinsel and Wichern〔6〕等がある。これらの研究の特徴はいづれも共通因子が時間について定常的に変動することを仮定した点にあり、本稿では以下この様なモデルを“動的定常因子モデル”（Dynamic Stationary Factor Model）と呼ぶことにする。これに対して、共通因子に非定常性を仮定したモデルを以下“動的非定常因子モデル”（Dynamic Nonstationary Factor Model）と呼ぶことにする。

一般に動的非定常因子モデルが対象とする分析範囲は動的定常因子モデルと比べてすこぶる広範囲に及ぶが、特に経済分野への適用を念頭に置くとき重要であると思われるのは、共通因子が単位根を持って変動する場合であろう。そこで本稿では特に共通因子が単位根を持って時系列的に変動する動的非定常因子モデルを中心に考察することにしたい。同種のモデルに関しては筆者の知る限り現在のところ Harvey〔4〕が挙げられるが、そこではカルマンフィルター

を利用した分析が中心となっている。本稿ではこれと異なり従来の因子分析の枠組の中で分析を進めたい。

以下まずⅡで本稿で扱う動的非定常因子モデルの特徴について述べ、Ⅲでその未知母数の推定方法を提示する。またⅣで共通因子の推定と単位根検定について考察する。最後にⅤを本稿の結びとしたい。

Ⅱ．動的非定常因子モデル

まず、以下の議論に必要となる記号と基本的な仮定について述べよう。

y_t, f_t, u_t をそれぞれ次式で与えられる（p×1）次元、（m×1）次元、（p×1）次元縦ベクトルとし、Λ を（p×m）次元行列とする。

(1)　$y_t=(y_{t1},y_{t2},\cdots,y_{tp})'$,　$f_t=(f_{t1},f_{t2},\cdots,f_{tm})'$

$$u_t=(u_{t1},u_{t2},\cdots,u_{tp})',\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11}\cdots\lambda_{1m}\\ \vdots \qquad \vdots\\ \lambda_{p1}\cdots\lambda_{pm}\end{pmatrix}_{p\times m}$$

さて、y_t（$t=1,2,\cdots,T$）の値が観測可能であるとき、次式で表現される p 変量 m 因子モデル（$m<p$）を考える。

(2)　$y_t=\Lambda f_t+u_t \qquad t=1,2,\cdots,T$

ここで、f_t, u_t, Λ はそれぞれ共通因子ベクトル、独自因子ベクトル、因子負荷量行列であり、いづれも観測不能な変数である。また、t($t=1,2,\cdots,T$) はクロスセクションデータを念頭に置いた古典的な因子分析モデルに於ては個体番号を示しており、その場合には全体で T 個の個体があることを意味している。

通常の因子分析モデルでは上記 p 変量 m 因子モデルに次の標準的な諸仮定を設定することが多い。

仮定(1)　$E(f_t)=0,\quad E(f_tf_t')=I_m,\ t=1,2,\cdots,T$

仮定(2)　$E(u_t)=0,\quad E(u_tu_t')=\Sigma_u=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&&&\\&\sigma_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&\sigma_{pp}\end{pmatrix},\ t=1,2,\cdots,T$

仮定(3)　$E(f_tu_s')=0.\qquad t,s=1,2,\cdots,T$

なお、任意の m 次元直交行列 $H(HH'=I_m)$ を用いて $\Lambda^*=\Lambda H$, $f_t^*=H'f_t$ とすれば、$\Lambda f_t=\Lambda^* f_t^*$ となるから、Λ の要素に適当な制約を課さない限り、(2)式のモデルは一般には識別可能ではない。直交行列 H の選定は“因子の直交回転”と呼ばれ因子分析の分野で様々な方法が考案されていることは周知の通りである。

ところで通常の古典的な因子分析に於ては、共通因子ベクトルの時間的な変動は考慮に入れられないことが多いが、本稿ではこれを表陽的に考慮した動的因子分析について考察する。動的因子モデルのうち、動的定常因子モデルについては前節でも述べた様にこれまでにも幾つかの研究がなされているが、本稿ではこれとは別に特に次式で表現される動的非定常因子モデルを取り挙げることにする。

(3)　$y_t=\Lambda f_t+u_t \qquad t=1,2,\cdots,T$

(4)　$f_t=f_{t-1}+\varepsilon_t$

ここで t は時点を意味し、y_t, f_t, u_t, Λ はそれぞれ(1)式で与えられ、ε_t は次式で与えられるものとする。

(5)　$\varepsilon_t=(\varepsilon_{t1},\varepsilon_{t2},\cdots,\varepsilon_{tm})'$

動的定常因子モデルと比較して同モデルの大きな特徴は f_t が確率的トレンドを持って時間的に変動する点にある。より複雑なモデルも考えられようが動的非定常因子モデルの本質的な特徴は同モデルで十分に把握されていると言えよう。なお、簡単化のために以下では $f_0=0$ であるものとする。さて、同モデルに以下の仮定（1′), (2), (3′）を設定することにする。

仮定(1′)　$E(\varepsilon_t)=0, E(\varepsilon_t\varepsilon_t')=I_m \qquad t=1,2,\cdots,T$

仮定(2)　$$E(u_t)=0, E(u_tu_t')=\Sigma_u=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & & & \\ & \sigma_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{pp}\end{pmatrix},\quad t=1,2,\cdots,T$$

仮定(3′)　$E(\varepsilon_t u_s')=0, \quad t,s=1,2,\cdots,T$

特に仮定（1′）は、共通因子ベクトル f_t の各成分が時間的に相互に無相関に変

動することを意味するものであり、仮定(1)の一つの自然な拡張となっている。

以後(3)、(4)式の $p(m+1)$ 個の未知母数を θ と表わそう。

(6)　$\theta=((\mathrm{Vec}(\Lambda))', \sigma_{11}, \sigma_{22}, \cdots, \sigma_{pp})'$

Ⅲ．未知母数の推定方法

本節では未知母数 θ の種々の推定方法を提示したい。推定方法としては、大別して(1)原データを用いる推定方法と、(2)階差データを用いる推定方法が挙げられるが、以下に示す様に、いづれの方法も通常の因子分析より複雑な非線形反復推定法を用いなければならない。そこで本稿ではこれらの方法以外に、より簡単な推定方法を提案し、その有効性を簡単なシミュレーションによって検証することにする。

3.1　原データを用いる推定方法

Y，F，Uをそれぞれ次式で表わされる（$p\times T$）次元，（$m\times T$）次元，（$p\times T$）次元の行列とする。

(7)　$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_T)$

$F=(f_1, f_2, \cdots, f_T)$

$U=(u_1, u_2, \cdots, u_T)$

(3)式を $t=1,2,\cdots,T$ について整理すれば、

(8)　$Y=\Lambda F+U$

となるから、これを

(9)　$y=(I_T\otimes\Lambda)f+u$

と表わす。但し、y, f, u はそれぞれ次式で定義される（$pT\times1$）次元，（$mT\times1$）次元，（$pT\times1$）次元の縦ベクトルである。

(10)　$y=\mathrm{Vec}(Y)$，$f=\mathrm{Vec}(F)$，$u=\mathrm{Vec}(U)$

ここで、$E(ff')$,$E(uu')$が

(11)　$E(ff')=J_T\otimes I_m$

(12)　$E(uu')=I_T\otimes\Sigma_u$

と表わせることに注意しよう。但し、J_T は次式で定義される T 次正方行列であ

る。

(13) $$J_T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & T \end{pmatrix}$$

なお、別にT次正方行列 H_T を次式で定義される下3角行列とすると、

(14) $$H_T=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

J_T は

(15) $$J_T=H_TH_T'$$

と表わせる。

さて、y は $E(y)=0$ であり、$E(yy')=\Sigma_y(\theta)$ は(11)、(12)式より

(16) $$\begin{aligned}\Sigma_y(\theta)&=(J_T\otimes\Lambda\Lambda')+(I_T\otimes\Sigma_u)\\ &=(H_T\otimes\Lambda)(H_T\otimes\Lambda)'+(I_T\otimes\Sigma_u)\end{aligned}$$

と表わせることがわかる。

そこで、仮定(1′)，(2)に加えて ε_t, u_t がさらに正規分布に従うことを仮定すれば、θ に関する対数尤度関数 $\ell(\theta)$ は次式で表わされる。

(17) $$\ell(\theta)=-\frac{Tp}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log|\Sigma_y(\theta)|-\frac{1}{2}y'\Sigma_y(\theta)^{-1}y$$

従って、上式を用いて θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めることが出来る。ただし動的非定常因子モデルでは(16)式の $\Sigma_y(\theta)$ を用いて $\ell(\theta)$ の θ に関する1次微分並びに2次微分をもとにした非線形反復推定法を用いなければならないため、通常の因子分析より分析は複雑なものとならざるを得ないことを指摘したい。なお特に J_T が I_T である場合には、(17)式の尤度関数は通常の因子分析で用いられる尤度関数と一致することに注意しよう。

3.2 階差データを用いる推定方法

上記の原データを用いる推定方法と共に、以下に述べる階差データを用いる

推定方法も有効であろう。

まず(3)式の両辺の1回階差をとれば、

(18) $\Delta y_t = \Lambda \Delta f_t + \Delta u_t \qquad t=2,3,\cdots,T$

$= \Lambda \varepsilon_t + \Delta u_t$

となる。但し、Δ は時間に関する1回階差演算子を示している。ここで、ΔY, E, ΔU をそれぞれ次式で表わされる $(p \times T)$ 次元, $(m \times T)$ 次元, $(p \times T)$ 次元の行列とする。

(19) $\Delta Y = (\Delta y_1, \Delta y_2, \cdots, \Delta y_T)$

$E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_T)$

$\Delta U = (\Delta u_1, \Delta u_2, \cdots, \Delta u_T)$

そうすれば、(18)式を整理して

(20) $\Delta Y = \Lambda E + \Delta U$

となるから、これをさらに

(21) $\Delta y = (I_T \otimes \Lambda) e + \Delta u$

と表わすことが出来る。但し、Δy, e, Δu はそれぞれ次式で与えられる $(pT \times 1)$ 次元, $(mT \times 1)$ 次元, $(pT \times 1)$ 次元の縦ベクトルである。

(22) $\Delta y = \mathrm{Vec}(\Delta Y)$, $e = \mathrm{Vec}(E)$, $\Delta u = \mathrm{Vec}(\Delta U)$

ここで、$E(ee')$, $E(\Delta u \Delta u')$ が

(23) $E(ee') = I_T \otimes I_m$

(24) $E(\Delta u \Delta u') = K_T \otimes \Sigma_u$

と表わせることに注意しよう。但し、K_T は次式で定義されるT次正方行列である。

(25) $$K_T = \begin{pmatrix} 2, -1 & & & \\ -1, 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

そうすれば、Δy は、$E(\Delta y) = 0$ であり、$E(\Delta y \Delta y') = \Sigma_{\Delta y}(\theta)$ が、

(26) $\Sigma_{\Delta y}(\theta) = (I_T \otimes \Lambda \Lambda') + (K_T \otimes \Sigma_u)$

となる定常過程であることがわかる。

従って、ε_t, u_t が正規分布に従うことを仮定すれば、θ に関する対数尤度関数 $\ell(\theta)$は

$$(27)\quad \ell(\theta)=-\frac{Tp}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log|\Sigma_{\Delta y}(\theta)|-\frac{1}{2}\Delta y'\,\Sigma_{\Delta y}(\theta)^{-1}\Delta y$$

となるから、上式より θ の最尤推定量$\hat{\hat{\theta}}$ を求めることが出来る。但し、(27)式の最大化は前節と同様に通常の因子分析に比べて複雑なものとならざるを得ない。なお、特に $K_T=I_T$ の場合が通常の因子分析で用いられる対数尤度関数に他ならない。

3.3 簡便推定法

前述した方法を実行するにあたっては、いづれも通常の因子分析よりも複雑な非線形反復計算が要求される。そこで次に通常の因子分析のアルゴリズムがそのまま利用出来るより簡便な推定方法を提案することにしたい。

そのために、次式が成立することに注意しよう。

$$(28)\quad E(\Delta y_t\Delta y_t')=\Lambda\Lambda'+2\Sigma_u$$

$$(29)\quad E(\Delta y_t\Delta y_{t-1}')=-\Sigma_u$$

そうすれば、

$$(30)\quad E(\Delta y_t\Delta y_t'+\Delta y_t\Delta y_{t-1}')=\Lambda\Lambda'+\Sigma_u=\Sigma(\theta)$$

となる。そこで、SS を

$$(31)\quad SS=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta y_t\Delta y_t'+\frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}\Delta y_t\Delta y_{t-1}'\right)+\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Delta y_t\Delta y_t'+\frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}\Delta y_t\Delta y_{t-1}'\right)'\right\}$$

と定義すれば、SS を用いた θ の（重みなし）最小２乗推定量（ULS＝Unweighted Least Squares Estimator）を次の様な反復主因子分析法により求めることが出来る。まず適当な初期値$\tilde{\Sigma}_u$から出発して $S\equiv SS-\tilde{\Sigma}_u$のスペクトル分解を求める。すなわち、S の固有値と固有ベクトルから成る行列をそれぞれ Θ, V とする。

(32)　$$\Theta=\begin{pmatrix}\theta_1 & & & \\ & \theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_p\end{pmatrix}_{p\times p}\quad (但し\ \theta_1>\theta_2>\cdots>\theta_p)$$

$$V=(v_1, v_2, \cdots, v_p)_{p\times p}\quad (但し、v_i:(p\times 1)次元)$$

そうすれば、$S=V\Theta V'$ とスペクトル分解出来るから、適当な $m(<p)$ を用いて Λ を

(33)　$$\tilde{\Lambda}=V_m\Theta_m^{\frac{1}{2}}$$

と推定出来る。ここで、

(34)　$$\Theta_m=\begin{pmatrix}\theta_1 & & & \\ & \theta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \theta_m\end{pmatrix}_{m\times m},\quad V_m=(v_1, v_2, \cdots, v_m)_{p\times m}$$

である。Σ_u は

(35)　$$\tilde{\Sigma}_u=\mathrm{Diag}(SS-\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda}')$$

により推定すれば良い。上記のプロセスを収束するまで繰り返すことにより Λ と Σ_u の推定量 $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Sigma}_u$ を求めることが出来る。なお、m の選定方法としては、通常の因子分析による方法をそのまま援用すれば良いだろう。

上記の反復主因子分析法は、通常の因子分析の既存のコンピュータプログラムがそのまま使用出来るより簡便な θ の推定方法と言えよう。

3.4　シミュレーション例

特に最後に提案した簡便推定法の有効性をシミュレーションにより検討することにしよう。

そのために、次式で表わされる最も簡単な3変量1因子から成る動的非定常因子モデルを考える。

(36)　$$y_t=\Lambda f_t+u_t\qquad t=1, 2, \cdots, T$$

(37)　$$f_t=f_{t-1}+\varepsilon_t$$

ここで、y_t, u_t, ε_t, Λ はそれぞれ次式を満足するものとする。

(38)　$$y_t=(y_{t1}, y_{t2}, y_{t3})',\quad u_t=(u_{t1}, u_{t2}, u_{t3})'$$

$$(39)\quad E(u_t)=0,\quad E(u_t u_t')=\Sigma_u=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & & \\ & \sigma_{22} & \\ & & \sigma_{33}\end{pmatrix}=I_3$$

$$E(\varepsilon_t)=0,\quad E(\varepsilon_t^2)=1$$

$$\Lambda=(\lambda_{11},\lambda_{21},\lambda_{31})'=(1.2,1.0,0.8)'$$

同モデルは丁度識別されている。

さて、T＝300として、シミュレーションにより、f_tとy_tの系列を作成した一例を図1に示す。同図からも明らかな様に、共通因子f_tは確率的トレンドを持って変動しており、それに応じてy_tも確率的トレンドを持つことが見てとれよう。

次に、同モデルの未知母数$\theta=(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})'$を前節で提案したSSを用いた反復主因子分析法により推定した結果を表1に示す。シミューレーションの反復回数は1,000回であり、T＝300としている。

言うまでもなく、今後本稿で提示した他の推定方法による結果との比較や、小標本時の推定量の性質の比較、さらに2因子以上のより複雑な動的非定常モデルに関する考察等を行わなければならないが、3変量1因子の簡単なモデルであるとは言え、同表からも明らかになる様に推定値は概ね良好であり、本稿で提案したSSに基づく反復主因子分析法の有効性がある程度検証出来たと言えよう。同方法は通常の因子分析のプログラムがそのまま利用出来る利点があり、得られた推定値を本稿で提示したその他の推定方法の初期値として利用することも可能であろう。

Ⅳ. 共通因子ベクトルの推定と単位根検定

4.1 共通因子ベクトルの推定と単位根検定

共通因子ベクトルf_tの推定方法としては通常の因子分析と同様に幾つかの方法が考えられる。

一つの方法は、$z=(f', u', y')'$が$E(z)=0$で$E(zz')$が次式Ω（$(m+2p)T\times(m+2p)T$次元）の多変量正規分布に従うことを仮定し、yが与え

図１ f_t と $y_t=(y_{t1}, y_{t2}, y_{t3})'$

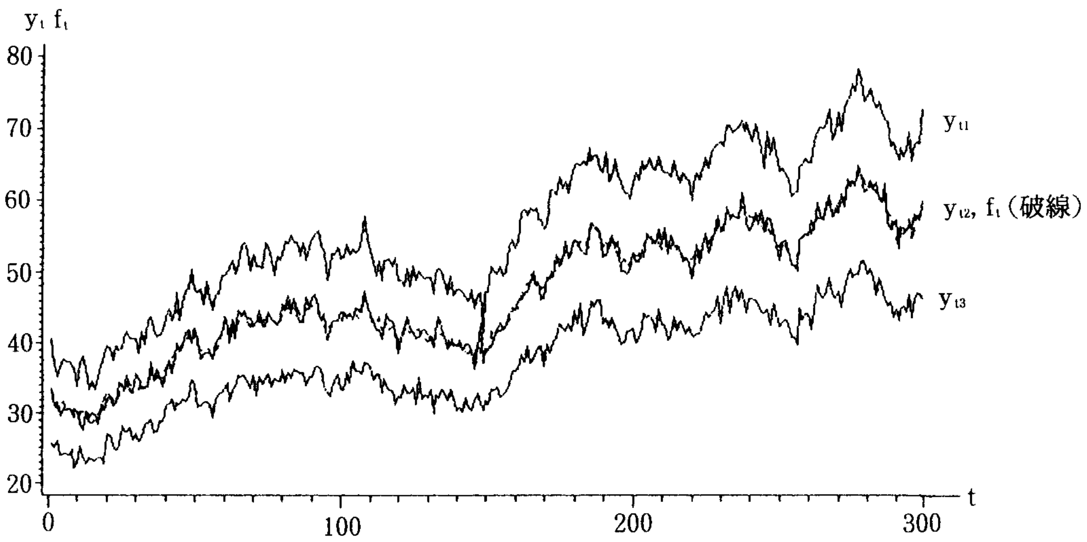


表１ シミュレーション結果

（T＝300，反復回数1000回）

未知母数	真値	平均値	標準偏差	平均２乗誤差
λ_{11}	1.2	1.198	0.115	0.013
λ_{21}	1.0	1.004	0.102	0.010
λ_{31}	0.8	0.801	0.088	0.008
σ_{11}	1.0	0.983	0.214	0.046
σ_{22}	1.0	0.983	0.169	0.029
σ_{33}	1.0	0.998	0.132	0.017

られたという条件下での f の条件付き期待値 f^* を f の推定値と考える方法である。

$$(40)\quad \Omega=\begin{pmatrix} J_T\otimes I_m & 0 & (J_T\otimes I_m)(I_T\otimes\Lambda)' \\ 0 & I_T\otimes\Sigma_u & I_T\otimes\Sigma_u \\ (I_T\otimes\Lambda)(J_T\otimes I_m) & I_T\otimes\Sigma_u & \Sigma_y(\theta) \end{pmatrix}$$

f^* を求めれば次式を得る。但し、$\tilde{\Lambda}$，$\tilde{\Sigma}_u$は前節の適当な方法を用いて求めた Λ，Σ_uの推定値である。

(41) $f^* = (J_T \otimes I_m)(I_T \otimes \widetilde{\Lambda})' \widetilde{\Sigma}_y(\theta)^{-1} y$

$= \{(J_T \otimes I_m)^{-1} + (I_T \otimes \widetilde{\Lambda})' (I_T \otimes \widetilde{\Sigma}_u)^{-1} (I_T \otimes \widetilde{\Lambda})\}^{-1}$

$(I_T \otimes \widetilde{\Lambda})' (I_T \otimes \widetilde{\Sigma}_u)^{-1} y$

$= \{(J_T \otimes I_m)^{-1} + (I_T \otimes \widetilde{\Lambda}' \widetilde{\Sigma}_u{}^{-1} \widetilde{\Lambda})\}^{-1} (I_T \otimes \widetilde{\Lambda}' \widetilde{\Sigma}_u{}^{-1}) y$

もう一つの方法は、(9)式であたかも y を従属変数、$(I_T \otimes \widetilde{\Lambda})$ を独立変数とみなして f を回帰推定する方法である。まず f の“一般化最小 2 乗推定量” $f_{GLS}{}^*$ を求めれば次の様になる。

(42) $f_{GLS}{}^* = ((I_T \otimes \widetilde{\Lambda})' (I_T \otimes \widetilde{\Sigma}_u)^{-1} (I_T \otimes \widetilde{\Lambda}))^{-1} (I_T \otimes \widetilde{\Lambda})' (I_T \otimes \widetilde{\Sigma}_u)^{-1} y$

$= \mathrm{Vec}((\widetilde{\Lambda}' \widetilde{\Sigma}_u \widetilde{\Lambda})^{-1} \widetilde{\Lambda}' \widetilde{\Sigma}_u{}^{-1} Y)$

f^* で形式的に $(J_T \otimes I_m)^{-1}$ を除外すれば $f_{GLS}{}^*$ と一致することに注意しよう。

これとは別に、f の“最小 2 乗推定量” $f_{OLS}{}^*$ で f を推定する方法も考えられよう。

(43) $f_{OLS}{}^* = ((I_T \otimes \widetilde{\Lambda})' (I_T \otimes \widetilde{\Lambda}))^{-1} (I_T \otimes \widetilde{\Lambda})' y$

$= \mathrm{Vec}\ ((\widetilde{\Lambda}' \widetilde{\Lambda})^{-1}\ \widetilde{\Lambda}' Y)$

なお、f を f^* ないし $f_{GIS}{}^*$, $f_{OLS}{}^*$ で推定すれば y_t は次式により再現出来よう。

(44) $\widetilde{y}_t = \widetilde{\Lambda} \widetilde{f}_t$

但し、$\widetilde{f}_t$ は上述した f^*, $f_{GLS}{}^*$, $f_{OLS}{}^*$ のいづれかで求められるものである。

ところで、(4)式は動的非定常因子モデルの大前提となる仮定であるが、そもそも f_t は観測不能であるから f_t の単位根検定を行うことは不可能であるが、その推定量 $\widetilde{f}_t$ について単位根検定を行うことは可能である。すなわち、上で求めた $\widetilde{f}_t$ に下記のモデルをあてはめて ADF 検定を行うことが考えられよう。但し、v_t は誤差項を示す。

(45) $\Delta \widetilde{f}_t = \gamma \widetilde{f}_{t-1} + \sum_{i=2}^{\ell} \delta_i \Delta \widetilde{f}_{t-i+1} + v_t$

(46) $\Delta \widetilde{f}_t = \alpha + \gamma \widetilde{f}_{t-1} + \sum_{i=2}^{\ell} \delta_i \Delta \widetilde{f}_{t-i+1} + v_t$

(47) $\Delta \widetilde{f}_t = \alpha + \gamma \widetilde{f}_{t-1} + \beta t + \sum_{i=2}^{\ell} \delta_i \Delta \widetilde{f}_{t-i+1} + v_t$

最後に y_t の共和分ベクトルについて考察しておこう。そのために $\Lambda_\perp$ を $\Lambda_\perp{}' \Lambda = 0$ を満たす $(p \times (p-m))$ 次元の行列とする。そうすれば(3)式より

(48) $\Lambda_\perp{}' y_t = \Lambda_\perp{}' u_t$

となるから、明らかに$\Lambda_{\perp}'$はy_tの共和分ベクトルから成る行列であることがわかる。$\Lambda_{\perp}$を推定する一つの方法としては、例えば前節の簡便推定を用いた場合には、Sのスペクトル分解で使用しなかった残りの（p－m）個の固有ベクトルを考えれば良い。すなわち、

(49)　$\tilde{\Lambda}_{\perp}=(v_{m+1}, v_{m+2}, \cdots, v_{m+p})_{p\times(p-m)}$

とすれば良いであろう。但し、上記$\tilde{\Lambda}_{\perp}$は、$\tilde{\Lambda}$の直交補空間に属している長さ1のベクトルから構成されており、$\tilde{\Lambda}_{\perp}'\tilde{\Lambda}=0$ではあるが$\tilde{\Lambda}_{\perp}'\Lambda$は0ではないから、$\tilde{\Lambda}_{\perp}'y_t=\tilde{\Lambda}_{\perp}'\Lambda f_t+\tilde{\Lambda}_{\perp}'u_t$となることに注意したい。

4.2　シミュレーション例

IIで取り上げた系列を用いて、前節で述べた方法の中で特にf_{GLS}^*を用いてf_t及びy_tを推定したシミュレーション例を図2及び図3に示す。同図からも明らかな様に、推定した$\tilde{f}_t$, $\tilde{y}_t$が真のf_t, y_tの変動を良くとらえていることが読みとれよう。

次に、$\tilde{f}_t$に関する単位根検定の結果は、ラグを$l=6$として、(45)、(46)、(47)式についてそれぞれ$\tau=1.378$, $\tau_\mu=-1.363$, $\tau_\tau=-2.626$となった。従っていづれの場合も$\gamma=0$の帰無仮説は棄却出来ないことがわかる。なお詳細は省略するが、上記の結論は$l=6$以外のラグについても同様に成立している。

最後にy_tの共和分ベクトルを推定しよう。この場合には$m=1$として、前節の方法に従って$\tilde{\Lambda}_{\perp}$を求めれば

(50)　$$\tilde{\Lambda}_{\perp}=(v_2, v_3)=\begin{pmatrix} 0.121, & -0.691 \\ -0.707, & 0.443 \\ 0.696, & 0.571 \end{pmatrix}$$

となる。なおこの場合には、$\tilde{\Lambda}_{\perp}'\tilde{\Lambda}=(-0.007,\ 0.074)'$，$\tilde{\Lambda}_{\perp}'\Lambda=(-0.005,\ 0.071)'$となるから$\tilde{\Lambda}_{\perp}$と$\tilde{\Lambda}$, Λは共に近似的に直交していることがわかる。

V．おわりに

本稿では共通因子ベクトルが単位根を持って変動する動的非定常因子モデル

図2　f_t と $\widetilde{f_t}$

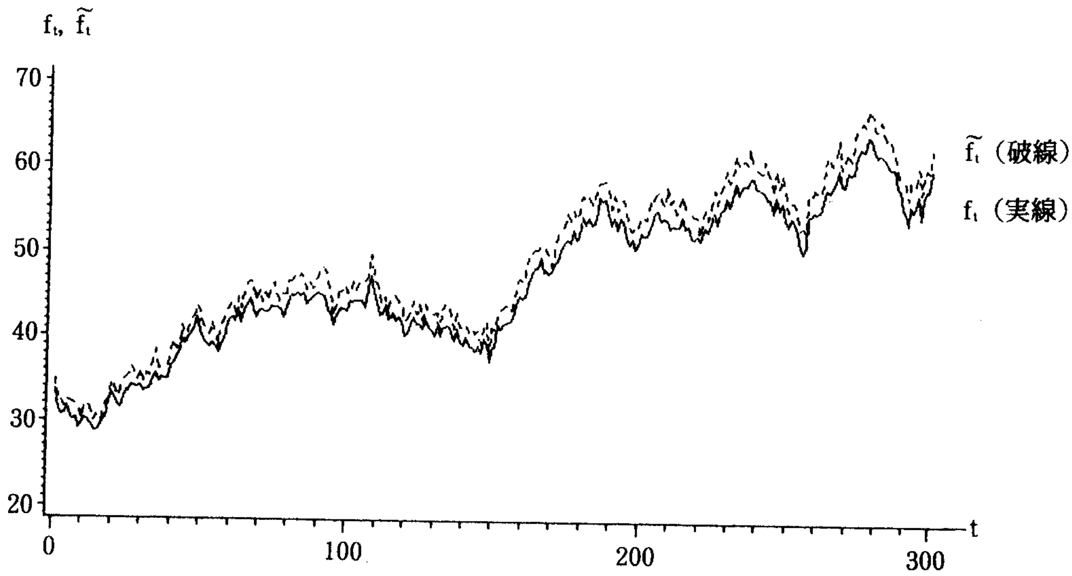
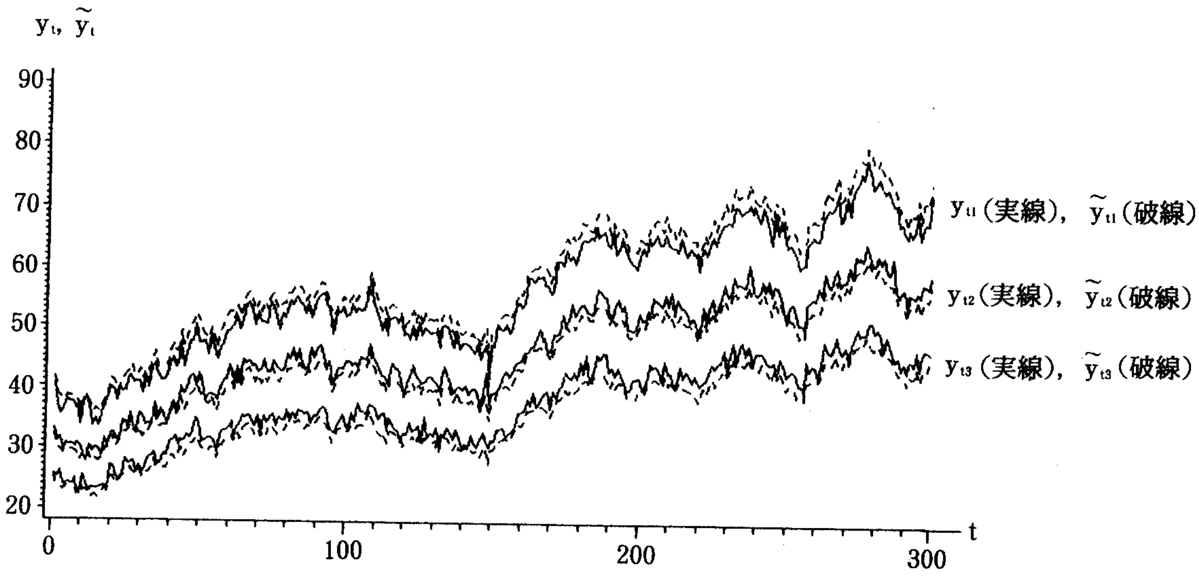


図3　y_t と $\widetilde{y_t}$



を考えて、その未知母数と共通因子ベクトルに関する幾つかの統計的推定方法を提示すると共に、特に簡便推定法の有効性を簡単な3変量1因子モデルについてシミュレーションを実施して検証した。

但し、本稿で扱った動的非定常因子モデルには今後の考察を待たねばならない未解決の問題も数多く残されている。特に本稿で未知母数の幾つかの推定方法を提示したが、今後これらの方法によって得られる推定量の極限分布、並びに小標本時における諸特性を理論的に研究する必要があろう。

さらに、本稿のモデルをより適応範囲の広いものとするために、一方で今後本稿のモデルを例えば非定常共通因子ベクトルと共に独立変数をも含むモデルへ拡張する必要があろうし、他方、本稿のモデルと、共和分関係にある非定常時系列の"共通因子"との関係についても考察しなければならないだろう。

これらの諸問題を因子分析の枠組の中で考察している文献は筆者の知る限り極めて数少ない状況であり、今後これらの諸問題についてさらに考察を加えて行きたいと考えている。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

＜参考文献＞

〔1〕 Brillinger, D.R. (1975), Time Series : Data Analysis and Theory, New York, Holt.

〔2〕 Box, G. E. P., and G. C. Tiao (1977), "A canonical analysis of multiple time series," Biometrika, 64 : 335–365.

〔3〕 Geweke J. (1977), "The dynamic factor analysis of economic time series models," in D. J. Aigner and A. S. Goldberger (eds.), Latent Variables in Socio-Economic Models, New York : North Holland.

〔4〕 Harvey, A. C. (1989), Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge, Cambridge University Press.

〔5〕 Stock, J. H., and M. W. Watson (1988), "Testing for common trends," Journal of the American Statistical Association 83 : 1097–1107.

〔6〕 Velue, R. P., G. C. Reinsel and D. W. Wichern (1986), "Reduced rank models for multiple time series," Biomerika 73 : 105–118.

〔7〕 柳井晴夫他著（1990)、『因子分析—その理論と方法—』、朝倉書店。