ディノウボウ計画法について

瀬　見　　　博

I．序

従来、マネジメント・サイエンスの分野では、多くの場合、分析の対象であるシステムを所与であると見なしてモデルが構築され、そのモデルの最適化問題にもっぱら焦点があてられてきた。例えば、数理計画法の中でも代表的な手法として知られている線形計画法や非線形計画法では、制約条件式の右辺の値は、通常、事前に与えられているものとして取扱われ、それら制約式が作りだす実行可能領域の中で、いかにすれば目的関数を合理的に最適化できるかといった解法の探求が主たる関心事になっている。しかし、右辺の値が予め決定されているような所与のシステムの中での最適化問題を考察する前に、むしろ、対象であるシステムそれ自体(例えば、右辺の値そのもの)が最適であるか否かについての議論をする必要がある。特に、今日のようにシステムを取り巻く環境が激しく変動する状況下では、システムそのものをいかに最適に設計すべきかといった問題の方が、所与のシステムの最適化問題を扱う場合よりも大きな意義がある。

そこで本稿では、Zeleny のディノウボウ計画法 (de novo programming)[1)]

1) Zeleny, M., "On the Squandering of Resources and Profits via Linear Programming", *Interfaces*, Vol. 11, 1981, pp. 101–107.
Zeleny, M., *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw–Hill, New York, 1982.
Zeleny, M., "Multicriterion Design of High–Productivity Systems", in M. Zeleny, ed., *MCDM : Past Decade and Future Trends*, JAI Press, Greenwich, 1984, pp. 169–187.
Zeleny, M., "Optimal System Design with Multiple Criteria : De Novo Programming Approach", *Engineering Costs and Production Economics*, Vol. 10, 1986, pp. 89–94.

を1つの手掛かりとして、線形計画モデルの枠内で最適システム設計の問題を検討してみることにする。

II. ディノウボウ計画法の理論的基礎

それぞれの利用可能量が限られている m 種類の資源を用いて、総利益が最大になるように n 種類の製品を生産するといったタイプの製品ミックス問題は、通常、次のような線形計画問題として定式化することができる。

$$\text{Max} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n \tag{1}$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \leqq b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \leqq b_m \\ \quad x_j \geqq 0 \end{cases} \tag{2}$$

ここに、それぞれの記号は以下のように定義される。

x_j ：製品 j の生産量を表わす決定変数

z ：目的の達成度(目的関数の値)を表わす変数

c_j ：製品 j を1単位生産することによって得られる利益

a_{ij} ：製品 j を1単位生産するのに必要な資源 i の使用量

b_i ：資源 i の利用可能量

周知のように、上記の伝統的な線形計画モデルにおいては、制約条件式(2)の右辺の値 b_i(利用可能な資源量)が事前に定数として与えられており、これらをいくつかの競合する活動(製品の生産)間にどのように配分すれば、最も合理的かといった問題が主として取扱われる。すなわち、ここではもっぱら、システムは所与であると見なされ、その中での最適化問題に話題が限定されることになる。

一方、ディノウボウ計画法では、同様の状況下にある問題が次のように定式化される。

$$\text{Max}\quad z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n \tag{3}$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=x_{n+1} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=x_{n+2} \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=x_{n+m} \end{cases} \tag{4}$$

$$p_1x_{n+1}+p_2x_{n+2}+\cdots\cdots+p_mx_{n+m}\leqq B \tag{5}$$

$$x_j,\quad x_{n+i}\geqq 0$$

ここに、x_{n+i} は資源 i の購入量を表わす決定変数、p_i は資源 i の単位当り購入価格、B はシステムで利用できる総予算である。

線形計画モデルとディノウボウ・モデルでは、資源の取扱いに大きな違いが見られる。すなわち、前者の場合、資源の量は固定されており既知であるのに対して、後者では、それも決定変数であると見なされる。そして、一定の予算制約式(5)の範囲内で購入されるべき資源の最適量が、モデルを解くことによって求められる。したがって、ディノウボウ・モデルでは、従来の線形計画モデルのように所与のシステムの中での最適化を問題とするのではなく、システムそれ自体を最適に設計することが意図されているのである。

ところで、(4)の x_{n+i} を予算制約式(5)に代入し、その結果得られる x_j, $(j=1, 2, \ldots, n)$ の係数を v_j とおくことによって、すなわち、v_j, $(j=1, 2, \ldots, n)$ を、

$$p_1a_{1j}+p_2a_{2j}+\cdots\cdots+p_ma_{mj}=v_j \tag{6}$$

と定義することによって、ディノウボウ・モデルは、次のように変形し直すことができる。

$$\begin{cases} \text{Max}\quad z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n \\ \text{s. t.}\quad v_1x_1+v_2x_2+\cdots\cdots+v_nx_n\leqq B \\ \qquad\qquad x_j\geqq 0 \end{cases} \tag{7}$$

ここに、v_j は製品 j を1単位生産するのに必要な資源の購入費である。

以上から、もし他に制約条件がなければ、(3)〜(5)で与えられるディノウボウ・モデルは、予算に関するただ1つの制約条件を持つナップザック問題(7)に

帰着できることがわかる。それ故、周知のナップザック問題の解手順に従って、このモデルの解を次のように求めることができる。

＜ステップ1＞ $\underset{j}{\mathrm{Max}}\,(c_j/v_j)$ を求め、それを k とおく。すなわち、このステップでは最も収益性の高い製品 k が探索される。なお、(c_j/v_j) なる比率は製品 j の収益性を表わす。

＜ステップ2＞ 製品 k の生産量 x_k を、$x_k=B/v_k$ により決定する。このことは、最も収益性の高い製品だけが予算内でできるだけ多く生産されることを意味している。但し、製品 k の需要量に制限がある場合、すなわち、x_k に上限が設定されており、しかも、それが B/v_k より小さくて予算が余る時には、ステップ1に戻って、次に収益性の高い製品の探索が行われる。

Ⅲ. 多目的線形計画問題への適用

上述のディノウボウ計画法の考え方は、多目的線形計画問題にも拡張して適用することができる。

一般に、多目的線形計画問題は、次のように定式化される。

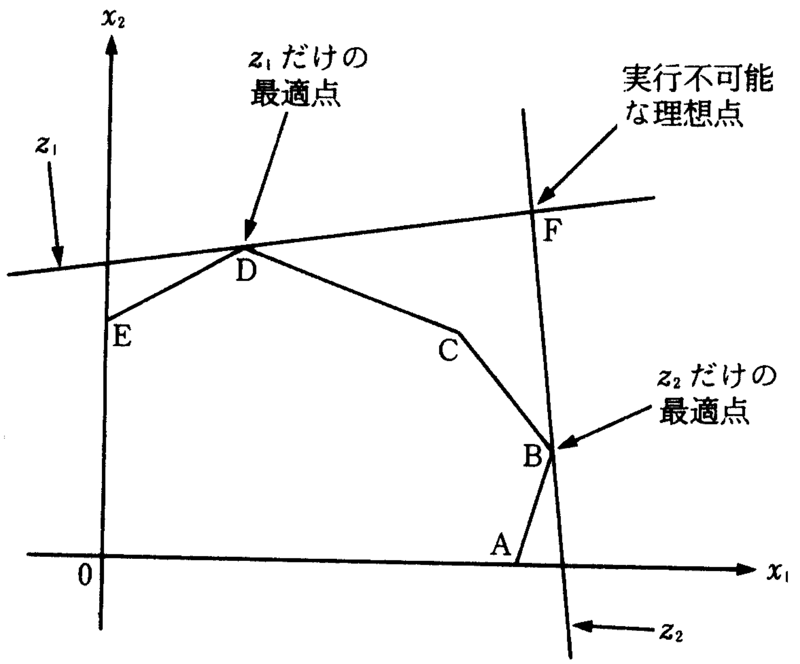
$$\mathrm{Max}\ \begin{cases} z_1=c_1^1x_1+c_2^1x_2+\cdots\cdots+c_n^1x_n \\ z_2=c_1^2x_1+c_2^2x_2+\cdots\cdots+c_n^2x_n \\ \quad\vdots \\ z_k=c_1^kx_1+c_2^kx_2+\cdots\cdots+c_n^kx_n \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathrm{s.\,t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqq b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leqq b_m \\ \quad x_j\geqq 0 \end{cases} \tag{9}$$

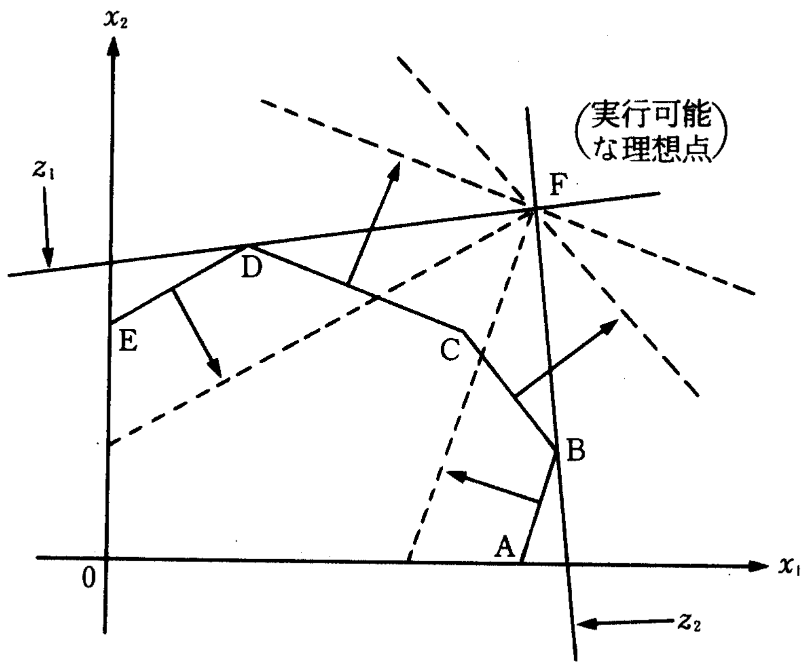
このモデルでは、制約条件式(9)を満たす実行可能領域の中から、(8)で与えられる k 個の目的関数を全て最大にするような n 個の決定変数 x_j の値が探索される。しかし、多くの場合、各目的間に非通約性(incommensurability)[2] や非両

2) 非通約性とは、全ての目的関数が例えば貨幣といった共通の単位に還元して測定・評価できない性質のことをいう。

第1図　伝統的な2目的の製品ミックス問題



第2図　改良された2目的の製品ミックス問題



立性(trade-off)が存在しているため、第1図で例示されるように、全ての目的関数を同時に満たす完全最適解(complete optimal solution)を決定することは事実上不可能となる。そこで、多目的線形計画問題では、解の概念を拡張して、完全最適解の代わりにパレート最適解(Pareto optimal solution)が求められる。ここに、パレート最適解とは、少なくとも1つのある別の目的の達成度を減少させることなしには、それ以上もはやいかなる目的の達成度をも増大させることができないような状況下で得られる解のことをいい、非劣解(non-inferior solution)とか有効解(efficient solution)などとよばれることもある。ところが、パレート最適解が求められても、一般にそれは多数存在している。したがって、その中からさらに1つの解を選びだすことが必要になる。すなわち、通常の多目的線形計画問題では、まずパレート最適解の集合(パレート効率域)が求められ、次にその中から何らかの基準に基づいて1つの選好解(preferred solution)とか妥協解(compromise solution)が決定されるといった2段階の手順を踏んで解が求められることになる[3]。

ここで、多目的線形計画問題にディノウボウ計画法の考え方を適用してみることにする。この問題に対応するディノウボウ・モデルは、前節の議論に基づけば、次のように単純な形で定式化できることがわかる。

$$\text{Max}\ \begin{cases} z_1 = c_1^1 x_1 + c_2^1 x_2 + \cdots\cdots + c_n^1 x_n \\ z_2 = c_1^2 x_1 + c_2^2 x_2 + \cdots\cdots + c_n^2 x_n \\ \vdots \\ z_k = c_1^k x_1 + c_2^k x_2 + \cdots\cdots + c_n^k x_n \end{cases} \tag{10}$$

$$\text{s. t.}\ \begin{cases} v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots\cdots + v_n x_n \leqq B \\ x_j \geqq 0 \end{cases} \tag{11}$$

ディノウボウ計画法の最大の特徴は、既述したように、資源の制約量、すな

3) 多目的意思決定問題に対しては、これまでに数多くの解手法が開発されてきている。これらの解手法については、例えば、Hwang, C. L. and A. S. M. Masud, *Multiple Objective Decision Making–Methods and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1979. や Tabucanon, M. T., *Multiple Criteria Decision Making in Industry*, Elsevier, New York, 1988. などを参照されたい。

わち制約条件式(9)の右辺の値 b_i が固定されておらず、一定の予算の枠内で自由に変更できることである。それ故、第2図で例示されるように、ディノウボウ・モデルを用いて資源の量を再調整すれば、従来の多目的線形計画モデルでは実行不能であった理想解(ideal solution)を実行可能な解に変えることができるかもしれない。あるいは、予算に制限があるために理想解の完全な実現が望めなくても、それに極めて近い満足できる解が得られるようになるかもしれない。さらに場合によっては、同じ予算の枠内で理想解よりも良い解が求められる可能性もある。

以下では、多目的線形計画問題に対して具体的にディノウボウ計画法がどのように適用されるのかを、簡単な仮設例を用いながら説明していくことにする。

＜仮設例－製品ミックス問題＞

2種類の製品 P_1、P_2 を生産している企業がある。製品 P_1 を1単位生産するには、原料 M_1 が2単位、原料 M_2 が6単位、原料 M_3 が2単位、原料 M_5 が7単位必要であり、製品 P_2 を1単位生産するには、原料 M_2 が12単位、原料 M_3 が1単位、原料 M_4 が3単位、原料 M_5 が7単位必要である。また、各原料には利用可能量が決まっていて、原料 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 はそれぞれ12単位、60単位、12単位、12単位、49単位までしか利用できないものとする。さらに、原料 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 の単位当り購入価格はそれぞれ25単位、9単位、40単位、15単位、10単位であることがわかっている。したがって、全ての原料を購入するのに必要な総予算 B は、

第1表

製品 / 原料	P_1	P_2	利用可能量	単位当り購入価格
M_1	2	0	12	25
M_2	6	12	60	9
M_3	2	1	12	40
M_4	0	3	12	15
M_5	7	7	49	10

$B=12\times 25+60\times 9+12\times 40+12\times 15+49\times 10=1990$

となる。なお、これらのデータを要約すれば第1表が得られる。

いま、製品 P_1、P_2 の生産量をそれぞれ x_1 単位、x_2 単位とする。また、意思決定者は、総利益を最大にし、同時に製品の品質を最高にしたいという2つの願望 z_1、z_2 を持っており、それぞれが、決定変数 x_1、x_2 の関数として、

$z_1=30x_1+20x_2$（総利益）、$z_2=30x_1+40x_2$（品質）

で与えられるものとしよう。この時、以上の製品ミックス問題は、次のような2目的の線形計画問題として定式化することができる。

$$\text{Max}\quad z_1=30x_1+20x_2 \tag{12}$$

$$z_2=30x_1+40x_2 \tag{13}$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases} 2x_1 \leqq 12 \\ 6x_1+12x_2\leqq 60 \\ 2x_1+x_2\leqq 12 \\ 3x_2\leqq 12 \\ 7x_1+7x_2\leqq 49 \\ x_1,\ x_2\geqq 0 \end{cases} \tag{14}$$

この問題には、2つの目的関数を同時に満たす完全最適解が存在していない。したがって、まず、現システム下での理想点（2つの目的関数のそれぞれの最適値が同時に達成できる点）を見つけだすために、制約条件式(14)の下で各目的関数ごとの最適解を求めてみる。その結果、z_1 に関しては、$x_1=5$、$x_2=2$、$z_1=190$、また z_2 に関しては、$x_1=4$、$x_2=3$、$z_2=240$ となる最適解が得られる。すなわち、現時点で同時に達成することのできない理想点 z^* は、

$$z^*=(z_1^*, z_2^*)=(190, 240) \tag{15}$$

で与えられることがわかる。

そこで、次に、$B=1990$ 単位の予算の枠内で現システムを改善することによって、すなわち原料の利用可能量を変更することによって、この理想点(15)が達成可能になるか否かが検討される。理想点が達成されるためには、製品 P_1、P_2 をそれぞれ $x_1=14/3$ 単位、$x_2=5/2$ 単位生産しなければならない。これは、

$$\begin{cases} 30x_1+20x_2=190 \\ 30x_1+40x_2=240 \end{cases} \tag{16}$$

を解くことによって求められる。したがって、これらの値を(14)の左辺に代入すれば、理想点を実行可能点にするのに必要な原料の利用可能量が新たに決定できる。それを要約したものが第2表である。なお、(16)の解は、次の2目的線形計画問題の解と一致する。

$$\begin{aligned} \text{Max}\quad & z_1=30x_1+20x_2 \\ & z_2=30x_1+40x_2 \\ \text{s. t.}\quad & 2x_1 \leqq 9.333 \\ & 6x_1+12x_2 \leqq 58 \\ & 2x_1+\ \ x_2 \leqq 11.833 \\ & 3x_2 \leqq 7.5 \\ & 7x_1+\ 7x_2 \leqq 50.166 \\ & x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

第2表から、新しいシステムの下で原料を購入するのに必要な費用の総和は、

第2表

原料	新たな利用可能量	もとの利用可能量	単位当り購入価格
M_1	9.333	12	25
M_2	58.000	60	9
M_3	11.833	12	40
M_4	7.500	12	15
M_5	50.166	49	10

1842.833単位であることがわかる。このことは、当初のシステムより147.167単位少ない予算で、もともと達成できなかった理想点(15)が達成できるようになったことを意味している。当然、ここで新たに求められたシステムの方が、もとのシステムよりも優れたものであることはいうまでもない。なぜなら、余った予算147.167単位で原料を追加購入することによって、目的の達成度を理想点

⒂よりも大きくできる可能性が残されているからである。

さて、それでは目的の達成度をどの程度⒂の理想点より大きくすることができるであろうか。この問題を解決するためには、まず、システムそれ自体の理想点、すなわちメタ最適点(metaoptimal point)を決定しなければならない。この点は、それぞれの目的関数に対して、個別にディノウボウ計画法の考え方を適用することにより求められる。いま、⑹より v_1 と v_2 は、

$$v_1=2\times25+6\times9+2\times40+0\times15+7\times10=254$$

$$v_2=0\times25+12\times9+1\times40+3\times15+7\times10=263$$

となるので、仮設例のディノウボウ・モデルは次のように定式化できる。

$$\begin{aligned}\text{Max}\quad & z_1=30x_1+20x_2\\ & z_2=30x_1+40x_2\\ \text{s. t.}\quad & 254x_1+263x_2\leqq1990\\ & x_1,\ x_2\geqq0\end{aligned}$$

したがって、このモデルの各目的関数に対して、既述のディノウボウ計画法の解手順が適用される。その結果、z_1 に関しては、$30/254>20/263$ から、製品 P_1 を、また z_2 に関しては、$30/254<40/263$ から製品 P_2 を、それぞれ予算内で最大限に生産すればよいことがわかる。すなわち、予算の上限が1990単位であるから、個別に達成できる最適システムは、z_1 の場合が、

$$x_1=1990/254=7.8346、x_2=0、z_1=235.0394$$

また、z_2 の場合が、

$$x_1=0、x_2=1990/263=7.5665、z_2=302.6616$$

となる。以上から、メタ最適点 z_* は、

$$z_*=(235.0394,\ 302.6616)$$

で与えられることがわかる。次に、メタ最適点を達成するのに必要な原料の購入量が決定される。これは、

$$\begin{cases}30x_1+20x_2=235.0394\\ 30x_1+40x_2=302.6616\end{cases}$$

を解くことによって得られる解、$x_1=5.5806$、$x_2=3.3811$ を⒁の左辺に代入す

れば求められる。また、その時の原料の購入費も容易に計算することができる。それらは第3表に纏められている。

第3表

原料	新たな利用可能量	費用
M_1	11.1612	279.0300
M_2	74.0568	666.5112
M_3	14.5423	581.6920
M_4	10.1433	152.1495
M_5	62.7319	627.3190
計	172.6355	2306.7017

第4表

原料	最適量
M_1	9.6288
M_2	63.8891
M_3	12.5457
M_4	8.7507
M_5	54.1190

以上で、仮設例に対するメタ最適システムを設計することができた。しかし、第3表から、メタ最適点z_*が実行可能な点であるためには、当初の予算を上回る2306.7017単位の購入費用が必要であることがわかる。したがって、1990単位しか予算を使えない時の最適システム、すなわち原料の最適購入量を別に決定しなければならない。これは、第3表で与えられているメタ最適点z_*に関する原料の利用可能量に、比率(1990/2306.7017)を掛けることによって求められる。この値が第4表に示されている。また、この時の製品P_1とP_2の生産量はそれぞれ、$x_1=4.8144$、$x_2=2.9169$であり、それに対応する最適システムの目的関数値は、$z_1=202.77$、$z_2=261.108$となる。

IV. 結

さて、これまで、最適システムを設計するための1つの方法としてZelenyにより提案されたディノウボウ計画法について、仮設例を交えながら考察してきた。そこで、以下では製品ミックス問題を念頭におきつつ、ディノウボウ計画法の特徴と問題点について簡単に言及しておくことにする。

ディノウボウ計画法を、製品の需要量に制限がなく目的関数が1つの製品ミックス問題に適用した場合、得られた最適システムの下では、最も収益性の

高い製品だけが生産される。これは、経済的にみて理に適っている。それでは、この計画法を需要量が無制限な多目的問題に適用した場合はどうであろうか。目的関数の数が製品の数に等しいかまたは少ない時、最適システムでは目的関数と同じ数だけの製品が生産される。しかし、製品の数より目的関数の数が多くなった場合には、同じ製品に対して生産量の上限が複数個でてくる可能性がある。この時、メタ最適点をどのような基準に基づいて決定すればよいかが明らかでない。また、ディノウボウ計画法は、原料の利用可能量、すなわち、制約条件式の右辺の値を自由に変更できる点が特徴であるが、もし何らかの理由によりその値を変えることができないような原料がでてきた場合に、この計画法がそのままうまく機能するかどうかもわからない。これらが、今後に残された課題である。かかる問題点がある反面、最適システムが設計された後、すなわちメタ最適点が決定された後、システムを構成する価格、技術係数、目的関数、需要量の制限などが変化しても、非常に簡単な計算でそれを設計し直すことができるなど、ディノウボウ計画法には多くの利点も存在している。

(筆者は関西学院大学商学部教授)