動的線型モデルについて

杉　原　左　右　一

I　序

所謂計量経済学的なモデル分析に於て、研究対象としている経済システムの、相互連関的かつ動的な変動を的確に把握し、その将来の行動を予測、統御する事は極めて重要な問題である。この問題に対しては、当期内生変数、当期及びラグ付き外生変数と共に、ラグ付き内生変数を含み、かつ(確率的)攪乱項を考慮した所謂動的線型モデルが1つの有力なモデルを提供しており、現在企業行動、産業行動ならびにマクロ経済行動に関する実証的研究に有効に適用されている事は周知の通りである。本稿はこの様な動的線型モデルに関し、特に単一方程式モデルについて、次の様な統計的解析を行うものである。即ち、先ず始めにII節に於て、従来から実証的研究にしばしば使用されている分布ラグモデルについて、各種の構造とその経済問題への適用について概観し、あわせて動的線型モデルとの関連性について述べる。III節では、次の様な意味に於て従来の動的線型モデルよりも一般的なモデルを設定し、その母数推定問題を扱う。即ち、(1)外生変数が傾向変動（トレンド）を伴う場合を陽表的に考慮し、かつ(2)攪乱項が自己回帰・移動平均過程に従う様な動的線型モデルについて、このモデルの母数推定量に関する統計的性質を明らかにする。IV節では、III節で扱った動的線型モデルの適合度検定に必要となる残差自己相関係数について、その漸近分布を求める。最後にV節に於て、動的線型モデルに於ける内生変数の最小平均2乗誤差予測について述べる。

なお筆者は先に、上述した動的線型モデルの母数の統計的推定とモデルの動的特性に関して若干の考察を行った。これらの点については拙稿[1]を参照されたい。本稿で扱った動的線型モデルに基づく実証的分析についてはさらに別の機会に明らかにする予定である。

II　分布ラグモデル

Koyck, L. M.,[2] Nerlove, M.[3] 等が投資行動、消費行動等の研究を通して、経済行動に関する時間的ラグの影響を幾何級数型分布ラグモデルとして明示的に定式化して以来、各種の分布ラグモデルが、消費行動、生産行動等に関する時間的ラグモデルや、価格、ストック等の予想・調整モデルとして実証的研究に盛んに使用される様になった。この様な意味から先ず最初に本節で、分布ラグモデルの各種の構造について概観し、同時に、本稿で扱う動的線型モデルとの関連性を明らかにする事は有意味であろう。なお分布ラグモデルに関する包括的 survey として、Griliches, Z.,[4] Nerlove, M.[5] 等が参考になろう。

§1. 一般的分布ラグモデル

先ず以後の便宜のために、時間を k 期間（k は非負の整数）後方に後退させるラグ演算子 B^k を導入する。即ち Z_t を時間 t に依存する変数とすれば、$B^kZ_t=Z_{t-k}$ である。$B^0=I$ と示す。

さて、母数を ψ_i とするラグ構造 $\psi(B)=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_iB^i$（但し $\psi_0=1$）を使用して、当期内生変数 y_t が、当期及びそれ以前の無限の外生変数 $x_t,\ x_{t-1},\ x_{t-2},\cdots$ と、平均０，分散 $\sigma^2(<\infty)$ を持ち x_t と独立に分布する攪乱項 u_t とによって、(1)式の如く説明されるモデルを一般的分布ラグモデルと呼ぶ事にする。ここで攪

---

1) 拙稿：「動的線型モデルの統計的解析」、商学論究、第21巻第３・４号、1973、75―90。
2) Koyck, L. M. : Distributed Lags and Investment Analysis, North-Holland Publishing Co., 1954.
3) Nerlove, M. : Distributed Lags and Demand Analysis for Agricultural and Other Commodities, US Department of Agriculture, Agriculture Handbook No. 141, 1958.
4) Griliches, Z. : "Distributed Lags : A Survey," Econometrica, 1967, 35, 16―49.
5) Nerlove, M. : "Lags in Economic Behavior," Econometrica, 1972, 40, 221―251.

乱項 u_t は必ずしも互いに独立である必要はなく、系列相関を持っていても良い。

$$(1)\qquad y_t = \Psi(B)x_t + u_t = \sum_{i=0}^{\infty}\psi_i x_{t-i} + u_t \qquad (\psi_0=1) \qquad t=1,2,\cdots,T$$

但しモデルの安定性の条件として $\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i<\infty$ を仮定する。

§2. 有限分布ラグモデル

ところで一般的分布ラグモデルは、理念的には思考可能であるとしても、有限個のデーターをもとにして無限個の母数 $\psi_i(i=0,1,2,\cdots)$ を統計的に推定する事は明らかに不可能である。そこで一般的分布ラグモデルの一つの近似として、適当な整数 k に対して、$(k+1)$ 期以前の外生変数列 $x_{t-k-1},\ x_{t-k-2},\cdots$ の、当期内生変数 y_t に及ぼす影響が無視出来るものとして、一般的分布ラグモデル(1)式に於けるラグ構造 $\psi(B)$ を $\psi'(B)=\sum_{i=0}^{k}\psi_i'B^i$ (但し $\psi_0'=1$) とした次の様な有限分布ラグモデルが考えられる。

$$(2)\qquad y_t = \Psi'(B)x_t + u_t = \sum_{i=0}^{k}\psi_i' x_{t-i} + u_t \qquad (\psi_0'=1) \qquad t=1,2,\cdots,T$$

この様にすれば、原則的には有限個の母数 ψ_i' $(i=0,1,2,\cdots,k)$ を推定する事が可能となるが、一般に外生変数の観測値系列には多重共線関係が生ずるため、ラグの最大値 k を大きくとれば、母数の推定値が不安定になる事を免れないであろう。なお実証的研究に於て、有限分布ラグモデルに於ける母数 $\psi_i'(i=0,1,2,\cdots,k)$ を、i に関する低次の多項式で近似した所謂アーモン・ラグモデル[6)]が使用される事も多い。

§3. 幾何級数型分布ラグモデル

一般的分布ラグモデルに於ける困難を回避すると共に、経済問題への実際的適用を通して幾つかのモデルが開発されているが、Koyck, L. M.[7)] による幾何級数型分布ラグモデルはその中でも最も古典的なものと言えるであろう。

Koyck は投資関数に関する研究を通して、一般的分布ラグモデル(1)式に於

6) Almon, S. : "The Distributed Lag between Capital Appropriations and Expenditures," Econometrica, 1965, 30, 178—196.
7) Koyck, L. M. : op. cit.

ける母数 ψ_i が、時間が過去に遡るにつれて幾何級数的に減少するモデルとして、特に $\psi(B)=\dfrac{\alpha I}{I-\psi B}=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\psi^i B^i\ (0<\psi<1)$ なる幾何級数型ラグ構造を使用し、次の様な幾何級数型分布ラグモデルを想定した。

$$(3)\qquad y_t=\frac{\alpha I}{I-\psi B}x_t+u_t=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\psi^i x_{t-i}+u_t \qquad t=1,2,\cdots,T$$

幾何級数型分布ラグモデル(3)式は、形式的に、次の(4),(5)式なるモデルと同等である。

$$(4)\qquad y_t=\psi y_{t-1}+\alpha x_t+e_t \qquad t=1,2,\cdots,T$$

$$(5)\qquad e_t=u_t-\psi u_{t-1}$$

幾何級数型分布ラグモデル(3)式は、一般的分布ラグモデル(1)式のラグ構造 $\psi(B)$ を単純化したものであるが、これと形式的に同等な(4),(5)式は、所謂“部分的調整モデル”及び“適応的予想モデル”、ないし両者の混合モデルとして実証的研究にしばしば使用されている。

例えばその1例として、在庫投資関数の計測に関する次の様なモデルが考えられる。即ち、資材の入手、生産等に必要となる時間的ラグの他にも、生産の平滑化や、一時的な需要変動から生ずる危険の回避のために、意図した在庫投資が、望ましい在庫量と前期末在庫量との差の一定割合として部分的に調整される所謂ストック調整モデルを考えてみる。ここで Metzler, L. に従って、望ましい在庫量が予想売上高に比例するものと仮定し、今期予想売上高が前期予想売上高と前期実現売上高の一次指数平滑によって与えられるものとすれば、この様な売上高予想形成に基づくストック調整モデルを(4),(5)式のかたちで表現出来る事を示す事が出来る[8)]。

§4. 有理型分布ラグモデル

ところで幾何級数型分布ラグモデルは、簡単であるとは言え、そのラグ構造からも明らかな様にやや制約的なモデルと言わねばならない。実際その拡張と

---

8) このモデルに関連する実証的研究として、例えば下記文献がある。
木下宗七、川口融:「鉄鋼業のエコノメトリック・モデル」、「日本産業の計量分析」(通産省産業予測研究会編;渡部経彦、辻村江太郎監修)、日本経済新聞社、1969、27—93。

して、例えばある一定期間以前の過去の外生変数の影響を幾何級数型ラグ構造によって表現するモデルや、負2項分布に従うラグ構造等が考えられている。

これらのモデルよりもより一般的なモデルとして、有理型分布ラグモデルを挙げる事が出来る。即ち、ここで、

$$(6)\qquad \Omega(B) = 1-\sum_{i=1}^{m}\omega_i B^i, \qquad \Gamma(B)=\sum_{i=0}^{n}\gamma_i B^i$$

とし、$\Omega(z)=0$ の根が単位円外にあると仮定する。このとき有理型ラグ構造 $\frac{\Gamma(B)}{\Omega(B)}$ を持つ分布ラグモデル

$$(7)\qquad y_t = \frac{\Gamma(B)}{\Omega(B)}x_t+u_t \qquad t=1,2,\cdots,T$$

を有理型分布ラグモデルと呼ぶ。

有理型ラグ構造 $\frac{\Gamma(B)}{\Omega(B)}$ は、一般的分布ラグモデルのラグ構造 $\psi(B)$ を任意の精度で近似する事が出来る。但し母数推定に際して、$\Omega(B)$ 及び $\Gamma(B)$ の次数 m, n は“母数節約の原理”の立場から出来る限り少ない事が望まれるであろう。

有理型分布ラグモデルで特に $\Gamma(B)=\alpha I$, $\Omega(B)=I-\phi B$ とすれば前述した幾何級数型分布ラグモデルとなり、又 $\Omega(B)=I$ とすれば有限分布ラグモデルとなる。

さて、有理型分布ラグモデル(7)式は次の様なモデルとしても表現出来る。

$$(8)\qquad \Omega(B)y_t = \Gamma(B)x_t + e_t \qquad t=1,2,\cdots,T$$

$$(9)\qquad e_t = \Omega(B)u_t$$

即ち有理型分布ラグモデルは、u_t が I.I.D.$(0,\sigma^2)$ であるものとして、形式的には、ラグ構造 $\Gamma(B)$ に従う当期及びラグ付き外生変数 x_t, $x_{t-1},\cdots,x_{t-n}$ と、ラグ構造 $\sum_{i=1}^{m}\omega_i B^i$ に従うラグ付き内生変数 y_{t-1}, y_{t-2}, $\cdots$, y_{t-m} を入力とし、これにラグ構造 $\Omega(B)$ を持つ m 次の移動平均過程に従う撹乱項 e_t が作用し、出力を当期内生変数 y_t とする様な動的線型モデルとみなす事が出来る。但し内生変数と撹乱項に関するラグ構造（$\Omega(B)$）が両者に共通である事に注意するならば、やや特殊な動的線型モデルと言わねばならないであろう。

ところで、(8)式の母数の最小2乗推定量は、(8)式がラグ付き内生変数を含んでおり、かつ u_t が I.I.D. $(0, \sigma^2)$ であったとしても、変換された攪乱項 e_t が(9)式からも明らかな様に系列相関を持つために、不偏性はもとより、一致性すら失う事になる。この問題を解消すべく既に幾つかの推定方法が考案され、その統計的性質が明らかにされている。ここではこれらの推定方法にはふれないが、この種の問題を含め、各種分布ラグモデルの母数の統計的推定に関しては Dhrymes, P. J.[9] が参考になろう。

III 動的線型モデルと母数の統計的推定

以下先ず §1. で本節で扱うモデルとその仮定を明らかにし、§2. でこのモデルの持つ意味について述べる。次に §3. で母数推定量の漸近正規性とその性質を明らかにする。

§1. モデルと仮定

t 期に於ける、内生変数、s 種類の外生変数、及び攪乱項をそれぞれ y_t, $x_{t,r}$ $(r=1,2,\cdots,s)$, e_t で表わし、次の様な動的単一線型方程式モデル(1), (2)式を設定する。

$$(1) \quad \lambda(B)y_t = \sum_{r=1}^{s}\alpha_r x_{t,r} + e_t$$

$$(2) \quad \phi(B)e_t = \theta(B)u_t \qquad u_t \sim \text{I. I. D.}\,(0, \sigma^2) \qquad t=1,2,\cdots,T$$

ここで $\lambda(B)$, $\phi(B)$, $\theta(B)$ は母数を、

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p) \qquad \theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q)$$

とする次の様なラグ構造を示す。

$$(3) \quad \lambda(B) = 1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i B^i$$

$$(4) \quad \phi(B) = 1-\sum_{i=1}^{p}\phi_i B^i \qquad (5) \quad \theta(B) = 1-\sum_{i=1}^{q}\theta_i B^i$$

9) Dhrymes, P. J. : Distributed Lags, Problems of Estimation and Formulation, Holden-Day Inc., 1971.

又、$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ とし、以後の便宜のために

$$\mu' = (\lambda, \alpha, \phi, \theta) \qquad \nu' = (\mu', \sigma^2)$$

と表わす。

このモデルに次の仮定1，２，３を設定する。

仮定　1

$\lambda(\omega)=0$, $\phi(\omega)=0$, $\theta(\omega)=0$ の根は単位円外にある。

仮定　2

$d^2_{Tr} = \sum_{t=1}^{T} x^2_{t,r}$ $(r=1, 2, \cdots, s)$ と表わし、次の(i)〜(v)を仮定する。

(i) $\lim_{T\to\infty} \dfrac{T}{d^2_{Tr}} < \infty \qquad r=1, 2, \cdots, s$

(ii) $\lim_{T\to\infty} T \dfrac{\max_{1\leqq t\leqq T} x^2_{t,r}}{d^2_{Tr}} < \infty \qquad r=1, 2, \cdots, s$

(iii) $\lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{d_{Ti}d_{Tj}} \sum_{t=\tau+1}^{T} x_{t,i}x_{t-\tau,j} = \rho_{i,j}(\tau) < \infty \qquad \tau=0, 1, 2, \cdots \quad i, j=1, 2, \cdots, s$

$\rho_{i,j}(\tau)$ を (i, j) 成分とする s 次の正方行列を $R(\tau)=[\rho_{i,j}(\tau)]$ で示す。

(iv) $R(0)$ は非特異行列である。

(v) $\lim_{T\to\infty} \dfrac{d^2_{Tr}}{d^2_{Ts}} < \infty \qquad r=1, 2, \cdots, s-1$

仮定　3

u_t は互いに独立に、同一分布に従い、$E[u_t]=0$, $E[u_t^2]=\sigma^2$ とし、有限な $(4+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ の絶対モーメントが存在する。

§2. モデルの意味

上記した動的線型モデルは次の様なモデルを表わしている。

先ず内生変数については、当期内生変数 y_t の他に、m 期以前までのラグ付き内生変数 y_{t-1}, $y_{t-2}, \cdots, y_{t-m}$ を考慮し、そのラグ構造を $\lambda(B)$ とする。

外生変数については、s 種類の外生変数 $x_{t,1}, x_{t,2}, \cdots, x_{t,s}$ を考慮する。s 種類の外生変数の中に幾つかのラグ付き外生変数が含まれていても以下の議論は本質的にはそのまま成立する。

最後に攪乱項 e_t については、それが(2)式で示される様な次数 (p, q) の自己

回帰・移動平均過程で表現されるものとする。“母数節約の原理”の立場から、次数 p, q は出来る限り低次である事が望ましいが、経済時系列に於てはこれらの次数は高々2ないし3である事が多く、又この程度の次数で十分振り幅の広いモデルを表現する事が可能である。なお本稿では次数 m, s, p, q は既知であるものと前提する。

さて次に仮定の意味について述べよう。先ず仮定1は、過程の定常性及び反転可能性を保証するものである。次に外生変数に傾向変動（トレンド）を伴う場合をも考慮し、仮定2を設定する。ところで外生変数に傾向変動(トレンド)を伴う場合として、通常次の仮定2′(Grenander 条件）が設定される事が多い。

仮定 2′ (Grenander 条件)

（i） $\lim_{T\to\infty} d_{Tr}^2 = \infty \qquad r=1,2,\cdots,s$

（ii） $\lim_{T\to\infty} \dfrac{\max_{1\leq t\leq T} x_{t,r}^2}{d_{Tr}^2} = 0 \qquad r=1,2,\cdots,s$

(iii) 仮定2の(iii)

(iv) 仮定2の(iv)

仮定2(i), (ii) は、仮定2′(i), (ii) を満たすが、これよりはやや制約的な仮定であり、特に母数 ν の推定量の漸近正規性を示す際に必要となる。

仮定2(i), (ii) を満たす外生変数の例としては、例えば時間 t の多項式、3角関数及びその一次結合等を挙げる事が出来よう。

又仮定2(v) は、$d_{Tr}^2 (r=1,2,\cdots,s)$ の order に関する仮定であり、$d_{Tr} (r=1,2,\cdots,s-1)$ は $d_{Tr}=O(d_{Ts})$ 又は $d_{Tr}=o(d_{Ts})$ であるとする。

仮定2は、傾向変動（トレンド）や季節変動を含む経済時系列の統計的解析に支障なく適用し得るであろう。

最後に仮定3は攪乱項に関するものであり、ここでは u_t に関して正規性の仮定を必要としない。なお $(4+\varepsilon)$ 次 $(\varepsilon>0)$ の絶対モーメントの存在に関する仮定は、母数 ν の推定量の漸近正規性を示す際に必要となる。

§3. 母数推定量の漸近正規性とその性質

G_T を $(m+s+p+q+1)$ 次の次の様な対角行列

(6)　$G_T = \mathrm{diag}(\overbrace{d_{Ts},\cdots,d_{Ts}}^{m},\ \overbrace{d_{T1},d_{T2},\cdots,d_{Ts}}^{s},\ \overbrace{\sqrt{T},\cdots,\sqrt{T}}^{p},\ \overbrace{\sqrt{T},\cdots,\sqrt{T}}^{q},\sqrt{T})$

とし、真の母数をν_0で表わす。$\hat{\mu}$をμ_0の最小2乗推定量、$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{T}\sum u_t^2(\hat{\mu})$とし、$\hat{\nu}'=(\hat{\mu}',\hat{\sigma}^2)$とすれば、推定量$\hat{\nu}$に関して次の定理が成立する。

定　理

ν_0の推定量を$\hat{\nu}$とする。

仮定1，2，3の下で、$G_T(\hat{\nu}-\nu_0)$は平均0ベクトル、共分散行列$\Sigma=\Omega^{-1}\Omega^*\Omega^{-1}$の多変量正規分布に法則収束する。即ち、

(7)　$G_T(\hat{\nu}-\nu_0) \longrightarrow N(0,\Sigma) \qquad \text{in } d$

が成立する。

ここでΩ^*は、(8)式に示される$(m+s+p+q+1)$次の正方行列であり、その各成分はAppendix (1)〜(19)式により与えられる。又Ωは、Ω^*でF，Gを0ベクトルとし、ωを$\omega'=\frac{1}{2\sigma^2}$とした行列である。

(8)　$$\Omega^* = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} A & C & D & E & F \\ C' & B & 0 & 0 & G \\ D' & 0 & P & R & 0 \\ E' & 0 & R' & Q & 0 \\ F' & G' & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

本定理の証明は、(8)式の各成分の具体的な表示と共にAppendixで与える事にする。

なお本定理より特に以下の諸性質が明らかになる。

即ち先ず$d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}+\gamma})(\gamma>0)$であれば、$\Omega^*$，$\Omega$に於ける$A^{(2)}$, D, Eは0行列となる。又u_tの歪度、尖度をそれぞれ$\kappa_1=\frac{1}{\sigma^3}E[u_t^3]$, $\kappa_2=\frac{1}{\sigma^4}E[u_t^4]-3$で示せば、$\kappa_1=\kappa_2=0$であれば（従って$u_t$がN.I.D.$(0,\sigma^2)$の場合を含む)、$F$，$G$は0ベクトルとなり、$\omega=\omega'=\frac{1}{2\sigma^2}$となる。従って$\kappa_1=\kappa_2=0$であれば（従って$u_t$がN.I.D.$(0,\sigma^2)$の場合を含む）$\Sigma=\Omega^{-1}$となり、さらに$d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}+\gamma})(\gamma>0)$であれば、$\Sigma$は$(\hat{\lambda},\hat{\alpha})$，$(\hat{\phi},\hat{\theta})$, $\hat{\sigma}^2$に関する3つのブロックに完全に分離する事がわかる。

その他本定理に関する統計的諸性質については拙稿[10] を参照されたい。

IV 残差自己相関係数の漸近分布

動的線型モデル III.(1), (2) 式の適合度検定のために、残差自己相関係数がしばしば利用されるが、本節ではそのために必要となる残差自己相関係数の漸近分布を求める。

以下動的線型モデル III.(1), (2) 式に於ける u_t が N.I.D. $(0, \sigma_u^2)$ であるものと仮定し、先ず

$$(1)\qquad \xi(B)u_t = w_t \qquad\qquad w_t \sim \mathrm{N.I.D.}(0, \sigma^2)$$

$$(2)\qquad \xi(B) = 1-\sum_{i=1}^{l}\xi_i B^i \qquad\qquad (\,l\ :\text{固定}\,)$$

について、帰無仮説 H_0

$$H_0:\quad \xi' = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l) = 0$$

の統計的仮説検定を考える。但し帰無仮説 H_0 の下で $\sigma_u^2=\sigma^2$ である[11]。
先ず(1)式を考慮に入れた時の対数尤度関数 L は、y_t, $x_{t,r}(r=1, 2, \cdots, s)$, u_t の適当な初期値の下に、

$$(3)\qquad L = \text{const.}-\frac{1}{2}T\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum w_t^2$$

となる。

$n=m+s+p+q+1$ とし、III.(6)式で与えられる n 次の対角行列を G_T、ならびに l 次の対角行列 G_T^{**}、及び $(l+n)$ 次の対角行列 G_T^* をそれぞれ

$$(4)\qquad G_T^{**} = \mathrm{diag}(\overbrace{\sqrt{T}, \cdots, \sqrt{T}}^{l}) \qquad (5)\qquad G_T^* = \mathrm{diag}(G_T^{**}, G_T)$$

と表わし、

10) 拙稿：前掲論文
11) Durbin, J. : "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression when some of the Regressors are Lagged Dependent Variables," Econometrica, 1970, 38, 410—421.

$$(6)\qquad I = \underset{T\to\infty}{P\lim}\, G_T^{*-1}\begin{bmatrix} A & C \\ C' & B\end{bmatrix} G_T^{*-1} = \begin{array}{cc|l} \overbrace{\quad}^{l} & \overbrace{\quad}^{n} & \\ I_{11} & I_{12} & \}\, l \\ I_{21} & I_{22} & \}\, n \end{array}$$

$$(7)\qquad A = \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right]_{l\times l},\quad B = \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial\nu_i\partial\nu_j}\right]_{n\times n},\quad C = \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial\xi_i\partial\nu_j}\right]_{l\times n}$$

とする。ここで(7)式はすべて真値 $\xi=0$, $\nu=\nu_0$ で評価したものである。

このとき、Durbin と同様にすれば、帰無仮説 H_0 の下で、ξ の最尤推定量 $\hat{\xi}$ に関して漸近的に(8)式

$$(8)\qquad \sqrt{T}\,\hat{\xi} \longrightarrow N(0, [I_{11}(I_{11}-I_{12}I_{22}^{-1}I'_{12})^{-1}I_{11}]^{-1}) \qquad \text{in } d$$

が成立する事を導く事が出来る。

動的線型モデル Ⅲ.(1), (2) 式について、I_{11}, $I_{12}(=I'_{21})$, I_{22} は具体的に(9)〜(11)式で与えられる。

$$(9)\qquad I_{11} = I_l$$

$$(10)\qquad I_{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m & s & p & q \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} W & O & U & V & 0 \end{array}\right] \end{array} \}\, l$$

$$(11)\qquad I_{22} = \Omega$$

ここで I_l は l 次の単位行列を示し、Ω はⅢ. §3. で与えられる n 次の正方行列である。又 I_{12} に於ける $W=[w_{i,j}]_{l\times m}$, $U=[u_{i,j}]_{l\times p}$, $V=[v_{i,j}]_{l\times q}$ の各成分はそれぞれ(12)〜(14)式によって与えられる。

$$(12)\qquad w_{i,j} = \underset{T\to\infty}{P\lim} - \frac{1}{\sqrt{T}\,d_{Ts}}\frac{\partial^2 L}{\partial\xi_i\partial\lambda_j} = \begin{cases} 0 & i<j \\ \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{\sqrt{T}}{d_{Ts}}\lambda_{i-j} & i>j \\ \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{\sqrt{T}}{d_{Ts}} & i=j \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,l \\ j=1,2,\cdots,m \end{array}$$

$$(13)\qquad u_{i,j} = \underset{T\to\infty}{P\lim} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 L}{\partial\xi_i\partial\phi_j} = \begin{cases} 0 & i<j \\ \phi_{i-j} & i>j \\ 1 & i=j \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,l \\ j=1,2,\cdots,p \end{array}$$

$$(14)\qquad v_{i,j} = \underset{T\to\infty}{P\lim} - \frac{1}{T}\frac{\partial^2 L}{\partial\xi_i\partial\theta_j} = \begin{cases} 0 & i<j \\ -\theta_{i-j} & i>j \\ -1 & i=j \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,l \\ j=1,2,\cdots,q \end{array}$$

但し(12)～(14)式に於ける $\bar{\lambda}$, $\bar{\phi}$, $\bar{\theta}$ は、それぞれ次式によって定められる。

(15) $$\frac{I}{\lambda(B)} = \sum_{i=0}^{\infty}\bar{\lambda}_i B^i \ , \quad \frac{I}{\phi(B)} = \sum_{i=0}^{\infty}\bar{\phi}_i B^i \ , \quad \frac{I}{\theta(B)} = \sum_{i=0}^{\infty}\bar{\theta}_i B^i$$

さらに、

(16) $$\underset{T\to\infty}{P\lim} - \frac{1}{\sqrt{T}d_{Tj}} \frac{\partial^2 L}{\partial\xi_i\partial\alpha_j} = 0 \qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,l \\ j=1,2,\cdots,s \end{matrix}$$

(17) $$\underset{T\to\infty}{P\lim} - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 L}{\partial\xi_i\partial\sigma^2} = 0 \qquad i=1,2,\cdots,l$$

が成立する。

ところで残差 $\hat{u}_t$ の自己相関係数ベクトル $\hat{r}$

(18) $$\hat{r}' = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \cdots, \hat{r}_l)$$ (19) $$\hat{r}_k = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-k}}{\sum \hat{u}_t^2} \qquad k=1,2,\cdots,l$$

は、帰無仮説 H_0 の下で、$\hat{\xi}$ と同一の漸近分布に従う事から、(8)式は残差の自己相関係数についても同様に成立する事がわかる。

特に $d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}+\gamma})(\gamma>0)$ であれば、W、及び Ω に於ける行列 $A^{(2)}$, D, E は 0 行列となる事から、(8)式右辺の漸近的共分散行列は

(20) $$I_l - [U \ \ V] \left[\begin{array}{c:c} P & R \\ \hdashline R' & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U' \\ \hdashline V' \end{array}\right]$$

となる。即ち、$d_{Ts}=O(T^{\frac{1}{2}+\gamma})(\gamma>0)$ であれば、動的線型モデルⅢ.(1), (2)式に於て、母数 λ, α は $\hat{\xi}$, $\hat{r}$ の分布に関しては無関係である事が理解される。

V　内生変数の最小平均２乗誤差予測

本節では特に動的線型モデルに於ける内生変数の最小平均２乗誤差予測について簡単に述べる。

先ず簡単化のために外生変数は１種類（$s=1$）であるものとして、次の様な動的線型モデル(1), (2)式を設定する。

(1) $$\lambda(B)y_t = \alpha x_t + e_t$$

(2) $$\phi(B)e_t = \theta(B)u_t \qquad u_t \sim \mathrm{I.I.D.}(0, \sigma_u^2)$$

又、外生変数 x_t が次式の如く表現出来るものと仮定する。

(3)　$x_t = \dfrac{\omega(B)}{\delta(B)} v_t = \tau(B) v_t$　　$v_t \sim \mathrm{I.I.D.}(0, \sigma_v^2)$

但し u_t と v_t は統計的に独立であり、$\delta(B)$, $\omega(B)$, $\tau(B)$ はそれぞれ次の様なラグ構造を示す。

(4)　$\delta(B) = \sum_{i=0}^{h} \delta_i B^i \quad (\delta_0 = 1)$　　(5)　$\omega(B) = \sum_{i=0}^{k} \omega_i B^i$

(6)　$\tau(B) = \dfrac{\omega(B)}{\delta(B)} = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i B^i$

このとき(1)〜(3)式より、内生変数 y_t は u_t, v_t を使用して次の様に表現出来る。

(7)　$y_t = \Pi(B) v_t + \Psi(B) u_t$

ここで $\Pi(B)$, $\psi(B)$ はそれぞれ

(8)　$\lambda(B)\delta(B)\Pi(B) = \alpha \cdot \omega(B)$　　(9)　$\lambda(B)\phi(B)\Psi(B) = \theta(B)$

なる関係により定まる次の様なラグ構造を示す。

(10)　$\Pi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i$　　(11)　$\Psi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \quad (\psi_0 = 1)$

さて時点 t に於いて、l 時点 $(l>0)$ 先の内生変数 y_{t+l} の予測値 $\hat{y}_t(l)$ を、現時点及びそれ以前の内生変数 y_t, y_{t-1}, $\cdots$ の一次関数によって線型予測する事を考える。ところで、(7)式より、この事は $\hat{y}_t(l)$ を v_t, u_t の次の様な一次関数

(12)　$\hat{y}_t(l) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^*_{l+i} v_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \psi^*_{l+i} u_{t-i}$

によって予測する事に他ならない。

予測の基準として、最小平均2乗誤差予測を採用すれば、

(13)　$E[(y_{t+l} - \hat{y}_t(l))^2]$

$$= \sigma_v^2 \sum_{i=0}^{l-1} \pi_i^2 + \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \{\sigma_v^2(\pi_{l+i} - \pi^*_{l+i})^2 + \sigma_u^2(\psi_{l+i} - \psi^*_{l+i})^2\}$$

より、

(14)　$\pi^*_{l+i} = \pi_{l+i} \quad i = 0, 1, 2, \cdots$　　(15)　$\psi^*_{l+i} = \psi_{l+i} \quad i = 0, 1, 2, \cdots$

のとき予測の平均2乗誤差が最小となり、最小平均2乗誤差予測は

$$\hat{y}_t(l) = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_{l+i}\,v_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty}\psi_{l+i}\,u_{t-i} = E[y_{t+l}|y_t, y_{t-1}, \cdots] \overset{d}{=} \underset{t}{E}[y_{t+l}] \tag{16}$$

によって与えられる。

即ち、時点 t に於て、l 時点（$l>0$）先の内生変数 y_{t+l} の最小平均２乗誤差予測 $\hat{y}_t(l)$は、既によく知られている事であるが、$y_t, y_{t-1}, \cdots$が与えられた条件の下での、時点 t に於ける y_{t+l} の条件付き期待値に他ならない事が理解される。予測誤差を $e_t(l)$ とすれば、

$$y_{t+l} = e_t(l) + \hat{y}_t(l) \tag{17}$$

$$e_t(l) = \sum_{i=0}^{l-1}\pi_i\,v_{t+l-i} + \sum_{i=0}^{l-1}\psi_i\,u_{t+l-i} \tag{18}$$

となり、予測誤差 $e_t(l)$ の平均、分散はそれぞれ

$$E[e_t(l)] = 0 \tag{19}$$

$$E[e_t^2(l)] = \sigma_v^2\sum_{i=0}^{l-1}\pi_i^2 + \sigma_u^2\sum_{i=0}^{l-1}\psi_i^2 \tag{20}$$

となる。ところで(1), (2)式より、

$$\lambda^*(B)y_t = \alpha\cdot\phi(B)x_t + \theta(B)u_t \tag{21}$$

$$\lambda^*(B) = \phi(B)\lambda(B) = \sum_{i=0}^{p+m}\lambda_i^*B^i \tag{22}$$

と表わせるから、$\hat{y}_t(l)$ を具体的に(23)式によって逐次求める事が出来る。

$$\hat{y}_t(l) = \underset{t}{E}[y_{t+l}] = \sum_{i=1}^{p+m}\lambda_i^*\underset{t}{E}[y_{t+l-i}] + \alpha(\underset{t}{E}[x_{t+l}] - \sum_{i=1}^{p}\phi_i\underset{t}{E}[x_{t+l-i}]) + (\underset{t}{E}[u_{t+l}] - \sum_{i=1}^{q}\theta_i\underset{t}{E}[u_{t+l-i}]) \tag{23}$$

ここで、

$$\underset{t}{E}[u_{t+i}] = \begin{cases} u_{t+i} & i\leqq 0 \\ 0 & i>0 \end{cases} \tag{24}$$

$$\underset{t}{E}[y_{t+i}] = \begin{cases} y_{t+i} & i\leqq 0 \\ \hat{y}_t(i) & i>0 \end{cases} \tag{25}$$

$$\underset{t}{E}[x_{t+i}] = \begin{cases} x_{t+i} & i\leqq 0 \\ \hat{x}_t(i) & i>0 \end{cases} \tag{26}$$

であり、$\hat{x}_t(i)$ は、(3), (6)式より、

$$\hat{x}_t(i) = \sum_{j=-\infty}^{t}\tau_{t+i-j}\,v_j \tag{27}$$

によって与えられる。

Appendix

((1)) 定理の証明

先ず III 節で明らかにした定理の証明の概略を述べる。

(i) $L = \text{const.} - \frac{1}{2} T \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum u_t^2$

とする。このとき次式が成立する。

$$G_T^{-1} \frac{\partial L}{\partial \nu} = -G_T^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial \nu \partial \nu'} G_T^{-1} \cdot G_T(\hat{\nu} - \nu_0) + (\text{3次の項})$$

但し $\frac{\partial L}{\partial \nu}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \nu \partial \nu'}$ は共に $\nu = \nu_0$ で評価したものである。

(ii) $1 \times (m+s+p+q+1)$ 次の実ベクトルを K とし、 $KG_T^{-1} \frac{\partial L}{\partial \nu} = \sum_{t=1}^{T} W_t$ とする。W_t に含まれる u_t に関する無限列を $t-l$ で truncate し、対応する W_t を W_t^* で示す。又正整数 k を、$k > 2l$ かつ $T = kN + r (0 \leqq r < k)$ なる様に任意に固定する。

このとき仮定2, 3より、$E|u_t|^{2(2+\delta)} < \infty$ なる $\delta > 0$ が存在し、固定した k, l について、$\sum_{j=1}^{N} E|\sum_{i=1}^{k-l} W_{k(j-1)+i}^*|^{2+\delta} \longrightarrow 0 (as\ N \to \infty)$ なる事を示す事が出来る。従って Liapounov 中心極限定理より、$G_T^{-1} \frac{\partial L}{\partial \nu} \longrightarrow N(0, \Omega^*) (in\ d)$ を示す事が出来る。

(iii) 又、$-G_T^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial \nu \partial \nu'} G_T^{-1} \longrightarrow \Omega (in\ p)$ を示す事が出来る。

従って (i), (ii), (iii) より本定理が証明される。

((2)) Ω^* の各要素の表示

Ω^* は III.(8) 式で示され、その各成分は以下の(1)〜(19)式によって与えられる。又 Ω は、Ω^* で F, G を0ベクトル、ω を $\omega' = \frac{1}{2\sigma^2}$ とした行列である。

(1) $A = A^{(1)} + A^{(2)}$ $A = \{a(i, j : \lambda, \lambda)\}$, $A^{(k)} = \{a^{(k)}(i, j : \lambda, \lambda)\}$ $k = 1, 2$ $A^{(1)} = A^{(1)\prime}$

$$a^{(1)}(i, j : \lambda, \lambda) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{d_{Ts}^2} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{r=1}^{s} \gamma_{t-i,r} \right) \left(\sum_{r=1}^{s} \gamma_{t-j,r} \right) \qquad i, j = 1, 2, \cdots, m$$

$$a^{(2)}(i, j : \lambda, \lambda) = \lim_{T \to \infty} \frac{T}{d_{Ts}^2} \cdot E[\delta_{t-i} \cdot \delta_{t-j}] = a_{|i-j|}^{(2)} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, m$$

(2) $B=\{b(i,j:\alpha,\alpha)\}$

$$b(i,j:\alpha,\alpha)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{d_{Ti}d_{Tj}}\sum_{t=1}^{T}\beta_{t,i}\beta_{t,j} \qquad i,j=1,2,\cdots,s$$

(3) $C=\{C(i,j:\lambda,\alpha)\}$

$$C(i,j:\lambda,\alpha)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{d_{Ts}d_{Tj}}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{r=1}^{s}\gamma_{t-i,r}\right)\beta_{t,j} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,s \end{matrix}$$

(4) $D=\{d(i,j:\lambda,\phi)\}$

$$d(i,j:\lambda,\phi)=\lim_{T\to\infty}\frac{\sqrt{T}}{d_{Ts}}\cdot E[\delta_{t-i}\cdot\zeta_{t-j}]=d_{i-j} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,p \end{matrix}$$

(5) $E=\{e(i,j:\lambda,\theta)\}$

$$e(i,j:\lambda,\theta)=\lim_{T\to\infty}\frac{\sqrt{T}}{d_{Ts}}\cdot E[\delta_{t-i}\cdot\eta_{t-j}]=e_{i-j} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,q \end{matrix}$$

(6) $F=\{f(i:\lambda,\sigma^2)\}$

$$f(i:\lambda,\sigma^2)=\lim_{T\to\infty}\frac{\kappa_1}{2\sigma\sqrt{T}d_{Ts}}\sum_{t=1}^{T}\sum_{r=1}^{s}\gamma_{t-i,r} \qquad i=1,2,\cdots,m$$

(7) $G=\{g(i:\alpha,\sigma^2)\}$

$$g(i:\alpha,\sigma^2)=\lim_{T\to\infty}\frac{\kappa_1}{2\sigma\sqrt{T}d_{Ti}}\sum_{t=1}^{T}\beta_{t,i} \qquad i=1,2,\cdots,s$$

(8) $P=\{p(i,j:\phi,\phi)\}$

$$p(i,j:\phi,\phi)=E[\zeta_{t-i}\cdot\zeta_{t-j}]=p_{|i-j|} \qquad i,j=1,2,\cdots,p$$

(9) $Q=\{q(i,j:\theta,\theta)\}$

$$q(i,j:\theta,\theta)=E[\eta_{t-i}\cdot\eta_{t-j}]=q_{|i-j|} \qquad i,j=1,2,\cdots,q$$

(10) $R=\{r(i,j:\phi,\theta)\}$

$$r(i,j:\phi,\theta)=E[\zeta_{t-i}\cdot\eta_{i-j}]=r_{i-j} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,p \\ j=1,2,\cdots,q \end{matrix}$$

(11) $\omega=\frac{1}{2\sigma^2}(1+\frac{1}{2}\kappa_2)$ (12) $\omega'=\frac{1}{2\sigma^2}$

但し $\beta_{t,i}(i=1,2,\cdots,s),\gamma_{t,r}(r=1,2,\cdots,s)$, δ_t, ζ_t, η_t, κ_1, κ_2 はそれぞれ(13)～(19)式によって与えられる。

(13) $\beta_{t,i}=\frac{\phi(B)}{\theta(B)}x_{t,i} \qquad i=1,2,\cdots,s$ (14) $\gamma_{t,r}=\frac{\phi(B)}{\theta(B)\lambda(B)}\alpha_r x_{t,r} \qquad r=1,2,\cdots,s$

(15) $\delta_t=\frac{I}{\lambda(B)}u_t$ (16) $\zeta_t=\frac{I}{\phi(B)}u_t$

(17) $\eta_t=-\frac{I}{\theta(B)}u_t$

(18) $\kappa_1=\frac{1}{\sigma^3}E[u_t^3]$ (19) $\kappa_2=\frac{1}{\sigma^4}E[u_t^4]-3$

（1974年7月1日）

（筆者は関西学院大学商学部専任講師）