線形目標計画モデルの双対問題

瀬　見　　　博

I．はじめに

現実の意思決定は、多くの場合、通約性がなく、しかも相競合する複数個の目標を同時に考慮しなければならないような状況下で行われる。この多目的意思決定問題を分析するために、数理計画法の分野では、従来からさまざまな数学的アプローチが考案されてきた。それらの中で、現在、最も幅広く利用されている手法の一つに目標計画法（goal programming）がある。目標計画法は、Charnes と Cooper が1961年の文献[1]において、初めてその名称を用いて以来、主として、井尻[2]、Lee[3]、Ignizio[4] 等の貢献により理論的精緻化がはかられてきた。そして、今日、モデルの構造が現実妥当的であること、また、解を求めるためのアルゴリズムが比較的平易であること等の理由から、応用面においてもその有用性がかなり認められるようになってきている[5]。

さて、目標計画法では、意思決定者が達成したいと望んでいる希求水準

1）A. Charnes and W. W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Vol. 1 and 2, Wiley, New York, 1961.
2）井尻雄士、『計数管理の基礎―経営目標と管理会計―』、岩波書店、1970年。
3）S. M. Lee, *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach, Philadelphia, 1972.（大村茂雄・近藤恭正訳、『意志決定のための目標計画法(上)』、日本経営出版会、1974年。）
4）J. P. Ignizio, *Linear Programming in Single- & Multiple- Objective Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.（高桑宗右ヱ門訳、『単一目標・多目標システムにおける線形計画法』、コロナ社、1985年。）
5）目標計画法の適用例については、例えば、C. Romero, "A Survey of Generalized Goal Programming（1970-1982）", *European Journal of Operational Research*, Vol. 25, 1986, pp. 183-191 を参照されたい。

（aspiration level）または標的値（target value）を各目的に割当てることによって、全ての目的関数が目標式に変換された後、解を導き出すために、希求水準と実現値（実行可能解）との間に生じる偏差（deviation）が最小化される。この時、最小化すべき差異（偏差）をいかなる距離（ノルム）で表わすか、目標式が線形か非線形か、決定変数のとり得る値に可分性を認めるか否か等の基準に従って、いろいろなタイプのモデルを考えることができる。そのうち、最もよく知られている基本的なモデルが辞書式線形目標計画モデル（lexicographic linear goal programming model）であり、以下のように定式化される[6]。

$$\begin{cases} \text{LMin} & \bar{a}=\{a_1(\bar{d}^-,\bar{d}^+),\cdots\cdots,a_K(\bar{d}^-,\bar{d}^+)\} & (1) \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_j+d_i^- - d_i^+ = b_i, \quad \forall i & (2) \\ & \bar{x},\bar{d}^-,\bar{d}^+ \geqq \bar{0} & (3) \end{cases}$$

但し、

x_j：j 番目の決定変数,

C_{ij}：i 番目の目標式（制約式）における x_j の係数,

b_i：i 番目の目標式（制約式）の希求水準（右辺定数値),

d_i^-：b_i の不足達成度（underachievement）を表わす非負の差異変数,

d_i^+：b_i の超過達成度（overachievement）を表わす非負の差異変数,

a_k：k 番目の優先順位に関する達成関数.

なお、$a_k=a_k(\bar{d}^-,\bar{d}^+)$ をより具体的に示すと、

$$a_k=\sum_{i=1}^{m}(u_i^{(k)}d_i^- + w_i^{(k)}d_i^+) \qquad (4)$$

となる。

ここに、

$u_i^{(k)}$：k 番目の達成関数に含まれる差異変数 d_i^- の加重値,

$w_i^{(k)}$：k 番目の達成関数に含まれる差異変数 d_i^+ の加重値.

6）(1)式の記号 “LMin” は、単なる最小化ではなく、辞書式最小化を意味している。

ところで、線形目標計画モデルに関する研究を調べてみると、(1)〜(3)で表わされるモデルの双対問題（dual）については、これまでのところ、あまり取扱われてこなかったように見受けられる。しかし、双対問題とその解法が明らかになれば、大規模な線形目標計画モデルを効率的に解くことが必要な場合や、事後分析を行う際に、有力な手段が提供されることになり、モデルの適用可能性が飛躍的に増大する。

したがって、本稿では、Ignizio の成果[7]に基づいて、従来の線形目標計画モデルを主問題と見做した時の双対問題を、主問題が、(i)反復法（iterative approach）で解かれる場合と、(ii)多段階シンプレックス法（multiphase simplex method）によって解かれる場合とに分けて、検討してみることにしたい。

II．反復法を適用した場合の双対問題

周知のように、反復法を用いて線形目標計画モデルの解を求める場合には、優先順位ごとに、元のモデル(1)〜(3)が K 個の線形計画問題に分割される。すなわち、一般に、k 番目の優先順位に関する問題は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \text{Min} \quad a_k = a_k(\bar{d}^-, \bar{d}^+) = \sum_{i=1}^{m} (u_i^{(k)} d_i^- + w_i^{(k)} d_i^+) & (5) \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i, \ i \in P_1 \cup P_2 \cup \cdots\cdots \cup P_k & (6) \\ \qquad a_s(\bar{d}^-, \bar{d}^+) = a_s^*, \quad s = 1, 2, \cdots\cdots, k-1 & (7) \\ \qquad \bar{x}, \bar{d}^-, \bar{d}^+ \geqq \bar{0} & (8) \end{cases}$$

ここに、$P_l, (l=1, 2, \cdots\cdots, k)$ は l 番目の優先順位が付与された目標式の添字 i の集合を、また、記号 “∪” は論理的な接続詞 “ または ” を表わす。さらに、$a_s^*, (s=1, 2, \cdots\cdots, k-1)$ の値は、

7) J. P. Ignizio, “An Algorithm for Solving the Linear Goal Programming Problem by Solving its Dual”, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 36, 1985, pp. 507–515.

$$a_s^* = \mathrm{Min}\ a_s(\overline{d}^-, \overline{d}^+),\quad (s=1, 2, \cdots\cdots, k-1) \tag{9}$$

で与えられる。なお、(7)は k 番目の問題を解く以前に得られている最適な達成関数の値が損なわれないことを保証するための制約式である。

いま、便宜上、上記の線形計画モデル(5)〜(8)を行列で表記すると次のようになる。

$$\left\{\begin{array}{ll}
\mathrm{Min}\ a_k = [\overline{0}\ \overline{u}^{(k)}\overline{w}^{(k)}]\begin{bmatrix}\overline{x}\\ \overline{d}^{-(k)}\\ \overline{d}^{+(k)}\end{bmatrix} & (10)\\
\mathrm{s.\ t.} & \\
\quad [C^{(1,k)}\ I^{(1,k)}\ -I^{(1,k)}]\begin{bmatrix}\overline{x}\\ \overline{d}^{-(1,k)}\\ \overline{d}^{+(1,k)}\end{bmatrix} = \overline{b}^{(1,k)} & (11)\\
\quad [\overline{0}\ \overline{u}^{(s)}\overline{w}^{(s)}]\begin{bmatrix}\overline{x}\\ \overline{d}^{-(s)}\\ \overline{d}^{+(s)}\end{bmatrix} = a_s^*,\quad s=1, 2, \cdots\cdots, k-1 & (12)\\
\quad \overline{x}, \overline{d}^-, \overline{d}^+ \geqq \overline{0} & (13)
\end{array}\right.$$

ここに、(10), (12)の $\overline{0}$ は行ベクトルを、(13)の $\overline{0}$ は列ベクトルを表わす。また、$\overline{u}$, $\overline{w}$ は行ベクトル、$\overline{x}$, $\overline{d}^-$, $\overline{d}^+$, $\overline{b}$ は列ベクトル、C は係数行列、I は単位行列である。さらに、ベクトル(行列)の右肩の添字 (k) と $(1, k)$ は、それぞれそのベクトル(行列)が、k 番目のみの優先順位に関する要素と、1番目から k 番目までの優先順位に関する要素から構成されていることを示している。

さて、(10)〜(13)のモデルの双対問題を定式化するためには、目的関数(10)の中から、初期の基底変数の集合 $\overline{d}^-$ を除去しなければならない。そこで、(11)から得られる k 番目の優先順位に関する関係式

$$\overline{d}^{-(k)} = -C^{(k)}\overline{x} + \overline{d}^{+(k)} + \overline{b}^{(k)} \tag{14}$$

を(10)に代入する。その結果、(5)〜(8)のモデルの一般形は、最終的に次式で与えられることがわかる。

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{Min}\ a_k = [-\bar{u}^{(k)} C^{(k)} \,\vdots\, \bar{0} \,\vdots\, (\bar{u}^{(k)} + \bar{w}^{(k)})] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hdashline \bar{d}^{-(k)} \\ \hdashline \bar{d}^{+(k)} \end{bmatrix} + \bar{u}^{(k)} \bar{b}^{(k)} & (15) \\
\mathrm{s.\ t.} & \\
[C^{(1,k)} I^{(1,k)} - I^{(1,k)}] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{d}^{-(1,k)} \\ \bar{d}^{+(1,k)} \end{bmatrix} = \bar{b}^{(1,k)} & (16) \\
[-\bar{u}^{(s)} C^{(s)} \,\vdots\, \bar{0} \,\vdots\, (\bar{u}^{(s)} + \bar{w}^{(s)})] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hdashline \bar{d}^{-(s)} \\ \hdashline \bar{d}^{+(s)} \end{bmatrix} = a_s{}^* - \bar{u}^{(s)} \bar{b}^{(s)}, \quad (s = 1, 2, \cdots\cdots, k-1) & (17) \\
\bar{x}, \bar{d}^-, \bar{d}^+ \geqq \bar{0} & (18)
\end{array}
\right.
$$

したがって、(15)〜(18)を主問題と呼ぶことにすれば、この双対問題は、

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{Max}\ z_k = (\bar{b}^{(1,k)})^{\mathrm{T}} \bar{v}^{(1,k)} + \sum_{s=1}^{k-1} \lambda_s (a_s{}^* - \bar{u}^{(s)} \bar{b}^{(s)}) + \bar{u}^{(k)} \bar{b}^{(k)} & (19) \\
\mathrm{s.\ t.} & \\
\begin{bmatrix} C^{(1,k)} & I^{(1,k)} & -I^{(1,k)} \\ -\bar{u}^{(1)} C^{(1)} & \bar{0} & (\bar{u}^{(1)} + \bar{w}^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\bar{u}^{(k-1)} C^{(k-1)} & \bar{0} & (\bar{u}^{(k-1)} + \bar{w}^{(k-1)}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \bar{v}^{(1,k)} \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \end{bmatrix} \leqq [-\bar{u}^{(k)} C^{(k)} \,\vdots\, \bar{0} \,\vdots\, (\bar{u}^{(k)} + \bar{w}^{(k)})]^{\mathrm{T}} & (20)
\end{array}
\right.
$$

と表わすことができる。但し、双対変数 $\bar{v}$, $\bar{\lambda}$ には符号の制約がない。また、記号 “T” は行列（ベクトル）の転置を示す。

ここで、簡単な数値例を用いて、主問題を反復法により解いた時、その双対問題がどのように定式化されるかを例示してみることにしよう。

〔数値例〕

$$
\begin{cases}
\mathrm{LMin}\ \bar{a} = \{(d_1^+ + d_2^+),\ (d_3^+),\ (d_4^-)\} & (21) \\
\text{s. t.}\quad 3x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 & (22) \\
\qquad x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 8 & (23) \\
\qquad x_1 + d_3^- - d_3^+ = 3 & (24) \\
\qquad 2x_1 + 3x_2 + d_4^- - d_4^+ = 18 & (25) \\
\qquad \bar{x}, \bar{d}^-, \bar{d}^+ \geqq \bar{0} & (26)
\end{cases}
$$

いま、この問題を図示すれば図1が得られる[8]。それ故、図1から、最適解は $\bar{x}^* = (x_1^*,\ x_2^*) = (2, 3), \bar{a}^* = (0, 0, 5)$ となることが読みとれる。

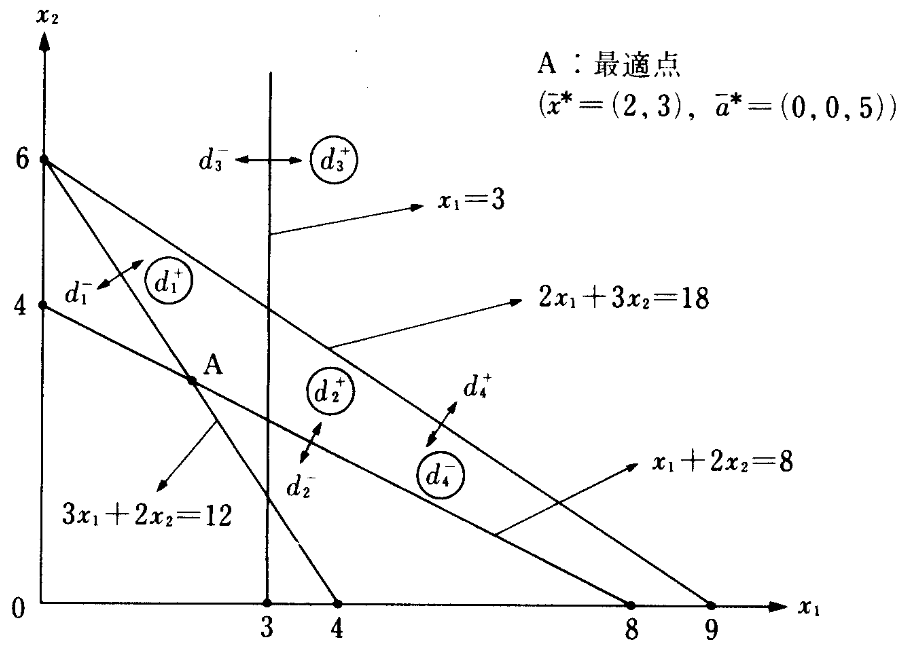

図1．数値例のグラフ

8）図において、辞書式最小化がはかられる差異変数には丸印が付けられている。

さて、上述の(15)〜(18)と(19), (20)に基づいて、優先順位ごとに、数値例の主問題と双対問題を定式化し、それらの解を求めてみると以下のようになる。

第１優先順位（$k=1$）に関するモデル

（主問題）

$$\begin{cases} \text{Min } a_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ d_1^- \\ d_2^- \\ d_1^+ \\ d_2^+ \end{bmatrix} \\ \text{s. t.} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ d_1^- \\ d_2^- \\ d_1^+ \\ d_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \bar{x},\ \bar{d}^-,\ \bar{d}^+ \geqq \bar{0} \end{cases}$$

最適な目的関数の値：$a_1^* = 0$

（双対問題）

$$\begin{cases} \text{Max } z_1 = [12 \quad 8] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \text{s. t.} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

最適解：$\bar{v}^* = (v_1^*, v_2^*) = (0, 0), z_1^* = 0$

第2優先順位（$k=2$）に関するモデル

（主問題）

$$\begin{cases} \text{Min } a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ d_1^- \\ d_2^- \\ d_3^- \\ d_1^+ \\ d_2^+ \\ d_3^+ \end{bmatrix} \\ \text{s. t.} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ d_1^- \\ d_2^- \\ d_3^- \\ d_1^+ \\ d_2^+ \\ d_3^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ d_1^- \\ d_2^- \\ d_3^- \\ d_1^+ \\ d_2^+ \\ d_3^+ \end{bmatrix} = a_1^* = 0 \\ \bar{x}, \bar{d}^-, \bar{d}^+ \geqq \bar{0} \end{cases}$$

最適な目的関数の値：$a_2^* = 0$

（双対問題）

$$
\begin{cases}
\text{Max } z_2 = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \lambda_1 a_1^* \\
\text{s. t.} \\
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

最適解：$\bar{v}^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (0, 0, 0), \lambda_1^* = 0, z_2^* = 0$

第３優先順位（$k=3$）に関するモデル

（主問題）

$$
\begin{cases}
\text{Min } a_3 = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ d_1^- \\ d_2^- \\ d_3^- \\ d_4^- \\ d_1^+ \\ d_2^+ \\ d_3^+ \\ d_4^+ \end{bmatrix} + 18 \\
\text{s. t.} \\
\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ d_1^- \\ d_2^- \\ d_3^- \\ d_4^- \\ d_1^+ \\ d_2^+ \\ d_3^+ \\ d_4^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \\ 18 \\ a_1^* \\ a_2^* \end{bmatrix} \\
\bar{x}, \bar{d}^-, \bar{d}^+ \geqq \bar{0}
\end{cases}
$$

最適解：$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (2, 3),\ a_3^* = 5$

（双対問題）

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Max } z_3 = [12 \quad 8 \quad 3 \quad 18] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \lambda_1 a_1^* + \lambda_2 a_2^* + 18 \\
\text{s. t.} \\
\begin{bmatrix}
3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}
\leqq
\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\right.
$$

最適解：$\bar{v}^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*) = (-0.25, -1.25, 0, 0)$

$\lambda_1^* = -1.25, \lambda_2^* = 0, z_3^* = 5$

Ⅲ. 多段階シンプレックス法を適用した場合の双対問題

多段階シンプレックス法の利用を前提とした線形目標計画モデルの双対問題は、Ignizio により、多次元双対問題（multidimensional dual problem）と名づけられている。

これを定式化するために、まず、前節と同じ記号を用いて、線形目標計画モデル(1)〜(3)を行列表記しておく。すなわち、

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{LMin } \bar{a}=\left\{[\bar{0}\ \bar{u}^{(1)}\bar{w}^{(1)}]\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{d}^{-(1)}\\ \bar{d}^{+(1)}\end{bmatrix}, \cdots\cdots, [\bar{0}\ \bar{u}^{(K)}\bar{w}^{(K)}]\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{d}^{-(K)}\\ \bar{d}^{+(K)}\end{bmatrix}\right\} & (27)\\ \text{s. t.} & \\ \quad [C^{(1,K)}I^{(1,K)}-I^{(1,K)}]\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{d}^{-(1,K)}\\ \bar{d}^{+(1,K)}\end{bmatrix}=\bar{b} & (28)\\ \quad \bar{x},\ \bar{d}^{-},\ \bar{d}^{+} \geqslant \bar{0} & (29) \end{array}\right.$$

次に、初期の基底変数の集合 $\bar{d}^{-}$ を達成関数(27)から除く必要があるので、(28)より得られる関係式、

$$\bar{d}^{-}=-C\bar{x}+\bar{d}^{+}+\bar{b} \tag{30}$$

を(27)に代入する。その結果、(27)〜(29)は次のように変換される。

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{LMin}\ \bar{a}=\left[\left\{[-\bar{u}^{(1)}C^{(1)} \mid \bar{0} \mid (\bar{u}^{(1)}+\bar{w}^{(1)})]\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \hdashline \bar{d}^{-(1)}\\ \hdashline \bar{d}^{+(1)}\end{bmatrix}+\bar{u}^{(1)}\bar{b}^{(1)}\right\},\cdots\right.\\ \qquad\left.\cdots,\left\{[-\bar{u}^{(K)}C^{(K)} \mid \bar{0} \mid (\bar{u}^{(K)}+\bar{w}^{(K)})]\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \hdashline \bar{d}^{-(K)}\\ \hdashline \bar{d}^{+(K)}\end{bmatrix}+\bar{u}^{(K)}\bar{b}^{(K)}\right\}\right] \qquad (31)\\ \text{s. t.}\\ \qquad [C^{(1,K)}I^{(1,K)}-I^{(1,K)}]\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{d}^{-(1,K)}\\ \bar{d}^{+(1,K)}\end{bmatrix}=\bar{b}^{(1,K)} \qquad (32)\\ \qquad \bar{x},\ \bar{d}^{-},\ \bar{d}^{+}\geqq\bar{0} \qquad (33)\end{array}\right.$$

いま、こうして得られた(31)〜(33)を主問題と見做せば、その多次元双対問題は、通常の線形計画法の双対問題の場合とほぼ同じように考えて、

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{LMax}\ \bar{z}=[\bar{b}^{(1,K)}]^{\mathrm{T}}\bar{v}+\{\bar{u}^{(1)}\bar{b}^{(1)},\cdots\cdots,\bar{u}^{(K)}\bar{b}^{(K)}\} \qquad (34)\\ \text{s. t.}\ \begin{bmatrix}(C^{(1,K)})^{\mathrm{T}}\\ (I^{(1,K)})^{\mathrm{T}}\\ (-I^{(1,K)})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\bar{v}\underset{\leftarrow}{\leqq}\begin{bmatrix}(-\bar{u}^{(1)}C^{(1)})^{\mathrm{T}}\\ (\bar{0})^{\mathrm{T}}\\ (\bar{u}^{(1)}+\bar{w}^{(1)})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\cdots\cdots,\begin{bmatrix}(-\bar{u}^{(K)}C^{(K)})^{\mathrm{T}}\\ (\bar{0})^{\mathrm{T}}\\ (\bar{u}^{(K)}+\bar{w}^{(K)})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \qquad (35)\end{array}\right.$$

と定式化することができる。ここに、$\bar{v}$は符号の制約がない$v_i^{(k)}$を要素にもつ双対変数行列である。なお、$v_i^{(k)}$は、(35)の右辺のk番目のベクトルに対応する制約式におけるi行目の双対変数を表わす。また、達成関数ベクトル$\bar{z}$は、辞書式に最大化がはかられる。さらに、(35)の記号“$\underset{\leftarrow}{\leqq}$”は、制約式が辞書式不等式(lexicographic inequality)であることを示している。

以上から、多次元双対問題は、結局、優先順位づけられたK個からなる一連の線形計画モデルによって構成されていることがわかる。

さて、多次元双対問題(34), (35)は、一般に、Ignizioの考案した逐次的多次元双対シンプレックス・アルゴリズム（sequential multidimensional dual simplex algorithm）を利用して解くことができる。そのアルゴリズムを以下に示す。

ステップ1

多次元双対問題を(34), (35)の形で表わし、$k=1$とおく。

ステップ2

(35)の右辺のk番目のベクトルに関連する部分だけを、(34)と(35)から抜き出して、線形計画モデルを作る。それを、周知のシンプレックス法によって解く。この時、$k=K$ならば、ステップ4へ行く。また、$k<K$ならば、ステップ3に進む。

ステップ3

既に解かれたステップ2の線形計画モデルの最適解をみて、拘束力のない制約式（nonbinding constraint）の全てを、モデルから取り除く。その結果、モデルに含まれる制約式が無くなれば、ステップ4に進む。それ以外の場合には、$k=k+1$とおいて、ステップ2へ戻る。なお、拘束力のない制約式とは、k番目の達成関数$a_k=a_k(\bar{d}^-,\bar{d}^+)$について主問題を解くことによって得られた最適な多段階シンプレックス表において、k行目のシンプレックス基準行のシャドウ・プライスが負の値をとっている非基底変数に関連した、双対モデルの制約式のことをいう。

ステップ4

現在の解が、k番目の優先順位に関する多次元双対問題の最適解である。また、主問題の最適解は、同じ双対モデルの最終シンプレックス表における初期基底変数の集合に対応するシャドウ・プライスによって与えられる。

ここで、例示のため、前節と同じ数値例(21)〜(26)に対して、多次元双対問題を定式化し、その解を上記アルゴリズムにより求めてみることにしよう。

まず、数値例を(31)〜(33)の一般形で表現し直すと、

$$
\mathrm{LMin}\ \bar{a}=\left\{\left\{[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\d_1^-\\d_2^-\\d_1^+\\d_2^+\end{bmatrix}+0\right\},\left\{[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\d_3^-\\d_3^+\end{bmatrix}+0\right\},\right.
$$

$$
\left.\left\{[-2\ \ -3\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\d_4^-\\d_4^+\end{bmatrix}+18\right\}\right\} \tag{36}
$$

s. t.

$$
\begin{bmatrix}3&2&1&0&0&0&-1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0&0&-1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&-1&0\\2&3&0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\d_1^-\\d_2^-\\d_3^-\\d_4^-\\d_1^+\\d_2^+\\d_3^+\\d_4^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\8\\3\\18\end{bmatrix} \tag{37}
$$

$$
\bar{x},\ \bar{d}^-,\ \bar{d}^+\geqslant\bar{0} \tag{38}
$$

となる。それ故、次に、これを主問題と考えて(34), (35)を適用すれば、多次元双対問題は次のように定式化できることがわかる。

$$\begin{cases} \text{LMax } \bar{z} = [12 \quad 8 \quad 3 \quad 18]\bar{v} + \{0, 0, 18\} & (39) \\ \text{s. t.} & \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{v} \underset{\leftarrow}{\leqq} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & (40) \end{cases}$$

ここに、$\bar{v}$は符号の制約がない双対変数行列で、

$$\bar{v} = \left[\begin{array}{c:c:c} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & v_1^{(3)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & v_2^{(3)} \\ v_3^{(1)} & v_3^{(2)} & v_3^{(3)} \\ v_4^{(1)} & v_4^{(2)} & v_4^{(3)} \end{array}\right] \tag{41}$$

により与えられる。

したがって、逐次的多次元双対シンプレックス・アルゴリズムを用いて、(39), (40)の解を求めてみると以下のようになる。

1番目（$k=1$）の双対問題

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Max } z^{(1)}=[12\quad 8\quad 3\quad 18]\,\bar{v}^{(1)}+0 \qquad (42)\\[2ex] \text{s. t.} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{v}^{(1)} \leqq \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\\0\\0 \end{bmatrix} \qquad (43)\end{array}\right.$$

この時、$\bar{v}^{(1)}$ はもともと符号に関して無制約であるが、本例の場合には、(43)の3行目から6行目までの制約式によって、$\bar{v}^{(1)}\leqq\bar{0}$ が成立する。さらに9行目と10行目の制約式を加味すれば、$v_3^{(1)}=v_4^{(1)}=0$ となる。そこで、これらのことを踏まえて(42), (43)の線形計画問題を解くと、最適解として、

$$v_1^{(1)*}=v_2^{(1)*}=v_3^{(1)*}=v_4^{(1)*}=0,\ z^{(1)*}=0$$

が求まる。また、この結果から、最適解に関して、(43)の7行目と8行目の d_1^+ と d_2^+ に対応する制約式が拘束力をもたないことも判明する。それ故、これらの行の制約式は、以後のモデルにおいて除外されることになる。

2番目（$k=2$）の双対問題

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Max}\ z^{(2)} = [12 \quad 8 \quad 3 \quad 18]\ \bar{v}^{(2)} + 0 \qquad (44) \\ \text{s. t.} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{v}^{(2)} \leqq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (45) \end{array}\right.$$

このモデルの最適解は、

$$v_1^{(2)*} = v_2^{(2)*} = v_3^{(2)*} = v_4^{(2)*} = 0,\ z^{(2)*} = 0$$

となる。しかも、この解から、(45)の7行目の d_3^+ に関連する制約式が、次のモデルの作成段階で排除されることがわかる。

3番目（$k=3$）の双対問題

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Max}\ z^{(3)} = [12 \quad 8 \quad 3 \quad 18]\ \bar{v}^{(3)} + 18 \qquad (46) \\ \text{s. t.} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{v}^{(3)} \leqq \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (47) \end{array}\right.$$

この線形計画問題を解くと、最適解として、

$$v_1^{(3)*}=-0.25,\ v_2^{(3)*}=-1.25,\ v_3^{(3)*}=v_4^{(3)*}=0,\ z^{(3)*}=5$$

が求まる。

以上から、数値例の多次元双対問題の最適解は、

$$\bar{v}^*=\begin{bmatrix}0 & 0 & -0.25\\ 0 & 0 & -1.25\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{48}$$

$$\bar{z}^*=[0,\ 0,\ 5] \tag{49}$$

で与えられることがわかる。

IV. 結び

最後に、双対変数 $v_i^{(k)}$ がもつ意味について、数値例の結果を参照しながら簡単に考えてみることにする。そのために、数値例(21)〜(26)を多段階シンプレックス法で解いた時の最終シンプレックス表を表1に掲げておく。

P_3	P_2	P_1	V	d_1^-	d_2^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	d_4^+	$\bar{b}$
			P_3							
			P_2					1		
			P_1			1	1			
			x_1	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$			2
			x_2	$-1/4$	$3/4$	$1/4$	$-3/4$			3
			d_3^-	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	-1		1
1			d_4^-	$-1/4$	$-5/4$	$1/4$	$5/4$		-1	5
			P_1			-1	-1			0
			P_2					-1		0
			P_3	$-1/4$	$-5/4$	$1/4$	$5/4$		-1	5

表1．数値例の最終シンプレックス表

いま、主問題の最適な最終表である表1とその双対問題の最適解(48)を比較してみると、表1の初期の基底変数 d_i^- に関するシンプレックス基準列（シャド

ウ・プライスの列ベクトル）の各数値と、双対変数行列 $\bar{v}^*$ の i 行目の各数値とが一致している。例えば、表１の d_1^- に関するシンプレックス基準列の値 $(0\ 0\ -\frac{1}{4})^T$ は、$\bar{v}^*$ の１行目の値と同じである。このことから、伝統的な線形計画法の双対変数についての解釈を、ほぼそのまま、線形目標計画法の双対変数に適用しても差支えないことがわかる。

すなわち、$v_i^{(k)}$ は、主問題の k 番目の達成関数 a_k に対する b_i の単位当たり貢献度（限界貢献度：marginal contribution）を示すものであると考えることができる。ここに、b_i は主問題の i 行目の目標式に割当てられた標的値を表わす。例えば、$\bar{v}_1{}^* = (v_1{}^{(1)*} v_1{}^{(2)*} v_1{}^{(3)*}) = (0\ 0\ -0.25)$ は、数値例の１番目の目標式(22)の右辺定数値（$b_1 = 12$）が１単位増加した時、達成関数(21)の a_1 と a_2 の値は変化しないが、 a_3 の値が 0.25 単位減少するということを意味している。 以上の事柄は、一般に、現在の最終的な最適基底がそのまま維持されている限り成り立つ。

（筆者は関西学院大学商学部助教授）