線形計画法とディノウボウ計画法

瀬　見　　　博

I．序

伝統的な線形計画法の場合、制約条件は全て固定されたハードなものと見なされ、それらを意思決定者が自由に変更することはできない。一方、Zeleny により提唱されたディノウボウ計画法（De Novo Programming)[1] では、制約条件はソフトなものとして取り扱われ、意思決定者はそれらを最適に設計することができる。すなわち、前者においては、所与のシステムの中での最適化問題に主たる関心が向けられているのに対して、後者では、もっぱら最適システムの設計問題に焦点があてられている。

かかる考え方の違いは、ハードな制約条件とソフトな制約条件が混在している現実の意思決定問題に対する両手法のモデル化のプロセスを概観すれば、より一層明瞭になる。線形計画法では、全てがハードな状態でモデルを構築し、その後、ソフトな条件に対処するために、それらを緩和することができるか否かが検討される。それに対して、ディノウボウ計画法の場合には、全てがソフ

1) Zeleny, M., "On the Squandering of Resources and Profits via Linear Programming", *Interfaces*, Vol.11, No. 5, 1981, pp. 101-107.
Zeleny, M., *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, New York, 1982.
Zeleny, M., "Multicriterion Design of High-Productivity Systems", in M. Zeleny, ed., *MCDM: Past Decade and Future Trends*, JAI Press, Greenwich, 1984, pp. 169-187.
Zeleny, M., "Optimal System Design with Multiple Criteria: De Novo Programming Approach", *Engineering Costs and Production Economics*, Vol. 10, 1986, pp. 89-94.

トな状態でモデルが構築され、その後、ハードな条件に対応するためにそれらを次第に引き締めていくという、全く逆の方策がとられる。

ところで、どちらの手法が優れているかについては一概に論じ得ないが、最初に構築されたモデルが必ずしも最適なモデルである保証はない、ということが線形計画法の場合にはいえる。さらに、システムを取り巻く環境が激しく変動したり、各種資源が稀少で無駄をできるだけ排除しなければならないような昨今の状況を想起すれば、やはり線形計画法よりもディノウボウ計画法の考え方の方が、より現実的で理に適っているように思われる。

そこで、本稿では、製品ミックス問題を念頭におきつつ、まず、ディノウボウ計画法について概説し、次いで、その考え方をうまく利用することにより、ハードとソフトの２つのタイプの制約条件が混在した問題ばかりでなく、ハードな線形計画問題に対しても最適解を与えることができるように考案されたアルゴリズム、ERA（External Reconstruction Approach）[2] を取り上げ、ディノウボウ計画法の有用性を明らかにしてみることにする。

II. ディノウボウ計画法

通常、製品ミックス問題に代表される配分問題は、次のような線形計画モデルとして定式化することができる。

$$\text{Max} \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i \qquad i=1, 2, \cdots\cdots, m \tag{2}$$

$$x_j \geqq 0 \qquad j=1, 2, \cdots\cdots, n \tag{3}$$

ここに、それぞれの記号は以下のように定義される。

x_j ：製品 j の生産量を表わす決定変数

2) Zeleny, M., "Multicriterion Design of High-Productivity Systems: Extensions and Applications", in Y. Y. Haimes and V. Chankong, ed., *Decision Making with Multiple Objectives,* Springer-Verlag, New York, 1985, pp. 308-321.

z ：目的の達成度(目的関数の値)を表わす変数

c_j ：製品 j を1単位生産することによって得られる利益

a_{ij} ：製品 j を1単位生産するのに必要な資源 i の使用量

b_i ：資源 i の利用可能量

周知のように、上記のモデルでは、投入(技術)係数 a_{ij}、利益係数 c_j、右辺定数 b_i を所与とした上で、目的関数 z を最大にする決定変数 x_j の値が求められる。すなわち、ここでは主として、予め確定されたモデルないしシステムの中での最適化問題が取り扱われる。

一方、ディノウボウ計画法では、同様の状況下にある問題が次のように定式化される。

$$\text{Max} \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j=\beta_i \qquad i=1, 2, \cdots\cdots, m \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \beta_i \leqq B \tag{5}$$

$$x_j \geqq 0 \qquad j=1, 2, \cdots\cdots, n$$

ここに、β_i は資源 i の購入量を表わす決定変数、p_i は資源 i の購入単価、B はシステムで利用できる総予算である。

従来の線形計画モデルとディノウボウ・モデルでは、右辺定数値（資源の量）の取り扱い方に大きな違いが見られる。前者では、右辺定数値は既知であり固定されているのに対して、後者の場合、それは決定変数として扱われ、モデルを解くことによって事後的にその最適値が求められる。すなわち、ディノウボウ・モデルは、所与のシステムの中での最適化を問題とするのではなく、システムそれ自体を最適に設計することを意図したモデルであると見なすことができる。

ところで、製品 j を1単位生産するのに必要とされる資源の購入費を v_j で表わすと、それは、

$$v_j=\sum_{i=1}^{m}p_i a_{ij} \qquad j=1,2,\cdots\cdots,n \tag{6}$$

で与えられることがわかる。そこで、v_j を用いることによって、ディノウボウ・モデルを(7)式のように定式化し直すことができる。

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{n}v_j x_j \leqq B \\ & x_j \geqq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

モデル(7)は、ナップザック問題に類似した形をしている。すなわち、決定変数に可分性は認められているものの、制約条件については予算に関するものがただ1つ存在しているだけである。したがって、(7)の最適解 x_j^* $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ は、$v_j \geqq 0$、$B \geqq 0$ の時、次式により求められる。

$$x_j^*=\begin{cases} B/v_j & : j=k \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{8}$$

ここに、k は、$c_k/v_k=\underset{j}{Max}\{c_j/v_j\}$ で与えられる。

Ⅲ．ERA のアルゴリズム

いま、議論を簡単にするために、資源 i の購入単価 p_i を $p_i=1$ $(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ とおくことによって、システムで利用できる総予算と製品 j を1単位生産するのに必要とされる資源の購入費を，それぞれ、

$$\begin{aligned} B^0 &= \sum_{i=1}^{m}b_i \\ v_j^0 &= \sum_{i=1}^{m}a_{ij} \qquad j=1,2,\cdots\cdots,n \end{aligned} \tag{9}$$

と定義し直しておく。この時、ERA で用いられるモデルは次のように定式化される。

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j \leqq b_s \qquad s=0, 1, \cdots\cdots, r \\
& \sum_{j=1}^{n} v_j^r x_j \leqq B^r \\
& x_j \geqq 0 \qquad j=1, 2, \cdots\cdots, n
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ここに、

$$
\begin{aligned}
& v_j^r = v_j^{r-1} - a_{rj} \\
& B^r = B^{r-1} - b_r
\end{aligned}
\tag{11}
$$

である。なお、(10)式の最適解を x_j^{*r} で表わすことにする。

(10)式は、$r=0$ の時には、$a_{0j}=b_0=0$ であるので、(7)式のディノウボウ・モデルと同じ形をしていることがわかる。ただ、(7)式の v_j と B が(10)式では(9)式で定義した v_j^0 と B^0 に置き換わっているだけである。

以下、簡単に ERA の解手順を概観しておくことにする。

<ステップ 1>

$r=0$ とおき、問題(10)を解く。

<ステップ 2>

問題(10)の最適解 x_j^{*r} を元の線形計画問題の制約条件式(2)の左辺に代入し、

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{*r} = \beta_i^{*r} \qquad i=1, 2, \cdots\cdots, m \tag{12}
$$

を計算する。

<ステップ 3>

$\beta_i^{*r} \leqq b_i$ が満たされていない制約条件を見出し、ステップ 4 に進む。もし、x_j^{*r} が全ての制約条件を満たしている時には、その x_j^{*r} が線形計画問題(1)〜(3)の最適解になっているため、解手順を終了する。

<ステップ 4>

$r=r+1$ とおき、$\beta_i^{*(r-1)} > b_i$ となる全ての i の中から、

$$b_r = \underset{i}{Max}\{b_i\} \tag{13}$$

を選び、それに対応する制約条件式$\sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j \leq b_r$を問題(10)に追加する。その結果、問題(10)は拡張されることになる。但し、この時、v_j^rとB^rも(11)式に従って新しい値に変更しておかなければならない。なお、制約条件式を選択する際、(13)式のかわりに、例えば、$\{\beta_i^{*(r-1)} - b_i\}$の中で一番大きな値をとる制約条件式を選ぶといったルールを用いることもできる。

＜ステップ5＞

新しいx_j^{*r}を得るために、拡張された問題(10)を解き、ステップ2に戻る。

IV. 仮設例—製品ミックス問題

2種類の製品P_1、P_2を生産している企業がある。製品P_1を1単位生産するには、原料M_1が2単位、原料M_2が6単位、原料M_3が2単位、原料M_5が7単位必要であり、製品P_2を1単位生産するには、原料M_2が12単位、原料M_3が1単位、原料M_4が3単位、原料M_5が7単位必要である。但し、各原料には利用可能量が決まっていて、原料M_1、M_2、M_3、M_4、M_5はそれぞれ12単位、60単位、12単位、12単位、49単位までしか利用できないものとする。また、製品P_1、P_2の単位当り利益はそれぞれ30単位、20単位である。さらに、原料M_1、M_2、M_3、M_4、M_5の単位当り購入価格はそれぞれ25単位、9単位、40単位、15単位、10単位であることがわかっている。したがって、全ての原料を購入するのに必要な総予算Bは、

$$B = 12 \times 25 + 60 \times 9 + 12 \times 40 + 12 \times 15 + 49 \times 10 = 1990$$

となる。この時、総利益を最大にするためには、製品P_1、P_2をそれぞれ何単位ずつ生産すればよいか。なお、以上のデータを第1表に要約しておく。

いま、製品P_1、P_2の生産量をそれぞれx_1単位、x_2単位で表わすことにすれば、上記の製品ミックス問題は、次のような線形計画モデルとして定式化することができる。

第1表

原料＼製品	P_1	P_2	利用可能量	単位当り購入価格
M_1	2	0	12	25
M_2	6	12	60	9
M_3	2	1	12	40
M_4	0	3	12	15
M_5	7	7	49	10
単位当り利益	30	20		

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z = 30x_1 + 20x_2 \\
\text{s. t.} \quad & 2x_1 \leqq 12 \\
& 6x_1 + 12x_2 \leqq 60 \\
& 2x_1 + x_2 \leqq 12 \\
& 3x_2 \leqq 12 \\
& 7x_1 + 7x_2 \leqq 49 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

これを、例えば周知のシンプレックス法によって解くと、最適解は、

$x_1^* = 5,\ x_2^* = 2,\ z^* = 190$

で与えられることがわかる。しかし、もし総原料の購入予算(1990単位)の枠内で、各原料の購入量(利用可能量)を自由に変更することができるならば、もはやモデル(14)が最適なシステムであるという保証はなくなる。なぜなら、目的関数の値を190単位よりも大きくすることができる別の原料の組合せが存在しているかもしれないからである。

そこで、モデルそのものを最適な形にするために、ディノウボウ計画法が適用される。(6)式と第1表を用いれば、v_1 と v_2 は、

$v_1 = 25 \times 2 + 9 \times 6 + 40 \times 2 + 15 \times 0 + 10 \times 7 = 254$

$v_2 = 25 \times 0 + 9 \times 12 + 40 \times 1 + 15 \times 3 + 10 \times 7 = 263$

となるので、仮設例のディノウボウ・モデルは次のように定式化できる。

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s. t.} & 254x_1+263x_2 \leqq 1990 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array} \tag{15}$$

したがって、(15)の最適解は、30/254＞20/263から、

$$x_1^*=1990/254\cong 7.8346,\ x_2^*=0,\ z^*=29850/127\cong 235.0394 \tag{16}$$

となる。その結果、同じ予算額(1990単位)を用いても原料の組合せを変更すれば、目的関数の値(総利益)は約45.0394単位増加することがわかる。

以上から、(16)の値を(14)式の制約条件の左辺に代入することによって、仮設例の最適モデルを構築することができる。それは、次式で与えられる。

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s. t.} & 2x_1 \leqq 15.6693 \\ & 6x_1+12x_2 \leqq 47.0079 \\ & 2x_1+x_2 \leqq 15.6693 \\ & 3x_2 \leqq 0 \\ & 7x_1+7x_2 \leqq 54.8425 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array} \tag{17}$$

次に、何らかの理由により、1つあるいは幾つかの制約条件の右辺の値が自由に変更できないような状況を考えてみよう。いま、例えば仮設例の原料M_1の購入量(利用可能量)が所与の値である12単位を超えることができないものとする。但し、その他の原料の購入量については予算制約以外に何の制限も課せられていない。この時、ディノウボウ・モデルは、

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s. t.} & 254x_1+263x_2 \leqq 1990 \\ & 2x_1 \qquad\qquad \leqq 12 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

と定式化することができ、最適解として、

$$x_1^*=6,\ x_2^*=466/263 \cong 1.7719,\ z^*=56660/263 \cong 215.4373$$

が得られる。それ故、この状況下での最適モデルは、

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s. t.} & 2x_1 \qquad \leqq 12 \\ & 6x_1+12x_2 \leqq 57.2624 \\ & 2x_1+\ \ x_2 \leqq 13.7719 \\ & \qquad 3x_2 \leqq 5.3156 \\ & 7x_1+\ 7x_2 \leqq 54.4030 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

と表わすことができる。

最後に、Ⅲ節で取り上げたERAの方法を例示するために、制約条件式の右辺の値が全て固定されている線形計画モデル⒁の最適解をERAによって求めてみることにする。以下、簡単にその手順を示す。

1） $r=0$ とおき、⑼式を用いて⒁式を⑽式の形で表わす。すなわち、

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s. t.} & 17x_1+23x_2 \leqq 145 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array} \tag{18}$$

これを解くと、最適解として、$x_1^{*0}=145/17 \cong 8.5294117$, $x_2^{*0}=0$, $z^{*0}=4350/17 \cong 255.88235$ が得られる。次に、これらの値を⒁式の制約条件に代入して、β_i^{*0}

第 2 表

β_i^{*0}	b_i	
17.0588	12	*
51.1765	60	
17.0588	12	*
0	12	
59.7059	49	*

の値を計算し、$\beta_i^{*0}>b_i$ となる制約条件を見出す。第 2 表を見れば、*印を付けた部分に対応する 3 つの制約条件が $\beta_i^{*0}>b_i$ を満たしていることがわかる。そこで、(13)式を用いて、これら 3 つの制約条件の中から、モデル(18)に新しく追加する式、

$$7x_1+7x_2\leqq 49 \tag{19}$$

を選び出す。

2） $r=1$ とおき、(11)式により計算された v_j^1, B^1 の値といま選定した(19)式を用いて、モデル(18)を次のように定式化し直し、その解を求める。

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z=30x_1+20x_2 \\ \text{s. t.} & 7x_1+\ \ 7x_2\leqq 49 \\ & 10x_1+16x_2\leqq 96 \\ & x_1,\ \ x_2\geqq 0 \end{array} \tag{20}$$

上記モデルの最適解は、$x_1^{*1}=7$, $x_2^{*1}=0$, $z^{*1}=210$ で与えられる。それ故、1）と同様の手順に従えば、これらの解が $\beta_i^{*1}\leqq b_i$ を満たさない制約条件は 2 つあり、そのうち、

$$2x_1+x_2\leqq 12$$

が、次の段階でモデル(20)に追加される制約条件式であることがわかる。

3） $r=2$ とおき、モデル(20)を(10)、(11)式に基づいて拡張すると、新しいモデル

は、

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z = 30x_1 + 20x_2 \\
\text{s. t.} \quad & 7x_1 + 7x_2 \leqq 49 \\
& 2x_1 + x_2 \leqq 12 \\
& 8x_1 + 15x_2 \leqq 84 \\
& x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となる。そこで、その最適解 $x_1^{*2}=5$, $x_2^{*2}=2$, $z^{*2}=190$ を、(14)式の制約条件に代入すれば第3表が得られる。この表を見ると、全ての制約条件が $\beta_i^{*2} \leqq b_i$ を満た

第3表

β_i^{*2}	b_i
10	12
54	60
12	12
6	12
49	49

している。したがって、$x_1^{*2}=5$, $x_2^{*2}=2$, $z^{*2}=190$ が、モデル(14)の最適解になっていることがわかる。

（筆者は関西学院大学商学部教授）