対話型手法による多目的意思決定分析

瀬　見　　　博

I．はじめに

一般に、多目的意思決定問題は、ベクトル最大化問題という形で、次のように定式化できる。

$$\begin{cases} \text{Max } [f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \cdots\cdots, f_k(\bar{x})] \\ \text{s. t.} \quad \bar{x} \in X \end{cases} \tag{1}$$

ここに、$\bar{x}$はn次の決定変数ベクトルである。また、Xは$X=\{\bar{x} \mid \bar{g}(\bar{x}) \leqq \bar{0}\}$、すなわち、制約式$g_i(\bar{x}) \leqq 0$, $i=1, 2, \cdots, m$の集合によって特定化される実行可能集合を表わす。さらに、$f(\bar{x})$, $g(\bar{x})$ は線形、非線形の何れであってもかまわない。この時、(1)は、m個の制約条件の下で、k個の目的を最大にするn個の決定変数の値を求める問題になる。しかし、通常、k個の目的を同時に全て最大にするような解は見出せない。何故なら、各目的間にはコンフリクトや非通約性が存在しているからである。したがって、多目的意思決定問題ではもっぱら、非劣解とかパレート最適解、有効解と呼ばれる解が探索される。

さて、一口に多目的意思決定問題といっても、その中にはさまざまなタイプの問題が含まれている。例えば、Hwang–Masud[1] は、これをまず、分析過程において、何らかの選好情報が与えられる場合と、そうでない場合とに大別し、次いで、前者をさらに、選好情報が提供される時期[2]とその種類[3]に応じて、5

1）C. L. Hwang and A. S. M. Masud, *Multiple Objective Decision Making–Methods and Applications,* Springer–Verlag, New York, 1979, pp. 7–11.

2）時期については、分析に先立って事前的に与えられる場合、分析の途中で逐次的に与えられる場合、分析が終ったあと事後的に与えられる場合の3つがある。

3）種類については、基数的情報、序数的情報、陽的（explicit）なトレード・オフ情報、陰的（implicit）なトレード・オフ情報の4つがある。

つに分類している。そして、全部で6つの問題のそれぞれに対して、解を効率的に導き出すことのできるいくつかの解法を提示している。

ところで、現実の多目的意思決定問題では、予め与えられた選好情報に基づいて決定が行われるといった場合よりも、むしろ、問題が非常に複雑であるために、その問題に対する学習を繰返すことにより、逐次的に改善されていく局所的な選好情報を用いて決定が下されるといった場合の方が多いように思わる。これは、Hwang–Masud の分類に従えば、分析の過程で、選好情報が逐次的に提供される問題の解法に相当する。そこで、本稿では、現実に数多く見受けられるこの種の問題解決方法の1つとして考案されてきた、いわゆる、対話型手法（interactive method）と呼ばれているものについて検討してみることにしたい。ただし、ここでは陽的（explicit）なトレード・オフ情報が与えられている場合、すなわち、目的の特定の達成水準について、意思決定者が望ましいトレード・オフを指摘することができる場合に話題を限定する。より具体的には、Geoffrion[4] と Zionts–Wallenius[5] によって提案された2つの手法が論じられることになる。

II. Geoffrion の方法

ベクトル最大化問題(1)を、意思決定者の効用関数の極大化問題として定式化し直すと、次のようになる。

$$\begin{cases} \text{Max } U(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \cdots, f_k(\bar{x})) \\ \text{s.t. } \quad \bar{x} \in X \end{cases} \tag{2}$$

ここに、$U(f) = U(f_1(\bar{x}), \cdots, f_k(\bar{x}))$ は k 個の目的関数の上で定義される意思決定者の効用関数を表わす。

4) A. M. Geoffrion, J. S. Dyer and A. Feinberg, "An Interactive Approach for Multicriterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department", *Management Science*, Vol. 19, No. 4, 1972, pp. 357–368.

5) S. Zionts and J. Wallenius, "An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem", *Management Science*, Vol. 22, No. 6, 1976, pp. 652–663.

いま、$U(\bar{f})$ の関数形は未知で、その局所的な選好情報だけが利用できるものとしよう。この時、Geoffrion らは、勾配法（gradient methods）と呼ばれる非線形計画法のアルゴリズムのうち、方法そのものが平易で、しかも強い収束性がある Frank–Wolfe 法を対話的に用いることによって、問題(2)の解が見出せることを示した。なお、Frank–Wolfe 法が適用できるためには、以下の仮定が満たされていなければならない。

1）X はコンパクトな凸集合である。

2）$U(\bar{f})$ は連続微分可能、かつ $\bar{x}$ 上で凹である。

3）$f_i(\bar{x})$, （$i=1,2,\cdots,k$）は凹である。

4）$\bar{x}^i$の近傍において $\partial U/\partial f_1>0$ が成り立つ。ここに、$\bar{x}^i$は i 回目の反復時点での $\bar{x}$の値を表わす。また、$f_1(\bar{x})$ は基準目的（reference objective）と呼ばれる。

ここで、$U(\bar{f})$ が既知である時の Frank–Wolfe アルゴリズムを簡単に概観しておこう。

ステップ 1

問題の初期実行可能解 $\bar{x}^i\in X$ を選択する。そして、$i=1$ とおく。

ステップ 2

方向発見問題（direction–finding problem）：

$$\begin{cases}\text{Max } \nabla_{\bar{x}} U(f_1(\bar{x}^i), f_2(\bar{x}^i), \cdots, f_k(\bar{x}^i)) \cdot \bar{y} \\ \text{s. t.} \quad \bar{y}\in X\end{cases} \tag{3}$$

の最適解 $\bar{y}^i$を決定する。そして、

$$\bar{z}^i=\bar{y}^i-\bar{x}^i$$

とおく。

ステップ 3

ステップ幅決定問題（step–size problem）：

$$\begin{cases} \text{Max } U(f_1(\bar{x}^i + t\bar{z}^i), \cdots, f_k(\bar{x}^i + t\bar{z}^i)) \\ \text{s. t.} \quad 0 \leqq t \leqq 1 \end{cases} \tag{4}$$

の最適解 t^i を決定する。そして、

$$\bar{x}^{i+1} = \bar{x}^i + t^i \bar{z}^i, \quad i = i+1$$

とおき、ステップ2に戻る。

なお、以上のアルゴリズムは、理論的には $\bar{x}^i = \bar{x}^{i+1}$ が成立した時に終了する。しかし、このようなことはごく稀にしか起こらないので、通常は $\|\bar{x}^i - \bar{x}^{i+1}\| < \varepsilon$ が満たされた時に終了したものとみなす。ここに、ε は事前に与えられる微小な正数である。

ところで、$U(\bar{f})$ は既述したように未知であると想定されているので、問題(3), (4)を解くためには意思決定者の助言がどうしても必要になる。すなわち、ステップ2と3を実行するのに必要な情報が、意思決定者との対話によって獲得されなければならない。$U(\bar{f})$ は未知であるけれども、ある特定の解が与えられた時、意思決定者は比較的容易に任意の2つの目的間のトレード・オフ (trade-off) を見積ることができる。

まず、ステップ2の最適化問題(3)について考えてみよう。導関数の連鎖則 (chain rule) を用いると、目的関数は次のように表現することができる。

$$\nabla_{\bar{x}} U(f_1(\bar{x}^i), \cdots, f_k(\bar{x}^i)) \cdot \bar{y}$$

$$= \left[\frac{\partial U}{\partial f_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial U}{\partial f_k}\right]_{\bar{f}^i} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}^i} \cdot \bar{y}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial U}{\partial f_j^i} \cdot \nabla_{\bar{x}} f_j(\bar{x}^i)\right] \cdot \bar{y}$$

ここに、$\partial U / \partial f_j^i$ は点 $(f_1(\bar{x}^i), \cdots, f_k(\bar{x}^i))$ で評価された目的 f_j に関する U の偏導

関数である。また、$\nabla_{\bar{x}} f_j(\bar{x}^i)$ は $\bar{x}^i$ で評価された f_j の勾配を表わす。問題(3)の解は目的関数に正のスカラーを掛けても影響を受けない。そこで、目的関数を正数 $\partial U/\partial f_1^i$ で割ることによって、(3)と等価な問題、

$$\begin{cases} \mathrm{Max} \ \sum_{j=1}^{k} w_j^i \nabla_{\bar{x}} f_j(\bar{x}^i) \cdot \bar{y} \\ \mathrm{s.\,t.} \quad \bar{y} \in X \end{cases} \tag{5}$$

を得ることができる。ここに、w_j^i は次式で定義される。

$$w_j^i = (\partial U/\partial f_j^i)/(\partial U/\partial f_1^i), \ j=1, 2, \cdots, k \tag{6}$$

また、f_1 は基準目的と名づけられている[6]。加重値 w_j^i は、現行の点 $\bar{x}^i$ における意思決定者の f_1 と f_j 間のトレード・オフを表わしている。それ故、問題を解く前に、意思決定者はこれらの値 w_j^i を特定化しなければならない。w_j^i を得るための 1 つの方法は、他の全ての目的を一定に保ったままで、j 番目の目的の変化分 Δf_j に丁度見合うだけの基準目的の微小な変化分 Δf_1 を決定することである。その時、(6)は、

$$w_j^i = -\frac{\Delta f_1}{\Delta f_j} \tag{7}$$

によって近似できる。一般に w_j^i は、目的間の限界代替率とか、意思決定者の無差別トレード・オフ（indifference trade-off）と呼ばれている。

次に、ステップ 3 の最適化問題(4)に移ろう。問題(4)も U が未知であるため直接解くことはできない。したがって、意思決定者に依存して解が求められることになる。しかし、変数が t だけであるので、t^i の決定はそれほど難しくない。すなわち、閉区間〔0,1〕内の t について関数 $f_j(\bar{x}^i + t\bar{z}^i)$, $j=1, 2, \cdots, k$ の値を計算し、それを表かグラフにプロットした後、最も選好される目的に対応する t の値を意思決定者に選んでもらえばよい。

さて、Geoffrion の方法を例示するために、次のような仮設例を具体的に解いてみることにしよう。

6) f_1 以外の目的を基準目的に選んでも何ら差支えない。

〔仮設例〕

$$\begin{cases} \text{Max} \quad f_1(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Max} \quad f_2(\bar{x}) = -2x_1 - x_2 \\ \text{s. t.} \quad 3x_1 + x_2 \leqq 18 \\ \qquad x_1 + 2x_2 \leqq 14 \\ \qquad x_1 + x_2 \leqq 8 \\ \qquad x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{cases}$$

図1は、この仮設例の実行可能領域を示している。また、制約式を目標空間上に位置づけることによって、図1のA–B–Cを結ぶ線上の点は、全て有効解になっていることがわかる。

まず、初期の実行可能解として点 $\bar{x}^1 = (4, 4)$ が選ばれたものとする。この点

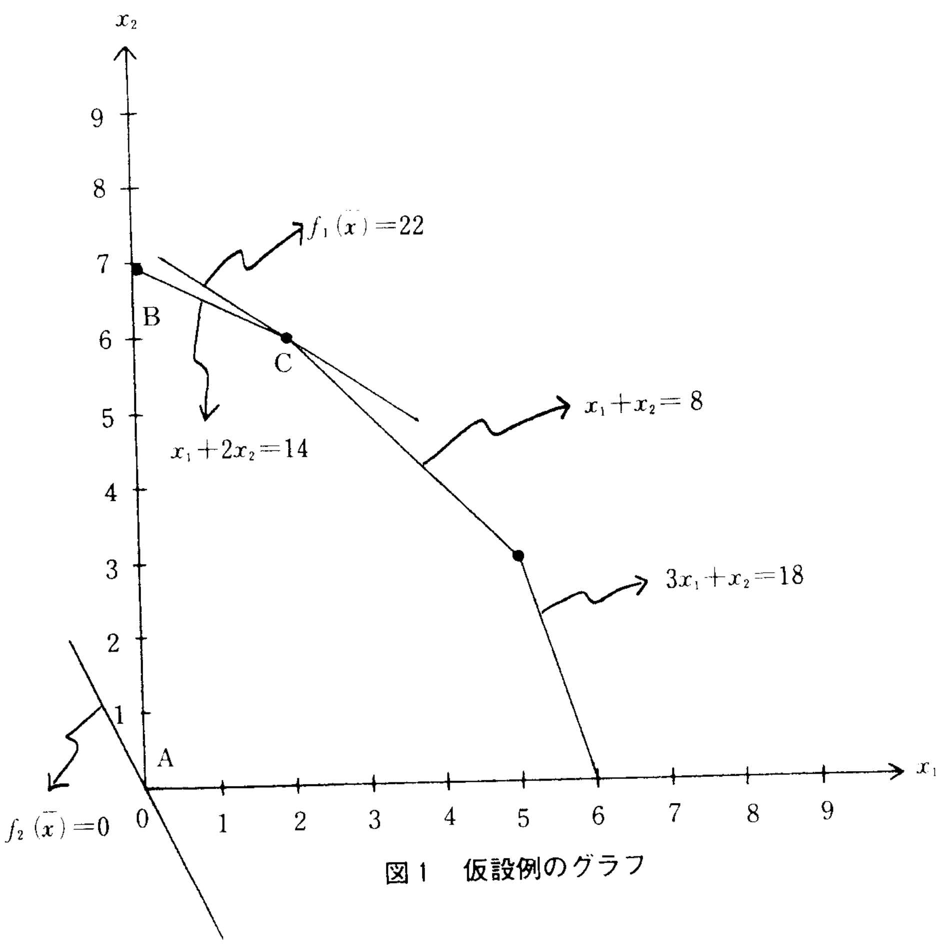

図1　仮設例のグラフ

の目的関数値は、$\bar{f}^0=(f_1(\bar{x}^1), f_2(\bar{x}^1))=(20, -12)$ で与えられる。

次に、加重値 w_j^1, $j=1$, 2 を決定するために、無差別トレード・オフ $(-\Delta f_1/\Delta f_2)$ を特定化しなければならない。いま、f_1 と f_2 に関して、

$$\bar{f}=(20, -12)\sim\bar{f}=(20-2, -12+4)$$

なるトレード・オフが意思決定者によって提示されたものとしよう。この時、

$$w_2^1=-\frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2}$$

であるから、(5)の目的関数は、

$$\sum_{j=1}^{2} w_j^1 \nabla_{\bar{x}} f_j(\bar{x}^1)\cdot\bar{y}=1(2,3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(-2,-1)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$
$$=y_1+\frac{5}{2}y_2$$

と表わせる。そこで、方向発見問題：

$$\begin{cases}\text{Max} & y_1+\dfrac{5}{2}y_2\\ \text{s. t.} & \bar{y}\in X\end{cases}$$

を解き、その解 $\bar{y}^1=(y_1^1, y_2^1)=(0, 7)$ を用いて改善方向 $\bar{z}^1$ を求めると、

$$\bar{z}^1=\bar{y}^1-\bar{x}^1=(0,7)-(4,4)=(-4,3)$$

が得られる。

次いで、最適なステップ幅を決定するために、0.2 きざみの t に対して $f_j(\bar{x}^1+t\bar{z}^1)$ の値が計算され、その結果が意思決定者に示される（表 1)。表 1 をみれば、(21, -7) が他の全ての値を支配しているので、意思決定者はこれを

表 1

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f_1	20	20.2	20.4	20.6	20.8	21
f_2	-12	-11	-10	-9	-8	-7

最も選好できる解$\bar{f}^1$として選ぶだろう。すなわち、最適なステップ幅は$t^1=1$になる。それ故、新しい実行可能解は、

$$\bar{x}^2=\bar{x}^1+t^1\bar{z}^1=(0, 7)$$

で与えられることがわかる。そして、次の反復過程が開始される。

2回目の反復過程で、意思決定者が$\bar{f}^1$の水準におけるf_1とf_2の間のトレード・オフを以下のように定めたものとしよう。

$$\bar{f}=(21, -7)\sim\bar{f}=(21-6, -7+2)$$

この時、

$$w_2^2=-\frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}=-\frac{-6}{2}=3$$

から、(5)の目的関数は、

$$\sum_{j=1}^{2}w_j^2\nabla_{\bar{x}}f_j(\bar{x}^2)\cdot\bar{y}=1(2, 3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+3(-2, -1)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$
$$=-4y_1$$

と表わせる。それ故、方向発見問題は、

$$\begin{cases}\text{Max} & -4y_1\\ \text{s. t.} & \bar{y}\in X\end{cases}$$

で与えられる。これを解くと最適解として

$$\bar{y}^2=(y_1^2, y_2^2)=(0, 0)$$

が求まるので、改善方向$\bar{z}^2$は、

$$\bar{z}^2=\bar{y}^2-\bar{x}^2=(0, 0)-(0, 7)=(0, -7)$$

となる。

次に、$f_i(\bar{x}^2+t\bar{z}^2)$ の値が0.2きざみの t に対して計算され意思決定者に提示される（表2）。

表2

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f_1	21	16.8	12.6	8.4	4.2	0
f_2	−7	-5.6	-4.2	-2.8	-1.4	0

表2をみて意思決定者は（12.6, −4.2）に強い関心を示したが、ただ f_1 の値をもう少しだけ大きくしたいといった希望を述べたものとしよう。そこで、t を0.4から0.35に変えてみたところ、その結果の（13.65, −4.55）について満足が得られた。すなわち、$\bar{f}^2=$（13.65, −4.55）が選好されたことにより、最適なステップ幅は $t^2=0.35$ となることがわかった。それ故、次の反復過程で吟味される新しい実行可能解は、

$$\bar{x}^3=\bar{x}^2+t^2\bar{z}^2=(0, 4.55)$$

で与えられる。

ところが、3回目の反復過程を実行した場合、意思決定者は、$\bar{f}^2$ よりも選好し得る $\bar{f}$ を生み出してくれるような正のステップ幅 t を見つけることができなかった。したがって、アルゴリズムは終了し、$\bar{f}=(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))=(13.65, -4.55)$ をもたらす $\bar{x}=(x_1, x_2)=(0, 4.55)$ が、この仮設例の最良の妥協解（best compromise solution）であるといった結論が得られる。

Ⅲ. Zionts–Wallenius の方法

一般に、Zionts–Wallenius 法には次のような仮定がおかれている。(1)最大化すべき全ての目的関数は凹で、実行可能解の集合は凸である。(2)非線形の目的関数と制約式は1次近似により線形化される。(3)意思決定者の効用関数 $U(f_1(\bar{x}), \cdots, f_k(\bar{x}))$ は未知であるけれども、それが目的関数の凹関数として表わせることだけはわかっている。

以上から、線形化された制約集合の端点の1つが、意思決定者にとって最良の妥協解をもたらすことになる。

さて、Zionts–Wallenius 法の解導出プロセスを簡単に概観しておこう。まず、意思決定者が任意に選出した正の加重値の集合を用いて、合成目的関数(効用関数)を作成する。そして、非支配解を導き出すために合成目的関数を最適化した後、有効変数（efficient variable）の部分集合を非基底変数の集合から抽出する。ここに、有効変数とは、基底に組込まれた時、他の少なくとも1つの目的を減少させることなしに、ある目的を増加させることができないような変数のことをいう。それから、各有効変数に対して、ある目的を減少させながら、同時にある目的を増加させるようなトレード・オフの集合を定義する。これらのトレード・オフを意思決定者に提示して、望ましい、望ましくない、どちらともいえない、といった判断を下してもらう。この返答に基づいて新しい加重値の集合を作り、解導出プロセスを初めから繰返す。なお、意思決定者が満足解を見出した時点で、このプロセスは終了する。

以上のことを基にして、Zionts–Wallenius 法のアルゴリズムを要約すると、次のようになる。

ステップ1…初期化

最初に、正の加重値の集合 $\bar{\lambda}^1$ を任意に選ぶ。$t=1$ とおく。

ステップ2…合成目的関数の作成と解の導出

加重値 $\bar{\lambda}^t$ を用いて合成目的関数を作り、線形計画問題(8)を解くことによって非支配解を求める。そして、非基底変数の集合を識別する。

$$\begin{cases} \text{Max } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^t f_i(\bar{x}) \\ \text{s. t. } \; g_j(\bar{x}) \leqq 0, \; (j=1, 2, \cdots, m) \\ \qquad \bar{x} \geqq \bar{0} \end{cases} \tag{8}$$

ここで、$f_i(\bar{x})$ と $g_j(\bar{x})$ がもともと非線形式で与えられている時には、それらを線形化しなければならない。

ステップ3…有効変数の抽出

まず、非基底変数x_lの1単位を解に導入することにより生じる目的関数$f_i(\bar{x})$の減少分をw_{il}で表わし、それをステップ2で得られた解のまわりで推定する。その後、それぞれの非基底変数x_l, $l \in N$について、次の線形計画問題を解くことにより、有効変数を見出す。

$$\begin{cases} \text{Min} & \sum_{i=1}^{k} w_{il}\lambda_i \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^{k} w_{ij}\lambda_i \geqq 0,\ j \in N;\ j \neq l \\ & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \\ & \bar{\lambda} \geqq \bar{0} \end{cases} \tag{9}$$

ここに、Nは非基底変数の集合を表わす。

いま、(9)の目的関数の最小値が負であれば、変数x_lは有効であるとみなされる。しかし、非負であれば、それは有効でない。また、有効変数x_jに関しては、少なくとも1つの正のw_{ij}と少なくとも1つの負のw_{ij}が存在する。したがって、変数x_jに関するw_{ij}が全て正であるような場合には、x_jは有効でないので線形計画問題(9)を解く必要はない。

ステップ4…決定段階

各々の有効変数x_l, $l \in N$に対して、「目的1のw_{1l}単位の減少を受容できるかどうか」、「目的2のw_{2l}単位の減少を受容できるかどうか」、……、「目的kのw_{kl}単位の減少を受容できるかどうか」といった、全部でk個の質問が意思決定者に尋ねられる[7]。この時、全ての有効変数についての全返答が「受容できない」というのであれば、アルゴリズムは終了する。そして、(9)の解を最適な加重値として用いた(8)の解が、多目的計画問題の最良の妥協解となる。しかし、それ以外の場合には、「受容できる」という返答に対しては、

$$\sum_{i=1}^{k} w_{il}\lambda_i \leqq -\varepsilon \tag{10}$$

7) 与えられたトレード・オフが魅力的なものかどうかを判定する際に、陰的(implicit)な効用関数が中心的な役割を果たす。

なる不等式を、また、「受容できない」という返答に対しては、

$$\sum_{i=1}^{k} w_{il}\lambda_i \geqq \varepsilon \tag{11}$$

なる不等式を、さらに、「どちらともいえない」という返答に対しては、

$$\sum_{i=1}^{k} w_{il}\lambda_i = 0 \tag{12}$$

なる等式を作り、ステップ5に進む。なお、ε は非常に小さな正数である。

ステップ5…新しい加重値の決定

(10), (11), (12)と

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geqq \varepsilon,\ i=1, 2, \cdots, k \end{cases} \tag{13}$$

で与えられる制約式の集合に対する実行可能解を見出す[8)]。その結果得られた $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ を(8)の新しい加重値として用いる。$t=t+1$ とおいて、ステップ2に戻る。

ここで、Zionts-Wallenius によって与えられた簡単な仮設例を用いて彼らの手法を例示しておこう。

〔仮設例〕

$$\begin{cases} \text{Max } f_1(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{Max } f_2(\bar{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ \text{Max } f_3(\bar{x}) = -x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s. t.} \quad 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leqq 60 \\ \qquad\quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leqq 60 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \end{cases}$$

いま、初期の加重値として、

8) ε は非常に小さな正数である。

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$$

が任意に選ばれたものとする。この時、(8)の線形計画問題は次のように表わすことができる[9]。

$$\begin{cases} \text{Max } x_1+\dfrac{5}{3}x_2+\dfrac{5}{3}x_3+\dfrac{7}{3}x_4 \\ \text{s. t.} \quad 2x_1+x_2+4x_3+3x_4+x_5=60 \\ \qquad 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+x_6=60 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqq 0 \end{cases}$$

表 3

		v_j		1	5/3	5/3	7/3	0	0	
	v_i	V	S	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
ステップ1	0	x_5	60	2	1	4	3	1	0	20
	0	x_6	60	3	4	1	2	0	1	30
		f_1	0	−3	−1	−2	−1	0	0	
		f_2	0	−1	1	−2	−4	0	0	
		f_3	0	1	−5	−1	−2	0	0	
		z_j-v_j	0	−1	-5/3	-5/3	-7/3	0	0	
ステップ2	7/3	x_4	20	2/3	1/3	4/3	1	1/3	0	60
	0	x_6	20	5/3	10/3	-5/3	0	-2/3	1	6
		f_1	20	-7/3	-2/3	-2/3	0	1/3	0	
		f_2	80	5/3	7/3	10/3	0	4/3	0	
		f_3	40	7/3	-13/3	5/3	0	2/3	0	
		z_j-v_j	140/3	5/9	-8/9	13/9	0	7/9	0	
ステップ3	7/3	x_4	18	1/2	0	3/2	1	2/5	-1/10	
	5/3	x_2	6	1/2	1	-1/2	0	-1/5	3/10	
		f_1	24	−2	0	−1	0	1/5	1/5	
		f_2	66	1/2	0	9/2	0	9/5	-7/10	
		f_3	66	9/2	0	-1/2	0	-1/5	13/10	
		z_j-v_j	52	1	0	1	0	3/5	4/15	

9）x_5 と x_6 はスラック変数である。

これを通常のシンプレックス法によって解くと、表3が得られる[10]。そして、その第3ステップから、$\bar{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(0, 6, 0, 18, 0, 0)$, $\bar{f}=(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x}))=(24, 66, 66)$ が最適解であり、また、x_1, x_3, x_5, x_6 が非基底変数になっていることがわかる。さらに、各非基底変数に関するトレード・オフ $\bar{w}_j$, $j=1, 3, 5, 6$ が、それぞれ、

$$\bar{w}_1=(w_{11}, w_{21}, w_{31})=(-2, 1/2, 9/2)$$
$$\bar{w}_3=(w_{13}, w_{23}, w_{33})=(-1, 9/2, -1/2)$$
$$\bar{w}_5=(w_{15}, w_{25}, w_{35})=(1/5, 9/5, -1/5)$$
$$\bar{w}_6=(w_{16}, w_{26}, w_{36})=(1/5, -7/10, 13/10)$$

で与えられることも読み取れる。

ところで、正の要素だけをもつ $\bar{w}_j$, $j=1, 3, 5, 6$ は存在していない。したがって、有効変数を選び出すために、全ての非基底変数 x_1, x_3, x_5, x_6 のそれぞれについて、問題(9)を解かなければならない。例えば、x_1 に関しては、

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Min} & -2\lambda_1+\dfrac{1}{2}\lambda_2+\dfrac{9}{2}\lambda_3 \\ \text{s. t.} & -\lambda_1+\dfrac{9}{2}\lambda_2-\dfrac{1}{2}\lambda_3\geqq 0 \\ & \dfrac{1}{5}\lambda_1+\dfrac{9}{5}\lambda_2-\dfrac{1}{5}\lambda_3\geqq 0 \\ & \dfrac{1}{5}\lambda_1-\dfrac{7}{10}\lambda_2+\dfrac{13}{10}\lambda_3\geqq 0 \\ & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\geqq 0 \end{array}\right.$$

の形の線形計画問題が作成される。これを解くと、最適な目的関数の値は負(−1.5455)になるので、x_1 は有効変数であると判定される。同様にして、x_3, x_5, x_6 に関する(9)の最適な目的関数の値を求めてみると、x_3 と x_6 の場合は負(−0.8462と−0.7)に、x_5 の場合は0になる。それ故、x_5 だけが有効変数でな

10) 表3の丸で囲んである数値はピボット要素を表わす。

いとみなされる。

そこで、次に、トレード・オフ $\bar{w}_1, \bar{w}_3, \bar{w}_6$ を受容できるかどうかが意思決定者に尋ねられる。この時、$\bar{w}_1$は受容できるが、$\bar{w}_3$と $\bar{w}_6$は受容できないといった返答が意思決定者によりなされたものとしよう。これは、意思決定者が、f_1 の 2 単位の増加と f_2 の 1/2 単位の減少、f_3 の 9/2 単位の減少を認めたことを意味している。

以上の対話に基づいて、新しい加重値を決定するために、(10)〜(13)で表わされる制約式の集合を次のように作成する。

$$\begin{cases} -2\lambda_1+\dfrac{1}{2}\lambda_2+\dfrac{9}{2}\lambda_3 \leqq -0.001 \\ -\lambda_1+\dfrac{9}{2}\lambda_2-\dfrac{1}{2}\lambda_3 \geqq 0.001 \\ \dfrac{1}{5}\lambda_1-\dfrac{7}{10}\lambda_2+\dfrac{13}{10}\lambda_3 \geqq 0.001 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqq 0.001 \end{cases}$$

これを満たす実行可能解を、例えば 2 段階法の第 1 段階を用いて求めると、

$$\lambda_1=0.594,\ \lambda_2=0.16,\ \lambda_3=0.246$$

となる。したがって、いま得られた新しい加重値を使って、次の反復過程を開始することができる。

表 4

	v_j		1.696	1.664	1.754	1.726	0	0
v_i	V	S	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.726	x_4	12	0	−1	2	1	3/5	-2/5
1.696	x_1	12	1	2	−1	0	-2/5	3/5
	f_1	48	0	4	−3	0	-3/5	7/5
	f_2	60	0	−1	5	0	2	−1
	f_3	12	0	−9	4	0	8/5	-7/5
	z_j-v_j	41.064	0	0.002	0.002	0	0.3572	0.3272

さて、2回目の反復で作られた線形計画問題(8)をシンプレックス法によって解くと、最終タブローとして表4が導き出される。しかし、この表に基づいて、非基底変数の中から有効変数を抽出し、その各々に対してトレード・オフが受容できるかどうかを尋ねたところ、全ての返答が受容できないというものであった。それ故、この時点でアルゴリズムは終了する。そして、最良の妥協解は、

$$\bar{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)=(12, 0, 0, 12), \bar{f}=(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x}))=(48, 60, 12)$$

で与えられることがわかる。

IV. 結び

最後に、本稿で取上げた2つの対話型手法の問題点をごく簡単に要約しておこう。

Geoffrion 法では、無差別トレード・オフとステップ幅の決定に関する情報を、意思決定者自らが分析者に提供しなければならない。しかし、これらの情報、なかでもトレード・オフ情報を与えることは、実際上非常に難しい。したがって、今後、トレード・オフを体系的に評価できる手続きの開発が望まれる。また、目的の数が3個以上ある時には、基準目的の選択が困難になる。さらに、最終的な妥協解に、必ずしも意思決定者の願望が積極的に表現されているとは言い難い面がある。しかしその反面、一定の条件さえ満たせば、非線形目的関数や非線形制約集合をもった問題も扱うことができる。

一方、Zionts-Wallenius 法では、Geoffrion 法と比べて意思決定者に要求される情報の量はかなり少ない。また、有限回の反復で必ず収束する。しかしながら、全ての制約集合と目的関数が線形であるか、1次近似が可能でなければならないといった大きな制限が存在する。また、意思決定者に合理的な陰的効用関数を持つことが要求されるけれども、これは非常に難しい。さらに、1次関数以外の凹関数を効用関数として用いると、質問の数と反復回数が飛躍的に増大する。

以上から、両手法ともまだまだ改善すべき余地が数多く残されていることがわかる。したがって、それらを解決していくことが今後の課題となる。

（筆者は関西学院大学商学部教授）