多変量時系列モデルとその統計的解析

杉　原　左 右 一

I　序

経済時系列の統計的解析は、近年特に著しい発展を見せている。とりわけ、1変量時系列に関する自己回帰・移動平均時系列モデル、ないし季節的自己回帰・移動平均時系列モデルは、経済時系列分析に広く用いられ、その有効性は高く評価されている。(以後それぞれ、ARMA 時系列モデル、季節的 ARMA 時系列モデルと略記する[1)]。Box and Jenkins〔4〕)。筆者も、これまで拙稿に於てこのモデルに関連する研究発表を行って来た。

ところで、その有効性にも拘わらず、このような1変量時系列モデルにも自らその限界のある事は明らかであろう。とりわけ、経済時系列相互間の依存関係を分析する必要性が増大するにつれ、多変量時系列モデルの構築とその統計的解析が必要不可欠なものとなっている。

本稿は、これまで筆者が1変量時系列に関して拙稿〔14—19〕で取り扱った ARMA 時系列モデル及び季節的 ARMA 時系列モデル、並びに動的線型モデルに関して、これらのモデルの多変量モデルへの一般化を計り、その基本的諸性質を整理すると共に、未知母数に関する有効推定法を提示してその統計的諸性質を明らかにする事により、多変量時系列モデルの構築とその統計的解析に関する一つの方法を明らかにする事を意図している。

次に本稿の内容について概観したい。

---

1) Autoregressive-Moving average Time Series Model : Seasonal Autoregressive-Moving average Time Series Model

先ず、Ⅱ章§1，§2に於て、VARMA 並びに季節的 VARMA 時系列モデルを構築し、その意味を明らかにする。これらのモデルは、1変量 ARMA 並びに季節的1変量 ARMA 時系列モデルの、多変量の場合への一般化となっており、極めて適用範囲の広いモデルであり、特に経済時系列間の相互依存関係を究明する上で有用であろう。次に§3に於て、これらのモデルの未知母数に関する一有効推定法を提示し、その統計的諸性質を明らかにする。特に、本節の推定方法により原則として反復計算が不必要となり、かつ有効推定量を得る事が可能である。さらに§4で、最近の情報量基準に基づく次数決定法について述べ、この方法をⅣ章に於て実際問題に適用する事にする。

次に、Ⅲ章§1，§2に於て、Ⅱ章とは別に、攪乱項が VARMA 時系列に従うような動的同時方程式モデルを構築し、このモデルの意味について述べる。同モデルは、従来の計量経済学的モデルを、特に攪乱項が VARMA 時系列に従う場合に拡張したものであるが、Ⅱ章の純粋な時系列モデルと並び、経済時系列分析に有用なモデルであると考えられる。次に§3で、同モデルの未知母数に関する一有効推定法を提示する。同方法に従えば、Ⅱ章同様、反復計算が不必要となり、かつ有効推定量を得る事が可能である。

最後にⅣ章§1に於て、VAR 時系列モデルをとりあげ、同モデルが特に多変量時系列間の因果関係の検証に有用である事を明らかにし、§2で実際に2変量経済時系列の因果関係の検証を例示する。

なお、本稿Ⅱ章で扱っている VARMA 時系列モデルに関しては、Hannan〔9〕, Nicholls〔12〕等の方法が考えられているが、本稿ではこれらの方法とは別に、時間領域での分析を行い、反復計算を必要としない有効推定法を明らかにしている。

又、Ⅲ章のモデルは、1変量に関する拙稿〔16—19〕のモデルの多変量の場合への拡張となっており、さらに、Dhrymes and Erlat〔5〕, Hatanaka〔11〕等による攪乱項が VAR 時系列に従う動的同時方程式モデルの拡張になっている。

なお、本稿で明らかにした多変量時系列モデルの統計的解析に関してはさら

に引き続き別稿で論及する所存である。

II VARMA 時系列モデル

§1. モデルと仮定

$(n\times 1)$ 次の多変量時系列の、時点 t に於ける観測値を w_t で表わす。一般に原系列 $D^*=\{w_t|t=1,2,\cdots,T\}$ は必ずしも定常時系列を構成するとは限らないが、原系列に適当な変換を施す事により定常時系列が得られるものとし、この様にして得られた $(n\times 1)$ 次の多変量時系列を改めて $D=\{y_t|t=1,2,\cdots,T\}$ と表わす事にする。

変換の一例として、例えば原系列にトレンドが認められる場合には、各成分毎に適当な次数の多項式を用いてこれを除去する事や、あるいは適当な次数の階差を施す事が考えられよう。階差演算の一例として、階差演算子 $(I-\mathcal{L})^d$ ないし $(I-\mathcal{L}^s)^D$ を用いて w_t を次のような y_t に変換する事がよく用いられる。

$$(1)\quad y_t=(I-\mathcal{L})^d w_t,\qquad y_t=(I-\mathcal{L}^s)^D w_t$$

(1)式の前者は次数 d の階差演算を示し、後者は周期 s 毎の次数 D の階差演算を示している。但し、(1)式で $\mathcal{L}^i$ は時間を i 期(i は非負の整数)後退させるラグ演算子であり、$\mathcal{L}^i w_t=w_{t-i}$ である。上述の階差演算が示しているように、一般に変換によっては、使用可能な標本の大きさ T が当初より減少する事もあるであろう。

なお上述の変換の他にも、予備的な変換として、例えば原系列の対数変換や、対数変換をも含む次式(2)で表わされる Box-Cox 変換が有用である場合も多い。

$$(2)\quad y_{ti}(\tau,c)=\frac{(w_{ti}+c)^{\tau}-1}{\tau}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

対数変換は(2)式で、$\lim_{\tau\to 0} y_{ti}(\tau,c)$ に対応している。

さて、このようにして、必要であれば原系列に適当な変換を施して得られる $(n\times 1)$ 次の多変量時系列 $\{y_t|t=1,2,\cdots,T\}$ について、次のようなベクトル

自己回帰・移動平均時系列モデル(3)式、ないし季節的ベクトル自己回帰・移動平均時系列モデル(4)式を考える。以後簡単に、それぞれ VARMA 時系列モデル、ないし季節的 VARMA 時系列モデルと呼ぶ事にする[2]。

$$(3)\quad \phi(\mathcal{L})y_t=\theta(\mathcal{L})u_t \qquad\qquad t=1,2,\cdots,T$$
$$(4)\quad \Phi(\mathcal{L}^s)y_t=\Theta(\mathcal{L}^s)u_t$$

但し、ここで u_t は独立、同一分布に従う $(n\times1)$ 次の確率ベクトルであり、$\phi(\mathcal{L})$, $\Phi(\mathcal{L}^s)$, $\theta(\mathcal{L})$, $\Theta(\mathcal{L}^s)$ は、それぞれラグ演算子 $\mathcal{L}$ 又は $\mathcal{L}^s$ に関する次のような次数 p, P, q, Q の多項式を表わす。

$$(5)\quad \begin{aligned}&\phi(\mathcal{L})=\sum_{i=0}^{p}\phi_i\mathcal{L}^i, \qquad \theta(\mathcal{L})=\sum_{k=0}^{q}\theta_k\mathcal{L}^k\\ &\Phi(\mathcal{L}^s)=\sum_{j=0}^{P}\Phi_j\mathcal{L}^{js}, \qquad \Theta(\mathcal{L}^s)=\sum_{l=0}^{Q}\Theta_l\mathcal{L}^{ls} \qquad \phi_0=\Phi_0=\theta_0=\Theta_0=I_n\end{aligned}$$

(5)式に於て、$\phi_i(i=1,2,\cdots,p)$, $\Phi_j(j=1,2,\cdots,P)$, $\theta_k(k=1,2,\cdots,q)$, $\Theta_l(l=1,2,\cdots,Q)$ はそれぞれ $(n\times n)$ 次の未知母数行列である。

季節的 VARMA 時系列モデルに於て、特に s=1 とすれば、その特別なモデルとして VARMA 時系列モデルが得られる事になる。

なお、筆者の知る限り、季節的 ARMA 時系列モデルの母数推定量の統計的分布は未だ明示的には与えられていない様に思われる。ARMA 時系列モデルと比べ本質的な相異はないが、特に同モデルは経済時系列の季節変動の解析に有用である。本章では以下主に VARMA 時系列モデルについて議論を進める事にするが、なお必要に応じて季節的 VARMA 時系列モデルに関しても併記する事にしたい。

そこで VARMA 時系列モデルについて、以後の便宜のために、(5)式の未知母数を次式(6)のベクトル μ で表わす[3]。

---

2) Vector Autoregressive-Moving average Time Series Model : Seasonal Vector Autoregressive-Moving average Time Series Model

3) 一般に、Gを $(h\times g)$ 次の行列とするとき、Vec(G) は、Gの第 (i, j) 要素を第 $(h(j-1)+i)$ 要素としてもつ $(hg\times1)$ 次のベクトルを表わすものとする。以後簡単化のため、これを μ_G と略記する事もある。

(6) $\mu = \mathrm{Vec}(\phi_1, \cdots, \phi_p, \theta_1, \cdots, \theta_q,)$

$= (\mu'_\phi, \mu'_\theta)'$

さてこの様な前述の VARMA 時系列モデル(3)式について、次の仮定1, 2, 3を設定する。

仮定 1

u_t は互いに独立に、同一分布に従い、$E[u_t]=0$, $E[u_t u'_t]=\Sigma$ とする。

仮定 2

(3)式に於て、次の行列式 $|\phi(\omega)|=0$, $|\theta(\omega)|=0$ の根の絶対値は1より大である。

仮定 3

(3)式のモデルは識別可能である。

仮定2は、過程の定常性及び反転可能性を保証するものであり，又仮定1に関して、ここでは正規性の仮定を必要としない事に注意したい。仮定3の識別条件に関して、本稿では $\phi(\omega), \theta(\omega)$ の最大共通左分割行列が単位行列である事を仮定するが、その他の識別条件の詳細に関しては Hannan〔10〕が参考になろう。ここでは、$\mathrm{rank}(\phi_p, \theta_q)=n$ とする。

なお、次数 p, q 及び P, Q は既知であるものと仮定するが、これらの次数決定に関しては節を改め、§4で述べる事にしたい。

さて、これらの諸仮定の下に、問題は、得られたデータをもとにして、前述の VARMA 時系列モデル(3)式の未知母数 μ 及び Σ を推定する事である。

§2. モデルの意味

1変量時系列に関する ARMA 時系列モデルないし季節的 ARMA 時系列モデルが、経済時系列の分析に極めて有用なモデルである事は既に良く知られているところであり、これまで種々の理論的、実証的研究がなされている。筆者もこれまで拙稿〔14, 15, 19〕に於てこれらのモデルに関する発表を行ってきた。

ところで、前節§1の VARMA 時系列モデルないし季節的 VARMA 時系

列モデルは、これらの１変量に関するモデルの多変量時系列の場合への一般化を計ったものである。

１変量のモデルに比べて、これらの多変量モデルの大きな特徴が、多変量時系列の相互依存関係を把握し得る点にある事は改めて指摘するまでもないであろう。特に VARMA 時系列モデルの特徴は、AR 部分に加えて MA 部分を導入する事により、比較的少数の次数のモデルで極めて適用範囲の広いモデルを表現する事が可能となる点にあると言えよう。又、季節的 VARMA 時系列モデルは、周期 s の周期的変動（季節変動）を含む経済時系列の分析に有効であるが，このモデルで s＝1 とすれば、VARMA 時系列モデルが得られる事になる。

さらに、これらのモデルと並び、これらの特別なモデルである VAR 時系列モデルも経済時系列分析に有用である。VAR 時系列モデルは次の様な特徴を持っている。即ち、（１）VARMA 時系列モデルは、仮定２により、次式（７）

$$(7) \qquad \theta^{-1}(\mathcal{L})\phi(\mathcal{L})\mathrm{y}_t = \mathrm{u}_t$$

の如く表現出来るが、これを適当な次数の VAR 時系列モデルで近似する事が考えられる。さらに又、定常時系列は、一般的条件の下で片側 MA 時系列モデルにより表現出来るが、ある種の条件の下でこれを反転し、適当な次数の VAR 時系列モデルで近似する事が考えられよう。さらに、（２）VAR 時系列モデルは VARMA 時系列モデルに比べて未知母数の推定がより簡単である。

このような意味から、VAR 時系列モデルを経済時系列への第１次的近似モデルとして使用する事も可能であろう。

ところで、VARMA ないし季節的 VARMA 時系列モデル（３），（４）式を、これと同値な次の様な最終方程式モデル（８），（９）式として表現する事も可能である。

$$(8) \qquad |\phi(\mathcal{L})|\mathrm{y}_t = \phi^*(\mathcal{L})\theta(\mathcal{L})\mathrm{u}_t$$

$$(9) \qquad |\Phi(\mathcal{L}^s)|\mathrm{y}_t = \Phi^*(\mathcal{L}^s)\Theta(\mathcal{L}^s)\mathrm{u}_t \qquad \mathrm{t}=1,2,\cdots,\mathrm{T}$$

但し、（８），（９）に於て、$\phi^*(\mathcal{L})$，$\Phi^*(\mathcal{L}^s)$ は、それぞれ $\phi(\mathcal{L})$，$\Phi(\mathcal{L}^s)$ の余

因子行列を示す。

(8), (9)式の右辺の各成分はn種類の MA 時系列の和として表現されているから、一般にそれ自身一つの MA 時系列として表現可能である。従ってこれらの最終方程式モデルを、同時点での攪乱項が互いに相関を持ち、かつ AR 部分が各方程式毎に等しい様なn種類の1変量 ARMA 時系列モデルの体系として表現可能となる事がわかる。

又この様に、最終方程式モデルはそれ自身一つの特別な VARMA 時系列モデルとなっているから、その未知母数を次節§3の方法によって推定する事も可能である。

なお、最終方程式モデルより元の(3), (4)式のモデルを一意に定める事は一般には難しいであろうが、最終方程式モデルを、元のモデルの次数 p, q 及び P, Q の決定に利用する事が可能である。

§3. 未知母数の有効推定

本節では、与えられた観測データ $D=\{y_t|t=1,2,\cdots,T\}$ をもとに、前述の VARMA 時系列モデル(3)式の未知母数 μ 及び Σ の一つの推定方法を提示し、その統計的諸性質を明らかにしたい。本節で明らかにする方法により、通常必要となる反復計算を回避する事が出来、かつ有効推定量を得る事が可能である。

さて未知母数推定に際して、先ず初期値 $y_0, y_{-1}, \cdots\cdots, y_{1-p}$ 及び $u_0, u_{-1}, \cdots\cdots, u_{1-q}$ を定める必要があるが、u については、その期待値が0であるから、$u_0=u_{-1}=\cdots\cdots=u_{1-q}=0$ とし、又 y についても、$y_0=y_{-1}=\cdots\cdots=y_{1-p}=0$ と定める事にする。仮定2より初期値の影響は漸近的に無視出来る。

ところで、(T×T) 次の行列Lを、

$$(10)\quad L=\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ I_{T-1}, & 0 \end{pmatrix},$$

但し、$L^0=I_T$ と定義すれば、上記初期値のもとに、(3), (4)式を次の(11), (12)式の様に表現する事が出来る。

(11)　$\sum_{i=0}^{p} L^i Y \phi'_i = \sum_{k=0}^{q} L^k U \theta_k'$

(12)　$\sum_{j=0}^{P} L^{js} Y \Phi_j' = \sum_{l=0}^{Q} L^{ls} U \Theta_l'$

但し、

(13)　$Y' = (y_1, y_2, \cdots, y_T)$,　$U' = (u_1, u_2, \cdots, u_T)$

である。

ここでさらに、

$$\phi = \sum_{i=0}^{p} (\phi_i \otimes L^i), \quad \theta = \sum_{k=0}^{q} (\theta_k \otimes L^k)$$

(14)　$\Phi = \sum_{j=0}^{P} (\Phi_j \otimes L^{js}), \quad \Theta = \sum_{l=0}^{Q} (\Theta_l \otimes L^{ls})$

$$y = \mathrm{Vec}(Y), \quad u = \mathrm{Vec}(U)$$

と表わせば[4]、(11), (12)式を、より簡潔に次式(15), (16)式で表現出来る事がわかる。

(15)　$\phi y = \theta u$

(16)　$\Phi y = \Theta u$

なお、仮定1より、(15), (16)式の u の平均ベクトル及び共分散行列はそれぞれ、

(17)　$E[u] = 0, \quad E[uu'] = \Omega = \Sigma \otimes I_T$

である。

以下本節では、(15)式で表わされるモデルの未知母数 μ 及び Σ の推定問題を考える事にする。

ところで、仮定1に加えて、さらに u_t が正規分布に従う場合には、y は平均0ベクトル、共分散行列 $S = \phi^{-1} \theta \Omega \theta' \phi^{-1\prime}$ の多変量正規分布に従う事になり、その対数尤度関数 log L は、

(18)　$\log L = -\frac{Tn}{2} \log 2\Pi - \frac{T}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} y' S^{-1} y$

4) 記号⊗は行列のクロネッカー積を示す。

となる。

(18)式に基づく対数尤度方程式$\frac{\partial \log L}{\partial \mu}=0$ は、母数μに関する非線型方程式となるから、一般にこれを代数的に解く事は不可能となる。

そこで本節では、先ず(1)母数μ，Σの一つの一致推定量を求め、次に(2)これを用いて一種の Newton-Raphson 関係式を使用する2段階推定法を提示し、この様にして得られる推定量$\hat{\mu}$，$\hat{\Sigma}$が漸近的有効推定量となっている事を明らかにしたい。又この方法に従えば、原則として反復計算が不必要である。

さて、先ず第1段階として、未知母数μ，Σの一致推定量を次の様にして求める。即ち，多変量 Yule-Walker 方程式を用いて μ_ϕ の一致推定量 $\tilde{\mu}_\phi$ を求め，次に VMA 時系列部分に関するスペクトラル密度行列の一致推定量より、μ_θ，Σの一致推定量 $\tilde{\mu}_\theta$，$\tilde{\Sigma}$ を求める。

次に、第2段階として、この様にして得られた一致推定量 $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}_\phi{}',\tilde{\mu}_\theta{}')'$，$\tilde{\Sigma}$ をもとにして、次式(19)を満たす推定量$\hat{\mu}$を求める。

(19)　$\tilde{M}'\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{M}(\hat{\mu}-\tilde{\mu})=\tilde{M}'\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{\phi}y$

ここで記号“～”は、対応するそれぞれの行列が第1段階で求めた一致推定量$\tilde{\mu}$，$\tilde{\Sigma}$に関するものである事を示すものであり、又 $\tilde{\Pi}^{-1}$ は、

(20)　$\tilde{\Pi}^{-1}=\tilde{\theta}'^{-1}\tilde{\Omega}^{-1}\tilde{\theta}^{-1}$

によって与えられる。さらに、行列Mの具体的な表現については巻末の Appendix 1 を参照されたい。なお(19)式が、$(\hat{\mu}-\tilde{\mu})$ に関して一種の一般化最小2乗推定法を与えている事が理解されよう。

さて、この様にして得られた推定量$\hat{\mu}$について、次の定理1を示す事が出来る。

定理　1

前述の VARMA 時系列モデル(3)式について、仮定1，2，3の下で、(19)式から得られるμの推定量を$\hat{\mu}$とし、μ，Σの真値を μ^0，Σ^0 で表わす。このとき、(i)$\hat{\mu}$は μ^0 の一致推定量であり、(ii)$\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu^0)$ は多変量正規分布 $N(0,V^{-1})$ に法則収束する。但し、Vは、

(21) $V=\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}M'\Pi^{-1}M\Big|_{\mu^0,\,\Sigma^0}$

である。

上記定理の証明は、一変量の場合とほぼ同様にして行う事が出来、又、(21)式のVをより簡潔にスペクトラル表示する事が可能である。(拙稿〔20〕)

ところで$\hat{\mu}$は、u_t に正規性を仮定して得られるμの最尤推定量と同一の漸近分布に従うから、上述の2段階推定法に従って得られる推定量$\hat{\mu}$は漸近的有効推定量となっている事がわかる。さらにこの様な2段階推定法に従えば、原則的に反復計算を必要としない事にも注意したい。

なお、Σは次式(22)

(22) $\hat{\Sigma}=\frac{1}{T}\hat{U}'\hat{U}$

によって推定すればよい。ここで$\hat{U}$は、

(23) $\hat{u}=\mathrm{Vec}(\hat{U})=\hat{\theta}^{-1}\hat{\phi}y$

を満たし、(23)式の記号"へ"は、それぞれの行列が第2段階で求めた推定量$\hat{\mu}$に関するものである事を示すものである。$\hat{\Sigma}$と$\hat{\mu}$は漸近的無相関である。

§4. 次数の決定

前節まで、モデルの次数 p, q 及び P, Q は既知であるものと仮定した。ところで、実際に(3)ないし(4)式のモデルを構築する際、如何にこれらの次数を決定するかは母数の推定問題と並んで重要な問題となる。

その一つの方法として、1変量時系列モデルについての Box and Jenkins による伝達関数モデルの方法を拡張し、多変量時系列モデルの次数を決定する事が可能である。上述の方法の特徴は、自己相関関数ないし相互相関関数の標本値と、理論値の諸性質とを比較検討する事により次数を決定する点にある。

ところでこの様な方法は、変量の数nが比較的少ない場合には使用可能であろうが、nが大きい場合には必ずしも実用的な方法とは言えないであろう。

そこで本節では、この様な方法とは別に、いわゆる情報量基準最小化に基づ

く次数決定方法について述べてみたい。

情報量基準（An Information Criterion. 以下 AIC と略す。 Akaike〔1〕）は、次式(24)

(24)　AIC＝−2 log（最大尤度）＋2（自由な母数の総数）

によって定義されるが、(24)式右辺第1項はモデルのあてはまりの良さを示し、第2項は逆に、モデルの複雑化に伴うペナルティーを意味している。即ち、一般に母数の数の増加と共に、右辺第1項は減少するが、第2項は増加する事になり、両者の効果を勘案して、AIC を最小にする様なモデルを選択するのである。

従って、この様な AIC を利用して(3)ないし(4)式のモデルの次数を決定する事が可能であろう。

ところで、一度に(3)ないし(4)式全体の AIC を最小にする次数を決定する事も可能であろうが、この様な方法に従えば、変量の数 n が大きくなるにつれて組合わせの数が著しく増加する恐れがあり、この様な方法に代って次の様な2段階法も効果的であろう。即ち、(1)先ず(3)ないし(4)式の各方程式毎に AIC を最小にする粗い次数を求め、次に(2)この様にして求められた次数をその近傍で増加、減少させる事により、全体系の AIC を最小にする次数を決定する方法が考えられる。

AIC 法の経済時系列に関しての適用例は未だ極めて少ない様に思われる。次数決定方法についてはその他にも幾つかの方法があり、特に標本数が比較的少ない経済時系列の分析に於て、どの方法が有効であるかについては、今後具体的な問題への適用を通し比較検討する必要があろう。

なお本稿ではⅣ章に於て、実際の経済時系列データに AIC 法を適用する事にしたい。

Ⅲ　動的同時方程式モデル

§1.　モデルと仮定

時点 t に於ける、内生変数、外生変数及び攪乱項をそれぞれ（n×1）次のベ

クトル y_t, x_t, z_t で表わす事にし、本章では、特に攪乱項 z_t が前章で述べた VARMA 時系列に従う次の様な計量経済学的な動的同時方程式モデル(25)式を考える。

$$(25)\quad \begin{aligned} A(\mathcal{L})y_t &= B(\mathcal{L})x_t + z_t \\ \phi(\mathcal{L})z_t &= \theta(\mathcal{L})u_t \end{aligned} \qquad t=1, 2, \cdots, T$$

但し、u_t は前章と同様に、独立、同一分布に従う $(n\times 1)$ 次の確率ベクトルであり、$\phi(\mathcal{L})$, $\theta(\mathcal{L})$ はII(5)式で与えられ、又 $A(\mathcal{L})$, $B(\mathcal{L})$ はそれぞれラグ演算子$\mathcal{L}$に関する次の様な次数m，r の多項式を表わす。

$$(26)\quad \begin{aligned} A(\mathcal{L}) &= \sum_{j=0}^{m} A_j\mathcal{L}^j \qquad \text{但し } A_0=I_n \\ B(\mathcal{L}) &= \sum_{h=0}^{r} B_h\mathcal{L}^h \end{aligned}$$

上式に於て、$A_j(j=1, 2, \cdots, m)$, $B_h(h=0, 1, \cdots, r)$ はそれぞれ $(n\times n)$ 次の未知母数行列であり、以後の便宜のために、前章同様未知母数を(27)式のベクトルμで表わす。

$$(27)\quad \begin{aligned} \mu &= \mathrm{Vec}(A_1, \cdots, A_m, B_0, \cdots, B_r, \phi_1, \cdots, \phi_p, \theta_1, \cdots, \theta_q) \\ &= (\mu_A', \mu_B', \mu_\phi', \mu_\theta')' \end{aligned}$$

なお、本稿では $A_0=I_n$ とするが、特に y_t の同期の相互依存を考慮する場合には、A_0 を対角要素が1である一般の行列とすればよい。但し母数推定に関しては両モデル間に大きな相異はない。

さてこの様な動的同時方程式モデル(25)式について、次の仮定1, 2, 3, 4を設定する。

仮定 1

u_t は互いに独立に、同一分布に従い、$E[u_t]=0$, $E[u_tu_t']=\Sigma$ とする。

仮定 2

$|A(\omega)|=0$, $|\phi(\omega)|=0$, $|\theta(\omega)|=0$ の根の絶対値は1より大である。

仮定 3

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t x_{t-\tau}' = R(\tau) \qquad \tau=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

が存在し、R(0) は非特異行列である。

仮定　4

(25)式のモデルは識別可能である。

仮定1，2の意味については前章を参照されたい。又外生変数 $\mathbf{x}_t$ に関する仮定3をゆるめ、所謂 Grenander 条件を仮定する事も可能であるが、この点については拙稿〔18〕を参照されたい。

さらに、仮定4の識別条件に関しては、本章では(i)$A(\omega)$，$B(\omega)$，$\phi(\omega)$，$\theta(\omega)$ の最大共通左分割行列が単位行列であり、さらに(ii)特に $A_j(j=1,2,\cdots,m)$，$B_h(h=0,1,\cdots,r)$ の各行の要素にゼロ制約が課せられており、モデルが識別可能になっているものと仮定する。

なお、本章では次数m，r，p，qは既知であるものと仮定する。これらの次数をII § 4と同様の方法によって決定する事が可能であろう。

さてこの様な諸仮定の下に、問題は、得られたデータをもとに、動的同時方程式モデル(25)式の未知母数 μ 及び Σ を推定する事である。

§ 2.　モデルの意味

前節(25)式のモデルは、前章の純粋な時系列モデルとは異なり、計量経済学的モデルとしてしばしば用いられる動的同時方程式モデルに於て、特にその攪乱項が VARMA 時系列に従う場合への一般化となっている。

即ち、(25)式左辺のラグ多項式$A(\mathcal{L})$，$B(\mathcal{L})$ は、それぞれ内生変数、外生変数の動的特性を表わすものであり、さらに攪乱項 $\mathbf{z}_t$ が、前章で述べた VARMA 時系列に従うモデルを意味している。従来、攪乱項が独立、同一分布に従う事を仮定する事が多い様に思われるが、本章のモデルはその拡張になっている。

ところで、特に外生変数 $\mathbf{x}_t$ が VARMA 時系列を用いて表現出来るならば、容易にわかる様に、動的同時方程式モデル(25)式を一種の VARMA 時系列モデルとして表現する事が可能となる。この様な意味から、良く指摘される様に、時系列モデルは計量経済学的モデルと比較して決してナイーブなモデルではな

い事が理解されよう。

純粋時系列モデルと計量経済学的モデルのモデル選択は、研究分野に応じて決めるべきものであろうが、両モデルを互いに補完的に用いる事も出来るであろう。

なお本章のモデルは、拙稿〔16, 17, 18〕の1変量に関する動的線型モデルを多変量の場合へ一般化したものであり、さらに、Dhrymes and Erlat〔5〕, Hatanaka〔11〕等による攪乱項が VAR 時系列に従う動的同時方程式モデルの拡張になっている。

(25)式に於て特に $A(\mathcal{L})=I_n$ とすれば、攪乱項が VARMA 時系列に従う多変量分布ラグモデルが得られる。このモデルは拙稿〔16, 18〕の1変量に関する分布ラグモデルの拡張となっている。さらに、(25)式で、特に $A(\mathcal{L})=I_n$, $B(\mathcal{L})=0$ 又は、$\phi(\mathcal{L})=I_n$, $B(\mathcal{L})=0$ とすれば、前章の VARMA 時系列モデルが得られる事になる。

§3. 未知母数の有効推定

本節では、与えられた観測データ $D=\{y_t, x_t \mid t=1, 2, \cdots, T\}$ をもとに、動的同時方程式モデル(25)式の未知母数 μ, Σを推定する一方法を提示し、その統計的諸性質を明らかにしたい。本節の方法に従えば、前章同様反復計算が不必要となり、かつ有効推定量を得る事が可能となる。

そこで先ず初期値を定める必要があるが、ここでは、$y_0=y_{-1}=\cdots=y_{1-m}=0$, $x_0=x_{-1}=\cdots=x_{1-r}=0$, $z_0=z_{-1}=\cdots=z_{1-p}=0$, $u_0=u_{-1}=\cdots=u_{1-q}=0$ と定める事にする。

さて、前章と同様の議論に従えば、これらの初期値の下で、(25)式を次式(28)の様に表現する事が可能となる。

$$
(28)\quad \begin{aligned} ay &= bx+z \\ \phi z &= \theta u \end{aligned}
$$

但し、(28)式で

$$(29)\quad \begin{aligned} &a=\sum_{j=0}^{m}(A_j\otimes L^j),\qquad b=\sum_{h=0}^{r}(B_h\otimes L^h)\\ &x=\mathrm{Vec}(X),\qquad z=\mathrm{Vec}(Z)\\ &X'=(x_1,x_2,\cdots,x_T),\qquad Z'=(z_1,z_2,\cdots,z_T)\end{aligned}$$

であり、又、ϕ, θ, y, u についてはII(14)式の如く表わされるものとする。

仮定1に加えて、さらに u_t が正規分布に従う場合には、対数尤度関数 log L は、

$$(30)\quad \log L=-\frac{Tn}{2}\log 2\Pi-\frac{T}{2}\log|\Sigma| -\frac{1}{2}(y-a^{-1}bx)'S^{-1}(y-a^{-1}bx)$$

となる。但し、上式でSは、$S=a^{-1}\phi^{-1}\theta\Omega\theta'\phi^{-1\prime}a^{-1\prime}$ を意味し、又 Ω はII(17)式で与えられる。

ところで、対数尤度方程式 $\dfrac{\partial\log L}{\partial\mu}=0$ は母数 μ に関する非線型方程式となる。

そこで本節では、前章と類似した次の様な2段階推定法を提示したい。即ち、先ず(1)母数 μ, Σ の一致推定量を求め、次に(2)これを用いて一種の Newton-Raphson 関係式を使用する2段階推定法を提示し、この様にして得られる推定量 $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$ の統計的諸性質を明らかにする。

さて、先ず第1段階として、未知母数 μ, Σ の一致推定量を次の様にして求める。即ち、適当な操作変数を用いて μ_A, μ_B の一致推定量 $\tilde{\mu}_A$, $\tilde{\mu}_B$ を求め、これらをもとに、前章と同様にして μ_ϕ, μ_θ の一致推定量 $\tilde{\mu}_\phi$, $\tilde{\mu}_\theta$ を求める。Σ の一致推定量は、$\tilde{\Sigma}=\frac{1}{T}\tilde{U}'\tilde{U}$ より求めればよい。但し、$\tilde{u}=\mathrm{Vec}(\tilde{U})=\tilde{\theta}^{-1}\tilde{\phi}(\tilde{a}y-\tilde{b}x)$ である。

次に、第2段階として、この様にして得られた一致推定量 $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}_A',\tilde{\mu}_B',\tilde{\mu}_\phi',\tilde{\mu}_\theta')'$, $\tilde{\Sigma}$ をもとにして、次式(31)を満たす推定量 $\hat{\mu}$ を求める。

$$(31)\quad \tilde{M}_*'\tilde{\Pi}_*^{-1}\tilde{M}_*(\hat{\mu}-\tilde{\mu})=\tilde{M}_*'\tilde{\Pi}_*^{-1}\tilde{\phi}(\tilde{a}y-\tilde{b}x)$$

ここで $\tilde{\Pi}_*^{-1}$ は、

(32) $\tilde{\Pi}_*{}^{-1}=\tilde{\theta}'^{-1}\tilde{\Omega}^{-1}\tilde{\theta}^{-1}$

によって与えられ、又行列 M_* の具体的表現は Appendix 2 で与えられる。

さて、この様にして得られる推定量$\hat{\mu}$について、次の定理2を示す事が出来る。

定理 2

動的同時方程式モデル(25)式について、仮定1, 2, 3, 4の下で、(31)式から求められるμの推定量を$\hat{\mu}$とし、μ, Σの真値をμ^0, Σ^0 で表わす。このとき、(i)$\hat{\mu}$は μ^0 の一致推定量であり、(ii)$\sqrt{T}(\hat{\mu}-\mu^0)$ は多変量正規分布 $N(0, W^{-1})$ に法則収束する。但し、Wは、

(33) $W=\underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}\frac{1}{T}M_*'\Pi_*{}^{-1}M_*\Big|_{\mu^0,\ \Sigma^0}$

である。

上記定理の証明は、1変量の場合とほぼ同様にして行う事が出来る。(拙稿〔20〕)

なお上記定理2に於て、仮定4の識別可能性より、ベクトルμ及び行列 M_* の要素のうち、ゼロ制約に対応する部分はすべて0ないし0行列である。その為には、M_* については対応する行列 H_{IJ} を $H_{IJ}=0$ とすれば良いであろう。

ところで$\hat{\mu}$は、u_tに正規性を仮定して得られるμの最尤推定量と同一の漸近分布に従うから、前章同様に、上述の2段階推定法により得られる推定量$\hat{\mu}$は漸近的有効推定量になっている事がわかる。又、この様な2段階推定法に従えば、原則的に反復計算が不必要となる事にも再度注意したい。

なお、Σは、II(22)式と同様に推定すればよいであろう。但しここでは$\hat{U}$は、

(34) $\hat{u}=\mathrm{Vec}(\hat{U})=\hat{\theta}^{-1}\hat{\phi}(\hat{a}y-\hat{b}x)$

なる関係を満たしている。

Ⅳ　VAR 時系列モデルと因果関係

§1.　VAR 時系列モデルと因果関係

本章では、VARMA 時系列モデルの特別なモデルである VAR 時系列モデルをとりあげ、同モデルが、経済時系列分析の一つの重要な研究課題である因果関係の検証に直接適用可能である事を明らかにし、実際に 2 変量経済時系列データを用いて因果関係の検証を例示したい。

先ず、次の様な次数 p の VAR 時系列モデル(35)式を考える。

$$(35)\quad \phi(\mathcal{L})y_t = u_t$$

ここで、$\phi(\mathcal{L})$ はⅡ(5)式によって与えられ、さらに $\phi(\mathcal{L})$, u_t はⅡ章仮定 1, 2 を満たしているものとする。特に(35)式を成分表示すれば、次式(36)となる。

$$(36)\quad y_{ti} = -\phi_{ii}(\mathcal{L})y_{ti} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \phi_{ij}(\mathcal{L})y_{tj} + u_{ti} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,n \\ t=1,2,\cdots,T \end{array}$$

但し、

$$(37)\quad \phi_{ij}(\mathcal{L}) = \sum_{k=1}^{p} \phi_{ijk}\mathcal{L}^k \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

であり、ϕ_{ijk} は行列 ϕ_k の第 (i, j) 要素を示す。

ところで因果関係を広く用いられている様に、予測の 2 乗誤差をもとにして定義すれば（例えば Granger〔8〕参照)、(36)式左辺 y_{ti} の予測誤差を最小にする様に右辺の変数 y_{tj} ($j=1,2,\cdots,n$) を選択する事によって、変量間の因果関係を検証する事が出来る事になる。

その一方法として $\phi_{ij}(\mathcal{L})=0$ を検定する事も考えられようが、直接Ⅱ§4 で述べた AIC を用いて変数の選択を行う事により、因果関係の検証を行う事が可能である。

ところで、この様な方法とは別に、周波数領域で一種の因果関係を検証する事も考えられる。即ち、もし u_t の各成分が無相関ならば、y_t のスペクトラル密度行列の第 j 対角要素 $f_{jj}(\lambda)$ は、

$$(38)\quad f_{JJ}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}|\phi(e^{i\lambda})^{jk}|^2\sigma_k^2\overset{d}{=}\sum_{k=1}^{n}g_{jk}(\lambda)$$

となる。但し、$\phi(e^{i\lambda})^{jk}$ は $\phi(e^{i\lambda})^{-1}$ の第 (j, k) 要素を意味し、σ_k^2 は u_t の第 k 要素の分散を示すものとする。そこで、相対強度寄与率 $r_{jk}(\lambda)$ (relative power contribution. Akaike〔2〕) を、

$$(39)\quad r_{jk}(\lambda)=\frac{g_{jk}(\lambda)}{f_{JJ}(\lambda)}$$

と定義すれば、周波数 λ に於て、u_{tk} から y_{tj} への寄与率を求める事が出来、一種の因果関係を検証する事が可能となる。

そこで次節で、特に2変量経済時系列データに上述の方法を適用し、因果関係の検証を例示する事にしたい。

§2. 因果関係の検証

本節では、データとして Box and Jenkins による売上高 (w_{t1}) と景気先行指標 (w_{t2}) に関する標本数150のデータを扱う事にする。(Box and Jenkins〔4〕の時系列M参照)。同書には一つの推定結果が与えられているにすぎないが[5]、この様なデータは典型的な経済時系列の一例であり、前節で述べた方法を用いて、特に因果関係の検証を行いたい。

先ず、原データ $D^*=\{w_t=(w_{t1}, w_{t2})'|t=1, 2, \cdots, 150\}$ を図示すると図1の如くなる。

図1からも明らかな様に、原系列は非定常時系列である。この場合、II §1. で述べた階差演算子 $(I-\mathcal{L})$ を用いて原系列を $y_t=(I-\mathcal{L})w_t$ と変換する事により、定常な時系列 $D=\{y_t=(y_{t1}, y_{t2})'|t=1, 2, \cdots, 149\}$ を得る事が出来る。そこでこのデータDに、前節で述べた如く、2変量 VAR 時系列モデルをあてはめ、AIC を用いてその次数を決定し、未知母数を推定する事にする。

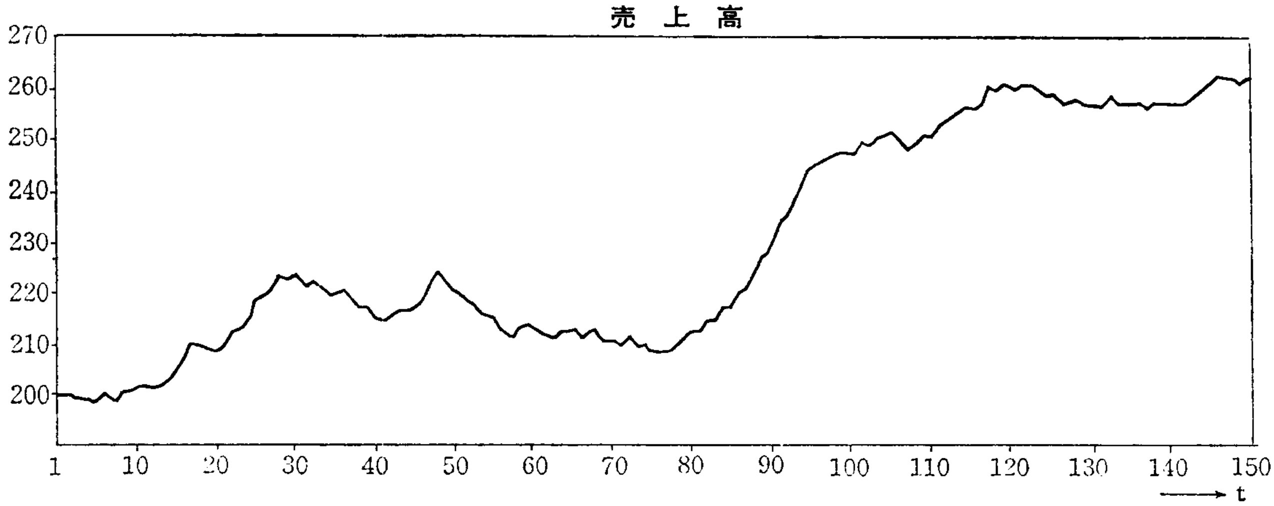
---

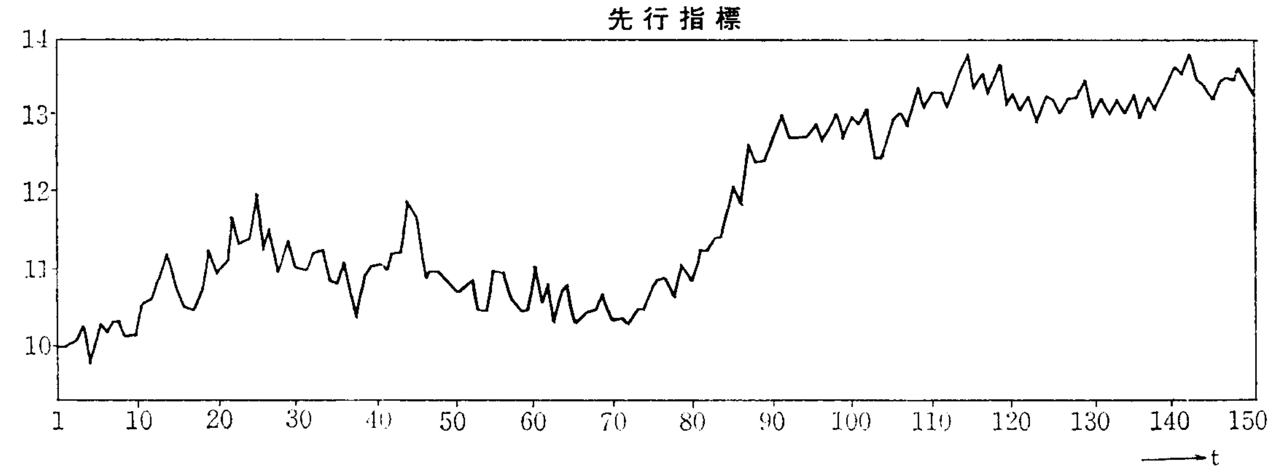
5) 彼等は次の様な結果を得ている。(y_{t1}, y_{t2} については後述する)。

$$y_{t1}=0.035+(1-0.72\mathcal{L})^{-1}4.82y_{t-3,2}+(1-0.54\mathcal{L})a_t,\qquad \hat{\sigma}_a^2=0.0484$$

$$y_{t2}=(1-0.32\mathcal{L})\alpha_t,\qquad \hat{\sigma}_\alpha^2=0.0676$$

図1　売上高と先行指標





その結果、(35)式について、次の様な推定値を得た。

$$
\begin{aligned}
&\hat{\phi}_1=\begin{pmatrix}-0.051 & -0.019\\ 0.024 & -0.517\end{pmatrix}, \quad \hat{\phi}_2=\begin{pmatrix}0.250 & 0.047\\ -0.018 & -0.192\end{pmatrix},\\
(40)\quad &\hat{\phi}_3=\begin{pmatrix}0.206 & 4.678\\ 0.010 & -0.073\end{pmatrix}, \quad \hat{\phi}_4=\begin{pmatrix}0.004 & 3.664\\ -0.009 & -0.032\end{pmatrix},\\
&\hat{\phi}_5=\begin{pmatrix}0.029 & 1.300\\ 0.011 & 0.021\end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma}=\begin{pmatrix}0.095 & -0.003\\ -0.003 & 0.076\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$p=5$, 最小 AIC$=-694.94$

上記の推定値より、y_{t1}（売上高の階差値）と y_{t2}（先行指標の階差値）に関して次の3点が明らかになる。先ず、(1) y_{t2} は3期間の遅れをもって、y_{t1} に3期間にわたり影響を及ぼし、その係数（4.678, 3.664, 1.300）はラグの

増加と共に減少する。逆に、（２）y_{t1} から y_{t2} への影響は殆んど見られず、y_{t2} はそれ自身のほぼ３期にわたるラグ値によって説明され、その係数（-0.517, -0.192, -0.073）の絶対値はラグの増加と共に減少する。又、（３）u_t の成分は殆んど無相関である。

ここでさらに、前節で述べた相対強度寄与率 $r_{JK}(\lambda)$ を図示すれば図２の如くなる。但し図２は$\frac{\lambda}{2\pi}$に関するものである。

図２　相対強度寄与率

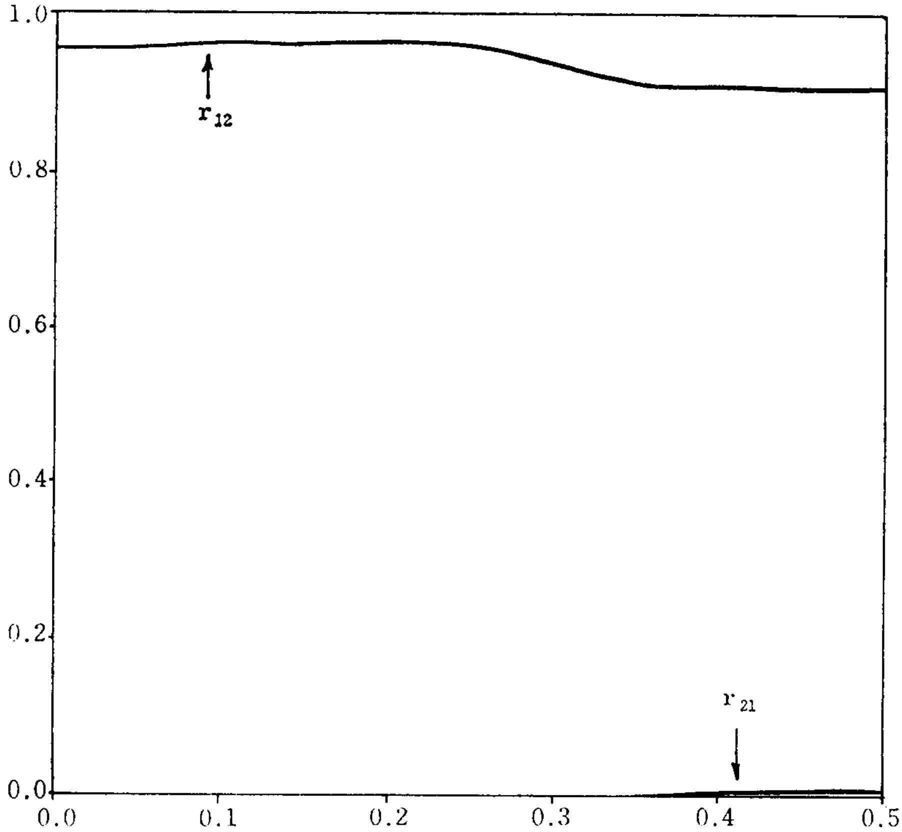


図２からも明らかになる様に、y_{t1} の変動は y_{t2} に強く依存しており、逆に、y_{t2} の変動は y_{t1} の影響を殆んど受けていない事が理解されよう。

従って以上の諸性質より、先行指標から売上高への極めて強い因果関係があるものと推論出来るであろう。

なお、より精度の高い分析を行うためには、II § 4 で述べた如く方程式毎にラグの次数が異なるモデルを構築すべきであるが、(40)式で与えられるモデルと、Box and Jenkins によるモデルとの（内挿）予測値を直接比較しても大

きな相異は見い出せない。

この様な事から、本例で見る限り、上述の方法は単純なモデルを用いているにも拘わらず妥当なものである様に思われる。

上述の方法の経済時系列への適用例は未だ極めて少なく、今後さらに多変量時系列への適用を通し検討を加える必要があろうが、本節で経済時系列への一つの適用例を提示し得たとするならば、当初の目的は一応達せられたものと言えよう。

V　結　語

本稿は、筆者がこれまで拙稿〔14〜19〕に於て扱った1変量時系列モデルについて、これらのモデルの多変量モデルへの一般化を計り、多変量時系列モデルの構築とその統計的解析に関する一つの方法を明らかにする事を意図したものである。

即ち、VARMA 及び季節的 VARMA 時系列モデル、並びに、撹乱項が VARMA 時系列に従う様な動的同時方程式モデルを構築し、これら多変量モデルの基本的諸性質を整理すると共に、未知母数に関する一有効推定法を提示し、その統計的諸性質を明らかにした。さらに VAR 時系列モデルが、経済時系列の因果関係の検証に有用である事を指摘し、実際の経済時系列データを用いて因果関係の検証を例示した。

本稿で述べた如く、これらのモデルは経済時系列の分析に極めて有用であると思われ、今後本稿の諸モデルを基に、引き続き統計的解析を行う所存である。

なお、本稿で明らかにした方法以外にも幾つかの未知母数推定方法が考えられ、これらの方法については稿を改めて論ずる事にしたい。又、本稿で述べた情報量基準に基づく次数決定法の、経済時系列への適用は未だ極めて少ない様に思われる。筆者は同方法を幾つかの経済時系列に適用し、比較的妥当な結果を得ているが、これらの結果を含め、次数決定に関してはさらに別の機会に明らかにする事にしたい。　（筆者は関西学院大学商学部助教授・外地留学中）

Appendix 1.

II(19), (21)式の行列Mは、次式(1)によって与えられる。

(1) $M = (-M_{\phi}, M_{\theta})$

但し、ここで、

(2)
$$M_{\phi} = ((I_n \otimes L^1 Y)H, \cdots, (I_n \otimes L^p Y)H)$$
$$M_{\theta} = ((I_n \otimes L^1 U)H, \cdots, (I_n \otimes L^q U)H)$$

であり、Uは、

(3) $u = \mathrm{Vec}(U) = \theta^{-1}\phi y$

である。又 H_{ij} を、第 (i, j) 要素が1, その他が0の (n×n) 次の行列とするとき、Hは、H_{ij} を第 (j, i) 要素として持つ ($n^2 \times n^2$) 次の行列を示す。

Appendix 2.

III(31), (33)式の行列 M_* は、次式(4)によって与えられる。

(4) $M_* = (-M_{*a}, M_{*b}, -M_{*\phi}, M_{*\theta})$

但し、ここで、

(5)
$$M_{*a} = (\phi(I_n \otimes L^1 Y)H, \cdots, \phi(I_n \otimes L^m Y)H)$$
$$M_{*b} = (\phi(I_n \otimes L^0 X)H, \cdots, \phi(I_n \otimes L^r X)H)$$
$$M_{*\phi} = ((I_n \otimes L^1 Z)H, \cdots, (I_n \otimes L^p Z)H)$$
$$M_{*\theta} = ((I_n \otimes L^1 U)H, \cdots, (I_n \otimes L^q U)H)$$

であり、Z, Uはそれぞれ、

(6)
$$Z = \sum_{j=0}^{m} L^j Y A_j' - \sum_{h=0}^{r} L^h X B_h'$$
$$u = \mathrm{Vec}(U) = \theta^{-1}\phi(ay - bx)$$

を意味するものとし、Hは Appendix 1 で与えられる行列である。

＜参考文献＞

〔1〕 Akaike, H., "A New Look at the Statistical Model Identification", IEEE. Trans., AC-19 (1974), 716—723.

〔2〕 Akaike, H., "On the Identification of State Space Models and Their Use in Control", 1978.

〔3〕 Anderson, T. W., "Maximum Likelihood Estimation of Parameters of an Autoregressive Process with Moving Average Residuals and Other Covariance Matrices with Linear Structure", Technical Report No. 15, Stanford University, 1973.

〔4〕 Box, G. E. P. and G. M. Jenkins, Time Series Analysis : Forecasting and Control, San Francisco, Holden-Day, 1970.

〔5〕 Dhrymes, P. J. and H. Erlat, "Asymptotic Properties of Full Information Estimation in Dynamic Autoregressive Simultaneous Equation Model", J. of Econometrics, 2 (1974), 247—259.

〔6〕 Dunsmuir, W. and E. J. Hannan, "Vector Linear Time Series Models", Adv. in Applied Prob., 8 (1976), 339—364.

〔7〕 Eicker, F., "Über den Zentralen Grenzwertsatz für abhängige Zufallsvariable", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 3 (1964), 193—203.

〔8〕 Granger, C. W. J., "Investing Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods", Econometrica, 37 (1969), 423—438.

〔9〕 Hannan, E. J., "The Estimation of Mixed Moving Average Autoregressive Systems", Biometrika, 56(1969), 577—593.

〔10〕 Hannan, E. J., "The Identification Problem for Multiple Systems with Moving Average Errors", Econometrica, 39(1971), 751—765.

〔11〕 Hatanaka, M., "Several Efficient Two-Step Estimators for the Dynamic Simultaneous Equations Model with Autoregressive Disturbances", J. of Econometrics, 4 (1976), 189—204.

〔12〕 Nicholls, D. F., "The Efficient Estimation of Vector Linear Time Series Models", Biometrika, 63 (1976), 381—390.

〔13〕 Rao, C. R., Linear Statistical Inference and Its Applications, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1965.

〔14〕 杉原左右一,「自己回帰一集積移動平均型時系列について」、日本規格協会「時系列の数値検証」、1972。

〔15〕 杉原左右一,「時系列の数値検証一実施例」、日本規格協会、1972。

〔16〕 杉原左右一,「動的線型モデルの統計的解析」、商学論究、第21巻第3・4号、1973、

75—90。
〔17〕 杉原左右一,「動的線型モデルについて」、商学論究、第22巻第1・2号、1974、105—120。
〔18〕 Sugihara, S., "Statistical Estimation of the Dynamic Linear Equation Model with Autoregressive-Moving Average Errors", Kwansei Gakuin University Annual Studies, XXIII (1974), 81—88.
〔19〕 杉原左右一,「経済時系列の構造変化に関する一考察」、商学論究、第25巻第4号、1978、59—73。
〔20〕 杉原左右一,「経済時系列の統計的解析」、1978。