非線形メンバーシップ関数を用いたファジィ多目的線形計画問題について

瀬　見　　　博

I．はじめに

一般に、複数個の相競合するファジィ線形目的関数を、所与の線形制約条件の下で最大化する問題は、ファジィ多目的線形計画問題と呼ばれ、ファジィベクトル最大化問題として次のように定式化される。

$$\begin{cases} \text{`}\underset{\sim}{\max}\text{'} \quad z_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}, \\ \text{`}\underset{\sim}{\max}\text{'} \quad z_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{`}\underset{\sim}{\max}\text{'} \quad z_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_k\boldsymbol{x}, \\ \text{subject to} \\ \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{1}$$

ここに、

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T, \quad \boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_m)^T,$$
$$\boldsymbol{c}_i = (c_{i1}, \cdots, c_{in}) \ (i = 1, \cdots, k), \quad \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

である。また、‘$\sim$’は目的関数$z_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \cdots, k)$がそれに対応するメンバーシップ関数$\mu_{z_i}(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \cdots, k)$ によって特性づけられていることを意味している。

さて、k 個の相競合するメンバーシップ関数に対して、統合関数（conjunctive aggregation function）

$$\mu_D(\boldsymbol{x})=\mu_D(\mu_{z_1}(\boldsymbol{x}),\cdots\cdots,\mu_{z_k}(\boldsymbol{x})) \qquad (2)$$

を導入すれば、(1)は形式的に、

$$\begin{cases} \max \quad \mu_D(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} \\ \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \qquad (3)$$

と表わすことができる。ここで、$\tilde{\boldsymbol{x}}$ が

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x}} \mu_D(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_D(\tilde{\boldsymbol{x}}) \qquad (4)$$

を満たす時、すなわち、(3)の最適解である時、$\tilde{\boldsymbol{x}}$ は(1)の最適ファジィ決定（optimal fuzzy decision）であると呼ばれる。

いま、統合関数 $\mu_D(\boldsymbol{x})$ に L. A. Zadeh[1] の最小オペレータ（min-operator）[2]

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x}} \mu_D(\boldsymbol{x}) = \min_i\,(\mu_{z_i}(\boldsymbol{x})) = \min(\mu_{z_1}(\boldsymbol{x}),\cdots,\mu_{z_k}(\boldsymbol{x})) \qquad (5)$$

を採用すれば、(3)は次のように書き直すことができる。

$$\begin{cases} \max\ \min_i\,(\mu_{z_i}(\boldsymbol{x})) \\ \text{subject to} \\ \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \qquad (6)$$

---

1) L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," *Information and Control*, Vol. 8, No.3, pp. 338-353, 1965. R. E. Bellman and L. A. Zadeh, "Decision-Making in a Fuzzy Environment," *Management Science*, Vol. 17, No. 4, pp. B141-B164, 1970.

2) 最小オペレータ以外に、例えば和オペレータ（add-operator）や積オペレータ（product-operator）などを考えることもできる。

さらに、(6)は$\lambda = \min_i (\mu_{z_i}(\boldsymbol{x}))$とおくことによって、

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \qquad \lambda \leqslant \mu_{z_i}(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, \cdots, k), \\ \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{7}$$

を解くことと等価になる。ここで、メンバーシップ関数が線形であると仮定すれば、H.-J. Zimmermann[3]によって指摘されているように，与えられたファジィ多目的線形計画問題(1)は通常の線形計画問題に帰着できる。

しかし、一般に意思決定者の満足度の増加率を、線形メンバーシップ関数で表わされるごとく一定であると想定することには、かなり無理があるように思われる。むしろ現実的な観点からは、非線形メンバーシップ関数の利用が考慮されるべきであろう。ただその場合には、(1)あるいは(7)の最適解を求めることが非常に難しくなるといった問題点がある。

そこで本稿では、ファジィ多目的線形計画問題(1)への接近をより現実的なものにするために、メンバーシップ関数として、効用理論でよく利用されている双曲線型と指数型の二つの非線形関数を用いることにする。そして、これら特殊な非線形メンバーシップ関数と最小オペレータを採用した時には、(1)が通常の線形計画問題に変換できることを示す。

Ⅱ. 双曲線型メンバーシップ関数

H. Leberlingは[4]、(1)の各目的関数$z_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \cdots, k)$に対応する非線形メンバーシップ関数として次のような双曲線型のメンバーシップ関数

3) H.-J. Zimmermann, "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1, pp. 45-55, 1978.

4) H. Leberling, "On Finding Compromise Solutions in Multicriteria Problems Using the Fuzzy Min-Operator," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 6, pp. 105-118, 1981.
坂和正敏、『線形システムの最適化』、森北出版、1984年、192-195ページ。

(hyperbolic membership function) を提案した。

$$\mu_{z_i}^{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{(z_i(\boldsymbol{x})-(z_i^m+z_i^o)/2)\alpha_i} - e^{-(z_i(\boldsymbol{x})-(z_i^m+z_i^o)/2)\alpha_i}}{e^{(z_i(\boldsymbol{x})-(z_i^m+z_i^o)/2)\alpha_i} + e^{-(z_i(\boldsymbol{x})-(z_i^m+z_i^o)/2)\alpha_i}} + \frac{1}{2} \qquad (8)$$

ここに、$\alpha_i(>0)$ はパラメータである。また、z_i^o と z_i^m の値は次式で与えられる[5)]。

$$\begin{cases} z_i^o = z_i(\boldsymbol{x}_i^o) \quad (i=1,\cdots,k), \\ z_i^m = \min(z_i(\boldsymbol{x}_1^o),\cdots,z_i(\boldsymbol{x}_{i-1}^o),z_i(\boldsymbol{x}_{i+1}^o),\cdots,z_i(\boldsymbol{x}_k^o)) \quad (i=1,\cdots,k). \end{cases} \qquad (9)$$

なお、$\boldsymbol{x}_i^o(\neq \boldsymbol{x}_j^o)\ (i,j=1,\cdots,k\,;\, i\neq j)$ は、通常のベクトル最大化問題において、その i 番目の目的関数 $z_i(\boldsymbol{x})\ (i=1,\cdots,k)$ だけが個別に最大化された時に得られる最適解を表わしている。

ところで、双曲線型のメンバーシップ関数(8)は次のような性質を有している。

(1)　$\mu_{z_i}^{H}(\boldsymbol{x})$ は強意単調増加関数である。

(2)　$\mu_{z_i}^{H}(\boldsymbol{x})$ は、$z_i(\boldsymbol{x}) \leqq \frac{1}{2}(z_i^m+z_i^o)$ の時には強意凸関数であり、$z_i(\boldsymbol{x}) \geqq \frac{1}{2}(z_i^m+z_i^o)$ の時には強意凹関数である。また、$z_i(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(z_i^m+z_i^o)$ となる $\bar{\boldsymbol{x}}$ に関しては $\mu_{z_i}^{H}(\bar{\boldsymbol{x}})=\frac{1}{2}$ である。

(3)　すべての $\boldsymbol{x}\in R^n$ に対して、$0<\mu_{z_i}^{H}(\boldsymbol{x})<1$ が成り立つ。なお、$\mu_l^{H}(\boldsymbol{x})\equiv 0$ と $\mu_u^{H}(\boldsymbol{x})\equiv 1$ はそれぞれ $\mu_{z_i}^{H}(\boldsymbol{x})$ の下方と上方の漸近線である。

いま、$\mu_{z_i}^{H}(\boldsymbol{x})$ を $z_i(\boldsymbol{x})$ に対して図示してみると図1のようになる。

さて、双曲線型のメンバーシップ関数(8)によって意思決定者のファジィ目標を表わし、さらに統合関数として最小オペレータを採用することにしよう。その時、(1)は(7)の場合と同様に次のように表わすことができる。

5）具体的には、i 番目の目的関数について、意思決定者が完全に満足できる値が z_i^o で、また最低限許容できる値が z_i^m で与えられていると解釈できる。

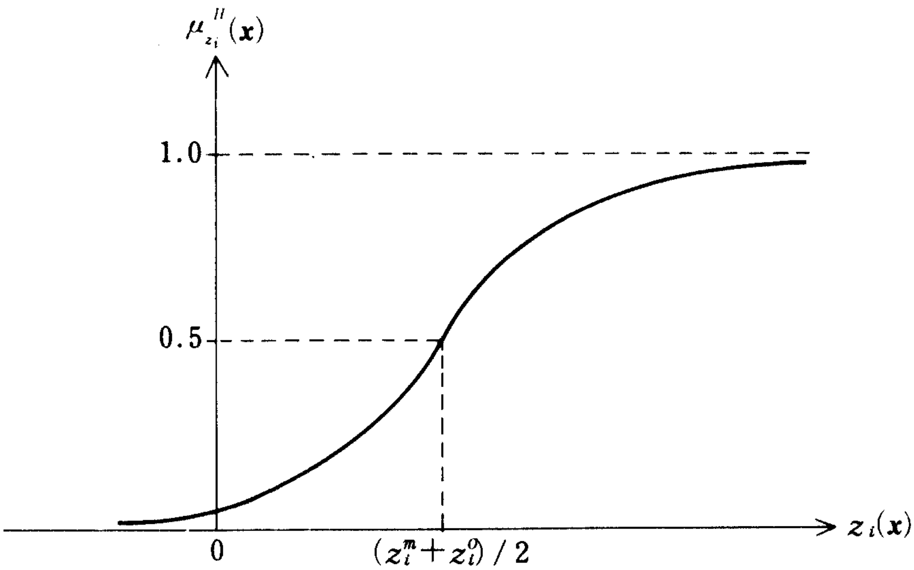

図1　双曲線型メンバーシップ関数

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \qquad \lambda \leqq \mu_{z_i}^H(\boldsymbol{x}) \quad (i=1,\cdots,k), \\ \qquad \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \quad \lambda \in R. \end{cases} \tag{10}$$

ここで、(10)の最適解を（λ^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$）とすれば、

$$\lambda^{opt} = \mu_D(\boldsymbol{x}^{opt}) = \min_i \left(\mu_{z_i}^H(\boldsymbol{x}^{opt}) \right) = \mu_{z_{i'}}^H(\boldsymbol{x}^{opt})$$

と $0 < \mu_{z_{i'}}^H(\boldsymbol{x}^{opt}) < 1$ から $0 < \lambda^{opt} < 1$ となることがわかる。それゆえ、$\lambda^{opt} > 0$ であることを考慮して(10)を書きなおすと、

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \lambda - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{(z_i(\boldsymbol{x})-(z_i^m+z_i^0)/2)\alpha_i} - e^{-(z_i(\boldsymbol{x})-(z_i^m+z_i^0)/2)\alpha_i}}{e^{(z_i(\boldsymbol{x})-(z_i^m+z_i^0)/2)\alpha_i} + e^{-(z_i(\boldsymbol{x})-(z_i^m+z_i^0)/2)\alpha_i}} \leqq \dfrac{1}{2} \\ \qquad\qquad (i=1,\cdots,k), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \\ \lambda \geqslant 0 . \end{cases}$$

が得られる。また、一般に $y \in R$ に対して、

$$\tanh(y) = (e^{y} - e^{-y}) / (e^{y} + e^{-y})$$

が成り立つことから、(11)を

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \lambda - \dfrac{1}{2}\tanh\left((z_i(\boldsymbol{x}) - \dfrac{1}{2}(z_i^m + z_i^0))\,\alpha_i\right) \leqslant \dfrac{1}{2} \quad (i = 1, \cdots, k), \\ \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \lambda \geqslant 0 . \end{cases} \tag{12}$$

あるいは等価的に、

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \tanh\left((z_i(\boldsymbol{x}) - \dfrac{1}{2}(z_i^m + z_i^0))\,\alpha_i\right) \geqslant 2\lambda - 1 \quad (i = 1, \cdots, k), \\ \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \lambda \geqslant 0 . \end{cases} \tag{13}$$

と表わすこともできる。

(11)～(13)は一つの線形目的関数と k 個の非線形制約式と $m + n + 1$ 個の線形制約式からなる非線形計画問題である。したがって、このままでは通常の線形計画法を適用することはできない。

そこで、この問題点を解決するために、(13)を次のように変形してみる。

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \left(z_i(\boldsymbol{x}) - \dfrac{1}{2}(z_i^m + z_i^0)\right)\alpha_i \geqq \tanh^{-1}(2\lambda - 1) \quad (i = 1, \cdots, k), \\ \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b}, \\ \quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \quad \lambda \geqq 0. \end{cases} \tag{14}$$

これは、正接双曲線関数 tanh $(\boldsymbol{x})$ と逆正接双曲線関数 $\tanh^{-1}(\boldsymbol{x})$ がすべての $\boldsymbol{x}$ に関して強意単調増加関数であることを利用すれば容易に導き出せる。さらに、

$$x_{n+1} = \tanh^{-1}(2\lambda - 1) \tag{15}$$

とおけば、(14) は

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \alpha_i z_i(\boldsymbol{x}) - x_{n+1} \geqq \dfrac{1}{2}\alpha_i(z_i^m + z_i^0) \quad (i = 1, \cdots, k), \\ \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b}, \\ \quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \quad \lambda \geqq 0. \end{cases} \tag{16}$$

と表わすことができる。しかし、λ は

$$\lambda = \frac{1}{2}\tanh(x_{n+1}) + \frac{1}{2} \tag{17}$$

となり、また、tanh (x) は x に関して強意単調増加関数であるから、結局、λ を最大化することと x_{n+1} を最大化することとは等価になる。したがって、(16) は

$$\begin{cases} \max \quad x_{n+1} \\ \text{subject to} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_i z_i(\boldsymbol{x}) - x_{n+1} \geqq \dfrac{1}{2}\alpha_i(z_i^m + z_i^o) \quad (i = 1, \cdots, k), \\ \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{18}$$

なる通常の線形計画問題に変換できる。

以上から、(11)の最適解（λ^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$）は、(18)の最適解を（x_{n+1}^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$）とすれば、(17)を用いて、

$$(\lambda^{opt},\ \boldsymbol{x}^{opt}) = \left(\frac{1}{2}\tanh(x_{n+1}^{opt}) + \frac{1}{2},\ \boldsymbol{x}^{opt}\right) \tag{19}$$

で与えられることがわかる。

なお、(10)の最適解については、次の定理が成立することに注意されたい。

定理 I [6]

いま、（λ^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$）を(10)の一意的な最適解であるとする。その時、$\boldsymbol{x}^{opt}$ は通常の線形ベクトル最大化問題のパレート最適解である。

（証明）

$\boldsymbol{x}^{opt}$ が通常の線形ベクトル最大化問題のパレート最適解でないと仮定する。その時、

$$z(\boldsymbol{x}^{opt}) \leq z(\boldsymbol{x}^*)^{7)} \quad \left(z(\boldsymbol{x}) = (z_1(\boldsymbol{x}), \cdots, z_k(\boldsymbol{x}))^T\right)$$

となるような実行可能解 $\boldsymbol{x}^*$（$\neq \boldsymbol{x}^{opt}$）が存在する。ここで、$\mu_{z_i}^H(\boldsymbol{x})$ が $z_i(\boldsymbol{x})$ に関して強意単調増加関数であることを想起すれば、

$$\mu_z^H(\boldsymbol{x}^{opt}) \leq \mu_z^H(\boldsymbol{x}^*) \quad \left(\mu_z^H(\boldsymbol{x}) = (\mu_{z_1}^H(\boldsymbol{x}), \cdots, \mu_{z_k}^H(\boldsymbol{x}))^T\right)$$

が成り立ち、結局

---

6) 解のパレート最適性の概念については、例えば、坂和、前掲書、162ページを参照されたい。

7) $z(\boldsymbol{x}^{opt}) \leq z(\boldsymbol{x}^*)$ で使われている不等号（$\leq$）は、すべての i について $z_i(\boldsymbol{x}^{opt}) \leqq z_i(\boldsymbol{x}^*)$ で、かつ少なくとも一つの i について $z_i(\boldsymbol{x}^{opt}) < z_i(\boldsymbol{x}^*)$ が成り立つことを意味している。

$$\lambda^{opt} = \min \mu_{z_i}^{H}(\boldsymbol{x}^{opt}) \leqslant \min \mu_{z_i}^{H}(\boldsymbol{x}^{*}) = \lambda^{*}$$

なる関係が得られる。しかし、これは（λ^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$）が(10)の一意的な最適解であることに矛盾している。それゆえ、$\boldsymbol{x}^{opt}$ は通常の線形ベクトル最大化問題のパレート最適解であるといえる。　Q.E.D.

ところで、(10)から得られた解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が一意的に決まらないような場合には、定理Ⅰは弱パレート最適性の保証しか与えてくれないので、新たにその解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ のパレート最適性を検証することが必要になる[8]。それは、次の問題を解くことによって行なわれる。

$$\begin{cases} \max \quad \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \\ \text{subject to} \\ \qquad z_i(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_i = z_i(\tilde{\boldsymbol{x}}) \quad (i = 1, \cdots, k), \\ \qquad \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \varepsilon_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, k). \end{cases} \tag{20}$$

いま、(20)の最適解を $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\bar{\varepsilon}_1, \cdots, \bar{\varepsilon}_k)^T$ で表わすと、すべての i について $\bar{\varepsilon}_i = 0$ となるならば、$\tilde{\boldsymbol{x}}$ はパレート最適解であると考えられる。しかし、少なくとも一つの i について $\bar{\varepsilon}_i > 0$ が成立するようなことがあれば、$\tilde{\boldsymbol{x}}$ はもはやパレート最適解ではない。この時には、$\bar{\boldsymbol{x}}$ がパレート最適解になっているので、(10)の最終的な最適解は $\bar{\boldsymbol{x}}$ で与えられることがわかる。

さて、次のような具体的なベクトル最大化問題に対して、双曲線型のメンバーシップ関数(8)を適用した場合の数値例を示しておこう。

[仮設例]

$$\max \quad z_1(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 2x_2 \tag{21}$$

$$\max \quad z_2(\boldsymbol{x}) = -3x_1 + 2x_2 \tag{22}$$

8) パレート最適性の検証については、例えば、坂和正敏、『非線形システムの最適化』、森北出版、1986年、149-150ページを参照されたい。

$$
\left|\begin{array}{l}
\text{subject to} \\
\left\{\begin{array}{l}
-x_1+2x_2 \leqq 8, \\
x_1+2x_2 \leqq 12, \\
x_1+x_2 \leqq 8, \\
2x_1+x_2 \leqq 14, \\
x_1,\ x_2 \geqq 0.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\tag{23}
$$

図2にこの仮設例に対する実行可能領域が図示されている。

まず、制約条件(23)の下で目的関数(21)だけを最大にすることを考える。これは通常の線形計画問題であるから容易に解くことができる。この最適解を $\boldsymbol{x}_1^0$ で表わすことにすれば、それは $\boldsymbol{x}_1^0=(6, 2)$ となる。同様に、(22)の目的関数だけを最大にしてくれる最適解 $\boldsymbol{x}_2^0$ は、$\boldsymbol{x}_2^0=(0, 4)$ で与えられる。それゆえ、(9)から

$$z_1^0=22,\ z_2^0=8,\ z_1^m=8,\ z_2^m=-14$$

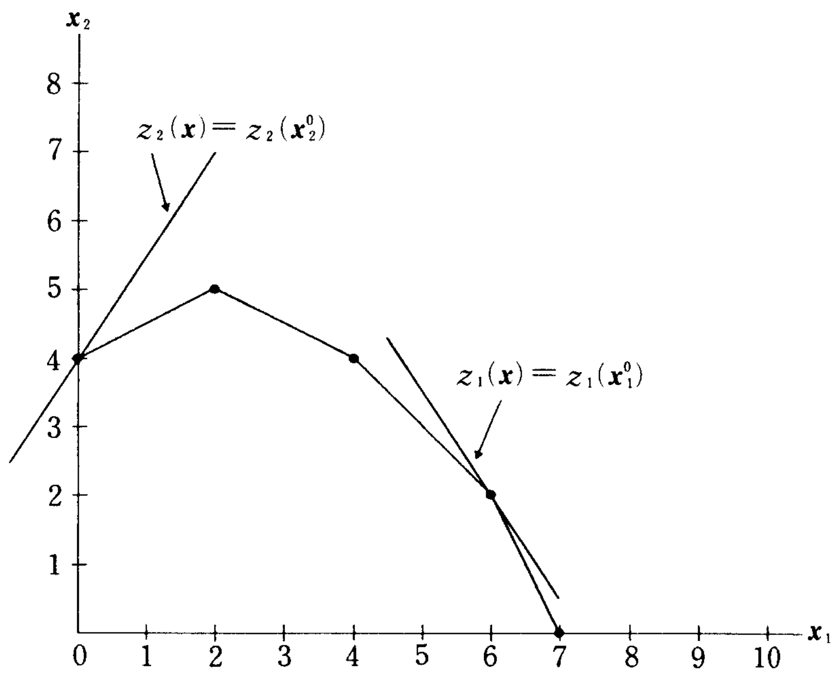

図2　仮設例の実行可能領域

となることがわかる。

次に、(8)のパラメータ α_i を $\alpha_i = 6/(z_i^o - z_i^m)$ と仮定すれば、目的関数 $z_1(\boldsymbol{x})$ と $z_2(\boldsymbol{x})$ に対応する双曲線型のメンバーシップ関数は、それぞれ

$$\begin{cases} \mu_{z_1}^H(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{(z_1(\boldsymbol{x})-15)3/7} - e^{-(z_1(\boldsymbol{x})-15)3/7}}{e^{(z_1(\boldsymbol{x})-15)3/7} + e^{-(z_1(\boldsymbol{x})-15)3/7}} + \dfrac{1}{2} \\ \mu_{z_2}^H(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{(z_2(\boldsymbol{x})+3)3/11} - e^{-(z_2(\boldsymbol{x})+3)3/11}}{e^{(z_2(\boldsymbol{x})+3)3/11} + e^{-(z_2(\boldsymbol{x})+3)3/11}} + \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{24}$$

と表わされる。これらを図示すれば図3，図4が得られる。

ここで、(11)を適用すると仮設例は次のように定式化できる。

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \quad \lambda - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{(3x_1+2x_2-15)3/7} - e^{-(3x_1+2x_2-15)3/7}}{e^{(3x_1+2x_2-15)3/7} + e^{-(3x_1+2x_2-15)3/7}} \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \quad \lambda - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{(-3x_1+2x_2+3)3/11} - e^{-(-3x_1+2x_2+3)3/11}}{e^{(-3x_1+2x_2+3)3/11} + e^{-(-3x_1+2x_2+3)3/11}} \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{25}$$

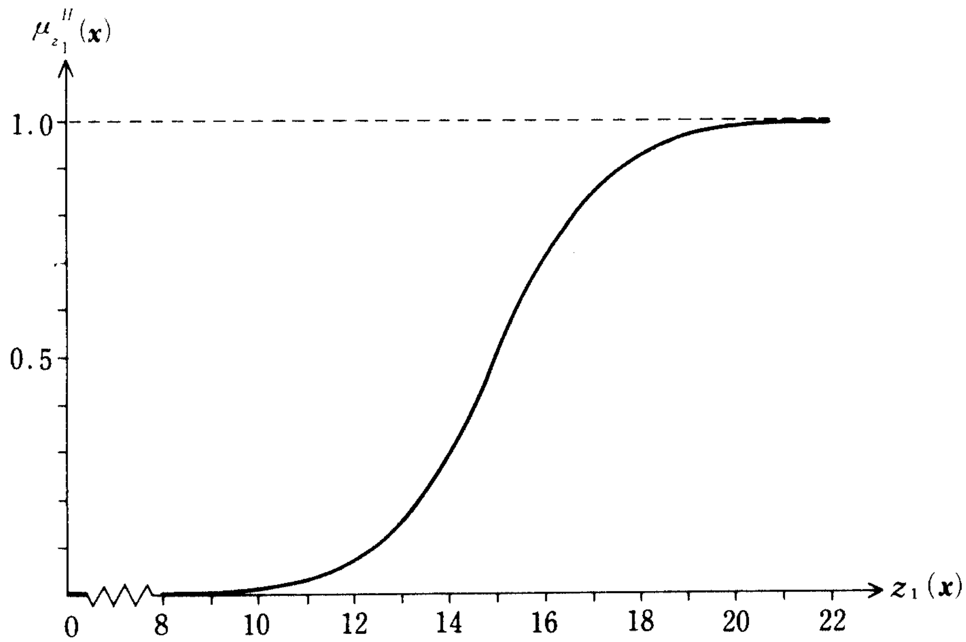

図3　$z_1(x)$ に対応する双曲線型メンバーシップ関数

$$
\left|\begin{array}{l}
-x_1 + 2x_2 \leqq 8, \\
x_1 + 2x_2 \leqq 12, \\
x_1 + x_2 \leqq 8, \\
2x_1 + x_2 \leqq 14, \\
x_1,\ x_2,\ \lambda \geqq 0.
\end{array}\right.
$$

したがって、$x_3 = \tanh^{-1}(2\lambda - 1)$ とおき(18)を用いれば、仮設例のベクトル最大化問題は最終的に、

$$
\left\{\begin{array}{l}
\max \quad x_3 \\
\text{subject to} \\
\qquad 9x_1 + 6x_2 - 7x_3 \geqq 45, \\
\qquad 9x_1 - 6x_2 + 11x_3 \leqq 9, \\
\qquad -x_1 + 2x_2 \leqq 8, \\
\qquad x_1 + 2x_2 \leqq 12, \\
\qquad x_1 + x_2 \leqq 8, \\
\qquad 2x_1 + x_2 \leqq 14, \\
\qquad x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0.
\end{array}\right. \tag{26}
$$

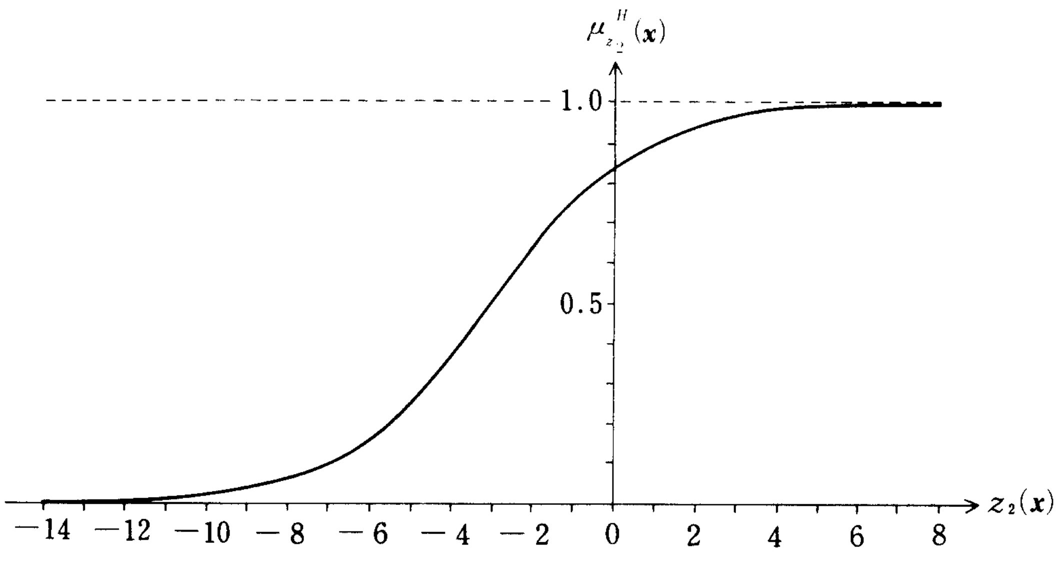

図 4 $z_2(x)$ に対応する双曲線型メンバーシップ関数

なる通常の線形計画問題に変換できることがわかる。これをシンプレックス法によって解くと最適解は、

$$x_1^{opt} = 2.76,\ x_2^{opt} = 4.62,\ x_3^{opt} = 1.08$$

となる。また、この時のメンバーシップ関数の値は、

$$\lambda^{opt} = \mu_{z_1}^{H}(\boldsymbol{x}^{opt}) = \mu_{z_2}^{H}(\boldsymbol{x}^{opt}) = \frac{1}{2}\tanh\ (1.08) + \frac{1}{2} \fallingdotseq 0.897$$

で与えられる。

Ⅲ．指数型メンバーシップ関数

いま、(1)の各目的関数 $z_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \cdots, k)$ に、次のような指数型のメンバーシップ関数（exponential membership function）が対応しているものと想定しよう。

$$\mu_{z_i}^{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - e^{-a_i}}\left(1 - e^{-a_i \cdot \frac{z_i(\boldsymbol{x}) - z_i^m}{z_i^o - z_i^m}}\right) \tag{27}$$

ここに、$a_i(\neq 0)$ はパラメータである。また、z_i^o と z_i^m の値は(9)で与えられる。

この指数型メンバーシップ関数は一般に次のような性質をもっている。

(1)　$\mu_{z_i}^{E}(\boldsymbol{x})$ は強意単調増加関数である。

(2)　$\mu_{z_i}^{E}(\boldsymbol{x})$ は、$a_i > 0$ の時には強意凹関数であり、$a_i < 0$ の時には強意凸関数である。

(3)　$z_i^m \leqq z_i(\boldsymbol{x}) \leqq z_i^o$ を満たす $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して、$0 \leqq \mu_{z_i}^{E}(\boldsymbol{x}) \leqq 1$ が成り立つ。また、$z_i(\boldsymbol{x}) \geqq z_i^o$ の時には $\mu_{z_i}^{E}(\boldsymbol{x}) = 1$ となり、$z_i(\boldsymbol{x}) \leqq z_i^m$ の時には $\mu_{z_i}^{E}(\boldsymbol{x}) = 0$ となる。

なお、$\mu_{z_i}^{E}(\boldsymbol{x})$ を $z_i(\boldsymbol{x})$ に対して図示すると図５のようになる。

さて、意思決定者のファジィ目標を指数型メンバーシップ関数(27)で与えることにし、最小オペレータを用いると、(1)は(7)，(10)の場合と同様に、

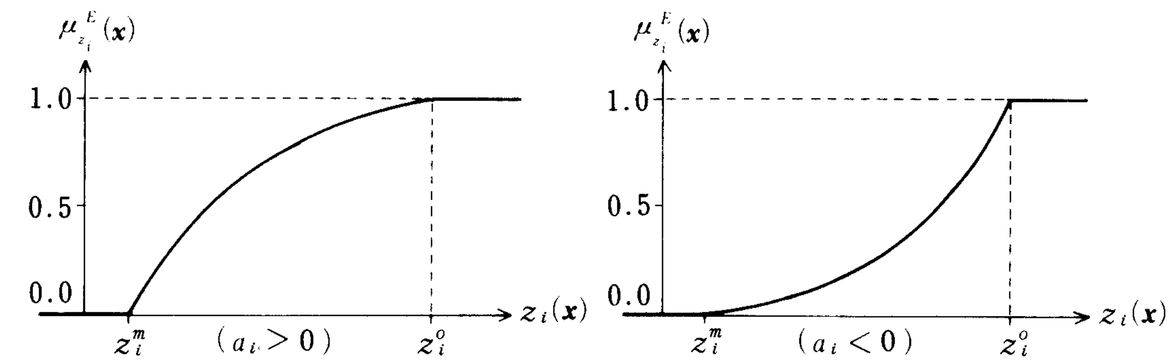

図5 指数型メンバーシップ関数

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\max \quad \lambda \\
\text{subject to} \\
\qquad \lambda \leqslant \mu_{z_i}^E(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, \cdots, k), \\
\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\
\qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}.
\end{array}
\right. \tag{28}
$$

と表わすことができる。

この(28)の最適解については次の定理が成立する。

定理Ⅱ

(28)の最適解を（λ^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$）とする。その時、λ^{opt} は $0 < \lambda^{opt} < 1$ を満たす。

(証明)

(i) $\lambda^{opt} > 0$ を証明する。いま、$\bar{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{x}_j^o$ とおくと、それぞれの $i = 1, \cdots, k$ について

$$z_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{c}_i \bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_j^o > \min_j (\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x}_j^o)^{9)} = \min_j (z_i(\boldsymbol{x}_j^o)) = z_i^m$$

が成り立つ。それゆえ、

$$\mu_{z_i}^E(\bar{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{1 - e^{-a_i}} \left(1 - e^{-a_i \cdot \frac{z_i(\bar{\boldsymbol{x}}) - z_i^m}{z_i^o - z_i^m}}\right) > 0 \quad (i = 1, \cdots, k)$$

といえる。これより、

9) k 個の異った数の算術平均は、これらの数の最小値よりも大きくなる。

$$\lambda^{opt} = \mu_D(\boldsymbol{x}^{opt}) \geqslant \mu_D(\bar{\boldsymbol{x}}) = \min_i \left(\mu_{z_i}^E(\bar{\boldsymbol{x}}) \right) > 0$$

が求まる。

(ii)　$\lambda^{opt} < 1$ を証明する。$\lambda^{opt} = \mu_D(\boldsymbol{x}^{opt}) \leqslant 1$ より $\lambda^{opt} \leqslant 1$ となる。いま、$\lambda^{opt} = 1$ と仮定すれば、

$$\lambda^{opt} = 1 \Longleftrightarrow \bigwedge_i \mu_{z_i}^E(\boldsymbol{x}^{opt}) = 1 \Longleftrightarrow \bigwedge_i \frac{1}{1-e^{-a_i}}\left(1 - e^{-a_i \cdot \frac{z_i(\boldsymbol{x}^{opt}) - z_i^m}{z_i^0 - z_i^m}}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \bigwedge_i \frac{z_i(\boldsymbol{x}^{opt}) - z_i^m}{z_i^0 - z_i^m} = 1 \Longleftrightarrow \bigwedge_i z_i(\boldsymbol{x}^{opt}) - z_i^m = z_i^0 - z_i^m \Longleftrightarrow \bigwedge_i z_i(\boldsymbol{x}^{opt}) = z_i^0$$

が成り立つ。これは、$z_i^o \neq z_j^o \ (i \neq j)$ に反する。それゆえ、$\lambda^{opt} < 1$ となる。　Q.E.D.

いまや、$\lambda^{opt} > 0$ となることを考慮して、(28)を次のように表わすことができる。

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \qquad \lambda \leqslant \dfrac{1}{1-e^{-a_i}}\left(1 - e^{-a_i \cdot \frac{z_i(\boldsymbol{x}) - z_i^m}{z_i^0 - z_i^m}}\right) \quad (i = 1, \cdots, k), \\ \qquad A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \lambda \geqslant 0. \end{cases} \tag{29}$$

ここで、(29)が通常の線形計画問題に変換できることを示そう。まず、(29)の非線形制約式

$$\lambda \leqslant \mu_{z_i}^E(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1-e^{-a_i}}\left(1 - e^{-a_i \cdot \frac{z_i(\boldsymbol{x}) - z_i^m}{z_i^0 - z_i^m}}\right) \quad (i = 1, \cdots, k) \tag{30}$$

を、

$$\begin{cases} e^{-a_i \cdot \frac{z_i(\boldsymbol{x}) - z_i^m}{z_i^0 - z_i^m}} \leqslant 1 - (1 - e^{-a_i}) \cdot \lambda & : a_i > 0 \text{の時} \\ e^{-a_i \cdot \frac{z_i(\boldsymbol{x}) - z_i^m}{z_i^0 - z_i^m}} \geqslant 1 - (1 - e^{-a_i}) \cdot \lambda & : a_i < 0 \text{の時} \end{cases} \tag{31}$$

と書きなおす。これは、さらに両辺の自然対数をとることによって、

$$\begin{cases} -a_i \cdot \dfrac{z_i(\boldsymbol{x}) - z_i^m}{z_i^o - z_i^m} \leqq \log(1-(1-e^{-a_i})\lambda) & : a_i > 0 \text{ の時} \\ -a_i \cdot \dfrac{z_i(\boldsymbol{x}) - z_i^m}{z_i^o - z_i^m} \geqq \log(1-(1-e^{-a_i})\lambda) & : a_i < 0 \text{ の時} \end{cases} \tag{32}$$

と変形できる。それゆえ、a_i の符号に関係なく

$$z_i(\boldsymbol{x}) + \frac{z_i^o - z_i^m}{a_i}\log(1-(1-e^{-a_i})\lambda) \geqq z_i^m \quad (i=1,\cdots,k) \tag{33}$$

が得られる。次に、

$$x_{n+1} = \log(1-(1-e^{-a_i})\lambda) \tag{34}$$

とおけば、(33)は

$$z_i(\boldsymbol{x}) + \frac{z_i^o - z_i^m}{a_i}x_{n+1} \geqq z_i^m \quad (i=1,\cdots,k) \tag{35}$$

と表わせる。

ところで、λ は

$$\lambda = (1-e^{x_{n+1}})/(1-e^{-a_i}) \tag{36}$$

となり、x_{n+1} に関して次のような性質をもっていることが確かめられる。

(i) λ は $a_i > 0$ の時、x_{n+1} に関して強意単調減少関数である。
(ii) λ は $a_i < 0$ の時、x_{n+1} に関して強意単調増加関数である。

一方、x_{n+1} については $\lambda \geqq 0$ から

(i) $a_i > 0$ の時、$x_{n+1} \leqq 0$,
(ii) $a_i < 0$ の時、$x_{n+1} \geqq 0$

が成り立つ。これより、λ を最大化することは、$a_i > 0$ の時 $\gamma = -x_{n+1} (\geqq 0)$ を、また、$a_i < 0$ の時 x_{n+1} を、それぞれ最大化することと等価であるとみなすことができる。

したがって、(29)は結局、$a_i > 0$ の時、

$$
\begin{cases}
\max \quad \gamma \\
\text{subject to} \\
\qquad z_i(\boldsymbol{x}) - \dfrac{z_i^o - z_i^m}{a_i} \cdot \gamma \geqq z_i^m \quad (i = 1, \cdots, k), \\
\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}, \\
\qquad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \quad \gamma \geqq 0.
\end{cases} \tag{37}
$$

$a_i < 0$ の時、

$$
\begin{cases}
\max \quad x_{n+1} \\
\text{subject to} \\
\qquad z_i(\boldsymbol{x}) + \dfrac{z_i^o - z_i^m}{a_i} \cdot x_{n+1} \geqq z_i^m \quad (i = 1, \cdots, k), \\
\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}, \\
\qquad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}.
\end{cases} \tag{38}
$$

なる通常の線形計画問題に変換されることになる。

以上から、(29)の最適解（λ^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$）は、(37)と(38)の最適解をそれぞれ（γ^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$), （x_{n+1}^{opt}, $\boldsymbol{x}^{opt}$）とすれば、

$$
(\lambda^{opt}, \boldsymbol{x}^{opt}) = \begin{cases}
\left(\dfrac{1 - e^{-\gamma^{opt}}}{1 - e^{-a_i}}, \ \boldsymbol{x}^{opt}\right) & : a_i > 0 \text{ の時} \\
\left(\dfrac{1 - e^{x_{n+1}^{opt}}}{1 - e^{-a_i}}, \ \boldsymbol{x}^{opt}\right) & : a_i < 0 \text{ の時}
\end{cases} \tag{39}
$$

で与えられることがわかる。

なお、(28)を解いて得られる解のパレート最適性については、前節の定理Ⅰ以降と同様の議論がそのまま成立することに注意されたい。

ここで、前節と同じ仮設例に対して、指数型のメンバーシップ関数(27)を適用してみよう。

いま、(27)のパラメータ a_i を $a_i=2$ $(i=1,2)$ と仮定すれば、目的関数 $z_1(\boldsymbol{x})$ と $z_2(\boldsymbol{x})$ に対応する指数型メンバーシップ関数は、それぞれ

$$\begin{cases} \mu_{z_1}^{E}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{1-e^{-2}}\left(1-e^{\frac{-(3x_1+2x_2-8)}{7}}\right) \\ \mu_{z_2}^{E}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{1-e^{-2}}\left(1-e^{\frac{-(-3x_1+2x_2+14)}{11}}\right) \end{cases} \tag{40}$$

と表わされる。これらを図示すれば図6，図7が得られる。

これより、仮設例は(29)を用いて次のように定式化される。

$$\begin{cases} \max \quad \lambda \\ \text{subject to} \\ \qquad \lambda \leqslant \dfrac{1}{1-e^{-2}}\left(1-e^{\frac{-(3x_1+2x_2-8)}{7}}\right), \\ \qquad \lambda \leqslant \dfrac{1}{1-e^{-2}}\left(1-e^{\frac{-(-3x_1+2x_2+14)}{11}}\right), \\ \qquad -x_1+2x_2 \leqslant 8, \\ \qquad x_1+2x_2 \leqslant 12, \\ \qquad x_1+x_2 \leqslant 8, \\ \qquad 2x_1+x_2 \leqslant 14, \\ \qquad x_1,\ x_2,\ \lambda \geqslant 0. \end{cases} \tag{41}$$

したがって、$\gamma=-x_{n+1}=-\log(1-(1-e^{-a_i})\lambda)$ とおき(37)を適用すれば、(41)ないし仮設例のベクトル最大化問題は、最終的に

$$\begin{cases} \max \quad \gamma \\ \text{subject to} \\ \qquad 3x_1+2x_2-7\gamma \geqslant 8, \\ \qquad -3x_1+2x_2-11\gamma \geqslant -14, \\ \qquad -x_1+2x_2 \leqslant 8, \end{cases} \tag{42}$$

$$
\left|
\begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 \leqq 12, \\
x_1 + x_2 \leqq 8, \\
2x_1 + x_2 \leqq 14, \\
x_1,\ x_2,\ \gamma \geqq 0.
\end{array}
\right.
$$

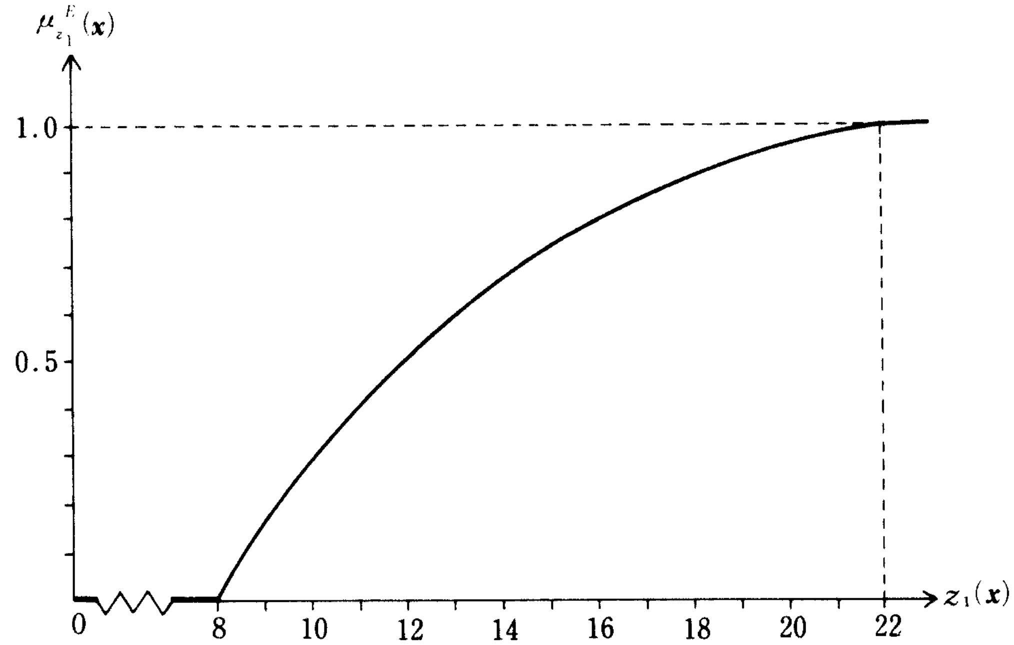

図6　$z_1(x)$ に対応する指数型メンバーシップ関数

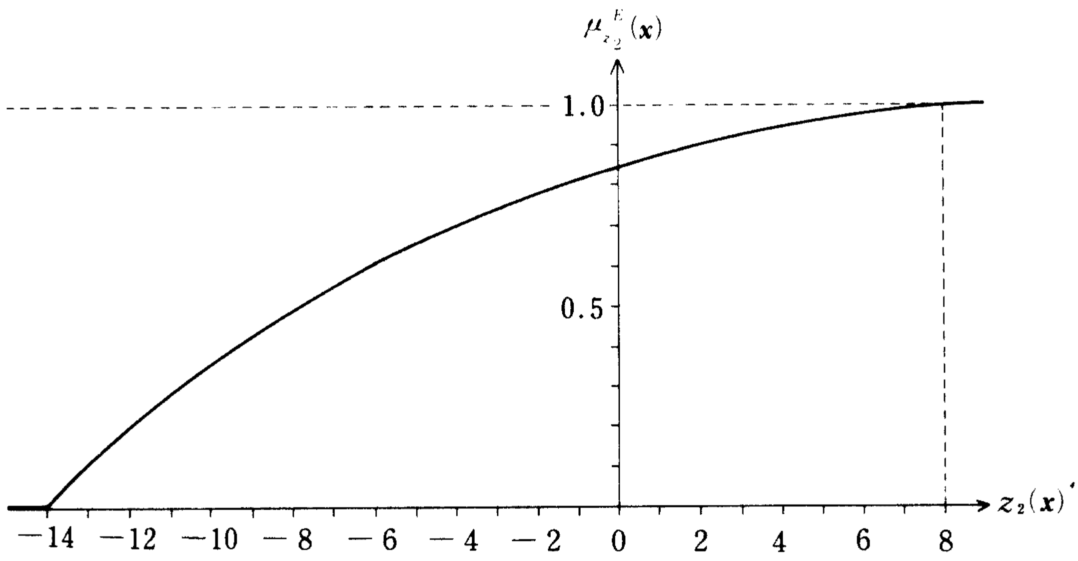

図7　$z_2(x)$ に対応する指数型メンバーシップ関数

なる通常の線形計画問題に変換できる。これを解くと最適解は、

$$x_1^{opt} = 2.76,\ \ x_2^{opt} = 4.62,\ \ \gamma = 1.36$$

となる。また、この時のメンバーシップ関数の値は、

$$\lambda^{opt} = \mu_{z_1}^{E}(\boldsymbol{x}^{opt}) = \mu_{z_2}^{E}(\boldsymbol{x}^{opt}) = \frac{1-e^{-1.36}}{1-e^{-2}} \fallingdotseq 0.860$$

で与えられることがわかる。

Ⅳ．おわりに

以上、複数個の目的関数を有するファジィ多目的線形計画問題が、最小オペレータの下で、双曲線型と指数型の特殊な非線形メンバーシップ関数を想定した時、通常の線形計画問題に変換できることを示した。しかし、これらのメンバーシップ関数が、必ずしも現実の意思決定者の満足度を適切に表現しているとは言い難い。そこで、ファジィ多目的線形計画問題を一層現実的なものにするためには、さらに数多くの非線形メンバーシップ関数について議論する必要がある。併せて、最小オペレータ以外のオペレータとして、H. Hamacher の統合オペレータないし積オペレータ（product-operator）や和オペレータ（add-operator）などを用いた場合についての考察も欠かせないことはいうまでもない。これらは、今後に残された課題である。

（筆者は関西学院大学商学部助教授）