定常時系列のGMM推定について

On the GMM Estimation of Stationary Time Series

杉　原　左右一

In the present paper, we propose GMM estimators of unknown parameters of stationary time series in the frequency domain. We derive the asymptotic properties of GMM estimators and GLR, LM, and W test statistics. GMM estimators make it possible to analyze the structures of time series in the different frequency domains using appropriate weight functions. Although they are inefficient relative to the maximum likelihood estimator, they are $\sqrt{T}$-consistent estimators of unknown parameters.

Soichi Sugihara

JEL：C1

キーワード：GMM 推定量、周波数領域、漸近的性質、$\sqrt{T}$ 一致性、GLR、LM、W 検定統計量

Keywords： GMM estimators, frequency domain, asymptotic properties, $\sqrt{T}$ consistency, GLR, LM, W test statistics

1 節．はじめに

定常時系列の未知母数の統計的推測に関して、これまで特に周波数領域（frequency domain）に於ける最尤推定量（maximum likelihood estimator）について多くの研究がなされてきたことは周知の通りである。本稿では、最尤推定量とは異なり、周波数領域に於ける一種の GMM 推定量（Generalized Method of Moments Estimators：一般化積率法推定量）を提示して、その漸近的性質について考察したい。本稿で考察する GMM 推定量は、重み関数を自由に選択できるという特徴を持っており、最尤推定量と比較して有効性は劣

るが、未知母数の $\sqrt{T}$ 一致推定量となっている。

以下先ず 2 節で、未知母数の周波数領域に於ける GMM を提示し、3 節で GMM 推定量の漸近的諸性質について考察する。次に 4 節で、代表的な GLR 検定統計量（Generalized Likelihood Ratio（一般化尤度比）検定統計量)、LM 検定統計量（Lagrange Multiplier（ラグランジ乗数）検定統計量)、及び W 検定統計量（Wald（ワルド）検定統計量）の漸近的性質について整理する。最後に 5 節で、今後の検討課題について述べる。

なお、以下では漸近的性質が成立するために必要となる「正則条件」(regularity conditions）が満たされているものとして、導出過程の道筋を明らかにすることにする。

2 節. 未知母数の周波数領域に於ける GMM 推定量について

次式 (1) で表される定常時系列 $\{y_t\}$ を考えよう。

$$y_t = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_l u_{t-l} \tag{1}$$

ここで、u_t は $N.I.D.$ であり、

$$\mathrm{E}(u_t) = 0, \quad \mathrm{E}(u_t^2) = \sigma^2 \tag{2}$$

とする。また係数 ψ_l は

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\psi_l| < \infty \tag{3}$$

を満たすものとする。

以下では y_t の共分散を

$$cov(y_t, y_{t+l}) = \gamma(l) \quad l = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{4}$$

と表し、標本共分散 c_l を、

$$\begin{aligned} c_l &= c_{-l} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-l} y_t y_{t+l} \quad l = 0, 1, \cdots, T-1 \end{aligned} \tag{5}$$

とする。

また、周波数 $\lambda(-\pi \leqq \lambda \leqq \pi)$ に於けるスペクトル密度関数を $f(\lambda)$、y_t の有限フーリエ変換を $z_y(\lambda)$、ピリオドグラムを $I_T(\lambda)$ と表す。

それぞれ次式 (6)〜(9) で与えられる。

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\gamma(l)e^{i\lambda l} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\gamma(l)\ \cos\lambda l \end{aligned} \tag{6}$$

$$z_y(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\sum_{t=1}^{T} y_t e^{i\lambda t} \tag{7}$$

$$I_T(\lambda) = |z_y(\lambda)|^2 \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-(T-1)}^{T-1} c_l \cos\lambda l \tag{9}$$

さて、$w_j(\lambda)(j=1,2,\cdots,n)$ を次式 (10) を満たす $[-\pi,\pi]$ 上の有界関数としよう。

$$w_j(\lambda) = w_j(-\lambda) \quad j=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

このとき、T $\to \infty$ のとき、次の (11), (12) 式の漸近的性質が成立することが知られている。[1)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_j(\lambda)\left(I_T(\lambda)-f(\lambda)\right)d\lambda \xrightarrow{p} 0 \quad j=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

$$\sqrt{T}\left(\int_{-\pi}^{\pi} w_1(\lambda)\left(I_T(\lambda)-f(\lambda)\right)d\lambda,\cdots,\int_{-\pi}^{\pi} w_n(\lambda)\left(I_T(\lambda)-f(\lambda)\right)d\lambda\right)' \xrightarrow{d} N(0,\Sigma) \tag{12}$$

但し、共分散行列 $\sum$ の第 (k,l) 要素 $\sigma_{k,l}(k,l=1,2,\cdots,n)$ は次式 (13) で与えられる。

$$\sigma_{k,l} = 4\pi\int_{-\pi}^{\pi} w_k(\lambda)w_l(\lambda)f^2(\lambda)d\lambda \quad k,l=1,2,\cdots,n \tag{13}$$

上記 (11)、(12) 式は、重み $w(\lambda)$ を用いた、$I_T(\lambda)$ と $f(\lambda)$ の重み付き積分量 $\int_{-\pi}^{\pi} w(\lambda)I_T(\lambda)d\lambda$ と $\int_{-\pi}^{\pi} w(\lambda)f(\lambda)d\lambda$ の対応関係を示すものである。

1) 例えば、Priestley[1981] を参照されたい。

ここで、スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ が、未知母数 θ の連続関数として $f(\theta,\lambda)$ と表せる場合を考えよう。以下では、未知母数 θ を $(p\times 1)$ 次元ベクトル $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)'$ とし、母数空間 $\Theta\subset R^p$ はコンパクトであり、$p\leqq n$ とする。以下、特に θ の真値を明記したい場合には、これを θ_0 と表すことにする。(11),(12) 式は $f(\theta_0,\lambda)$ に対して成立する。

ここで、V を対称正値定符号な n 次正方行列として、$\mathrm{T}\to\infty$ のとき、

$$\hat{V}_T \xrightarrow{p} V \tag{14}$$

を満たす適当な行列列 $\{\hat{V}_T\}$ が存在するものとする。また、$s_T(\theta)$ を、

$$s_T(\theta)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}w_1(\lambda)(I_T(\lambda)-f(\theta,\lambda))d\lambda,\cdots,\int_{-\pi}^{\pi}w_n(\lambda)(I_T(\lambda)-f(\theta,\lambda))d\lambda\right)' \tag{15}$$

と表す。このとき、未知母数 θ の推定法として、ナイーブな方法ではあるが、下記 (16) 式で表される評価関数 $S_T(\theta)$ を θ に関して最小化する一種の GMM を考えよう。本稿では、以後 $S_T(\theta)$ の最小化を達成する未知母数 θ の推定量を、周波数領域に於ける GMM 推定量と呼ぶことにし、これを $\hat{\theta}_{G,T}$ と表す。すなわち、

$$S_T(\theta)=s'_T(\theta)\hat{V}_T s_T(\theta) \tag{16}$$

$$\hat{\theta}_{G,T}=\underset{\theta\in\Theta}{\operatorname{argmin}}\, S_T(\theta) \tag{17}$$

である。

3 節. GMM 推定量の漸近的性質について

本節では、上記した未知母数 θ の GMM 推定量 $\hat{\theta}_{G,T}$ の、$\mathrm{T}\to\infty$ の場合の漸近的性質を明らかにしたい。

$s_0(\theta), S_0(\theta)$ を、

$$\begin{aligned}s_0(\theta)=\biggl(&\int_{-\pi}^{\pi}w_1(\lambda)(f(\theta_0,\lambda)-f(\theta,\lambda))d\lambda,\cdots,\\ &\int_{-\pi}^{\pi}w_n(\lambda)(f(\theta_0,\lambda)-f(\theta,\lambda))d\lambda\biggr)'\end{aligned} \tag{18}$$

$$S_0(\theta)=s'_0(\theta)Vs_0(\theta) \tag{19}$$

とする。T → ∞ のとき、

$$\sup_{\theta \in \Theta} |S_T(\theta) - S_0(\theta)| \xrightarrow{p} 0 \tag{20}$$

が成立するから、$S_0(\theta)$ が唯一 $\theta = \theta_0$ で最小値 $S_0(\theta_0) = 0$ をとるものとすれば、T → ∞ のとき、

$$\hat{\theta}_{G,T} \xrightarrow{p} \theta_0 \tag{21}$$

が成立する。即ち、GMM 推定量 $\hat{\theta}_{G,T}$ は θ_0 の一致推定量である。

次に、$\dfrac{\partial s'_T(\theta)}{\partial \theta}$ を求めれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial s'_T(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial s'_0(\theta)}{\partial \theta}\\ &= -\left(\int_{-\pi}^{\pi} w_1(\lambda)\frac{\partial f(\theta,\lambda)}{\partial \theta}d\lambda, \cdots, \int_{-\pi}^{\pi} w_n(\lambda)\frac{\partial f(\theta,\lambda)}{\partial \theta}d\lambda\right)\end{aligned} \tag{22}$$

となる。

また、$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{G,T} - \theta_0)$ を求めれば、次式 (23) を得る。但し、$\bar{\theta}$ は θ_0 と $\hat{\theta}_{G,T}$ を結ぶ線分の中間点を示す。

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{G,T} - \theta_0) = \left(-\frac{\partial s'_0(\hat{\theta}_{G,T})}{\partial \theta}\hat{V}_T\frac{\partial s_0(\bar{\theta})}{\partial \theta'}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s'_0(\hat{\theta}_{G,T})}{\partial \theta}\hat{V}_T\sqrt{T}s_T(\theta_0)\right) \tag{23}$$

ここで、T → ∞ のとき、次式 (24),(25) が成立する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial s'_0(\hat{\theta}_{G,T})}{\partial \theta}\hat{V}_T\frac{\partial s_0(\bar{\theta})}{\partial \theta'} &\xrightarrow{p} \frac{\partial s'_0(\theta_0)}{\partial \theta}V\frac{\partial s_0(\theta_0)}{\partial \theta'}\\ &\equiv D\end{aligned} \tag{24}$$

$$\frac{\partial s'_0(\hat{\theta}_{G,T})}{\partial \theta}\hat{V}_T\sqrt{T}s_T(\theta_0) \xrightarrow{d} N(0,\Omega) \tag{25}$$

但し、Ω は次式 (26) で与えられる。

$$\Omega = \frac{\partial s'_0(\theta_0)}{\partial \theta}V\Sigma V\frac{\partial s_0(\theta_0)}{\partial \theta'} \tag{26}$$

従って、以上をもとにすれば、T → ∞ のとき、

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{G,T} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0,\Sigma_G) \tag{27}$$

が成立することが明らかになる。ここで、Σ_G は、次式 (28) で与えられる。

$$\Sigma_G = D^{-1}\Omega D^{-1} \tag{28}$$

なお、Σ の一致推定量を $\hat{\Sigma}$ として、$\hat{V}_T$ を特に $\hat{V}_T = \hat{\Sigma}^{-1}$ と選んだときの $\hat{\theta}_{G,T}, \Sigma_G$ を $\hat{\theta}^*_{G,T}, \Sigma^*_G$ と表せば、$V = \Sigma^{-1}$ となるから、Σ^*_G は、

$$\Sigma^*_G = \left(\frac{\partial s'_0(\theta_0)}{\partial\theta}\Sigma^{-1}\frac{\partial s_0(\theta_0)}{\partial\theta'}\right)^{-1} \tag{29}$$

となる。一般に、

$$\Sigma_G \geqq \Sigma^*_G \tag{30}$$

が成立することに注意したい。

上で明らかにした GMM 推定量 $\hat{\theta}_{G,T}$ の漸近的性質について、下記の注意事項を指摘しておきたい。

[注意 1]

次式 (31) で表される評価関数 $S(f(\theta,\lambda), I_T(\lambda))$

$$S(f(\theta,\lambda), I_T(\lambda)) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\log f(\theta,\lambda) + \frac{I_T(\lambda)}{f(\theta,\lambda)}\right)d\lambda \tag{31}$$

について、未知母数 θ の周波数領域に於ける最尤推定量 $\hat{\theta}_{M,T}$ を

$$\hat{\theta}_{M,T} = \underset{\theta\in\Theta}{\operatorname{argmin}}\, S(f(\theta,\lambda), I_T(\lambda)) \tag{32}$$

とすれば、T $\to \infty$ のとき、次式が成立することが知られている。[2)]

$$\hat{\theta}_{M,T} \xrightarrow{p} \theta_0 \tag{33}$$

$$\sqrt{T}\,(\hat{\theta}_{M,T} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_M) \tag{34}$$

ここで、フィッシャー情報行列を $\Im(\theta_0)$

$$\Im(\theta_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f^2(\theta_0,\lambda)}\frac{\partial f(\theta_0,\lambda)}{\partial\theta}\frac{\partial f(\theta_0,\lambda)}{\partial\theta'}d\lambda \tag{35}$$

とすれば、Σ_M は

2) 詳細については、例えば Whittle[1961], Hosoya[1974], Dunsmuir[1979], Hosoya and Taniguchi[1982] 等が参考になる。なお、これらの結果はその後さらに Dahlhaus and Wefelmeyer[1996], Taniguchi and Kakizawa[2000], Dahlhaus[2000] 等により、汎関数積分を含む場合や、局所定常過程等のより一般的な場合に拡張されている。

$$\Sigma_M = \Im(\theta_0)^{-1} \tag{36}$$

で与えられる。

最尤推定量 $\hat{\theta}_{M,T}$ と比較して、上記 GMM 推定量 $\hat{\theta}_{G,T}$ は、未知母数 θ の有効推定量ではないが、θ の $\sqrt{T}$ 一致推定量となっていることが分かる。特に、$\hat{V}_T = I_n$ と選んだときの GMM 推定量を $\hat{\theta}^{**}_{G,T}$ とすれば、T $\to \infty$ のとき、

$$\sqrt{T}\,(\hat{\theta}^{**}_{G,T} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma^{**}_G) \tag{37}$$

が成立する。但し、Σ^{**}_G は次式 (38) で与えられる。

$$\Sigma^{**}_G = \left(\frac{\partial s_0'(\theta_0)}{\partial\theta}\frac{\partial s_0(\theta_0)}{\partial\theta'}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_0'(\theta_0)}{\partial\theta}\Sigma\frac{\partial s_0(\theta_0)}{\partial\theta'}\right)\left(\frac{\partial s_0'(\theta_0)}{\partial\theta}\frac{\partial s_0(\theta_0)}{\partial\theta'}\right)^{-1} \tag{38}$$

$\hat{\theta}^{**}_{G,T}$ は、比較的容易に求められる θ の $\sqrt{T}$ 一致推定量である。

[注意 2]

本稿では分析を容易にする意味からひとまず u_t に正規性を仮定したが、正規性の仮定を除去し、u_t が I.I.D. であり、(2) 式に加えて次式 (39) を満たす場合を考えてみよう。

$$E(u_t^4) = 3\sigma^4 + \kappa_4 < \infty \tag{39}$$

この場合にも (12) 式は成立するが、$\sigma_{k,l}(k, l = 1, 2, \cdots, n)$ は (13) 式に代わって次式 (40) で与えられる。[3)]

$$\sigma_{k,l} = 4\pi\int_{-\pi}^{\pi} w_k(\lambda)w_l(\lambda)f^2(\lambda)d\lambda + \frac{\kappa_4}{\sigma^4}\left(\int_{-\pi}^{\pi} w_k(\lambda)f(\lambda)d\lambda\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} w_l(\lambda)f(\lambda)d\lambda\right) \quad k, l = 1, 2, \cdots, n \tag{40}$$

上式右辺第 2 項は非正規性によるものである。非正規性の仮定下に於いても本稿の GMM はそのまま適用出来るが、その場合の共分散行列 $\Sigma_G, \Sigma^*_G, \Sigma^{**}_G$ はより複雑なものとならざるを得ない。

[注意 3]

3)　例えば、Priestley[1981] を参照されたい。

本稿で考察した GMM は、重み関数 $w(\lambda)$ を自由に選択できるという特徴を持っている。適当な重み関数を用いることにより、周波数帯の特徴を活かした分析比較が可能となる。

4 節．GLR, LM, W 検定統計量とその漸近的性質について

最後に、未知母数 θ の仮説検定に関して、代表的な GLR, LM, W 検定統計量を取り上げて、それらの $\mathrm{T} \to \infty$ の場合の漸近的性質について整理しておくことにしたい。

次式 (41) で表される θ に関する仮説検定を考えよう。

$$H_o\colon h(\theta_0) = 0 \tag{41}$$

但し、$h : R^p \to R^r$ は θ に関して連続的微分可能であり、

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial h(\theta_0)}{\partial \theta'}\right) = r \leqq p \tag{42}$$

であるものとする。また、(16) 式で表される評価関数 $S_T(\theta)$ に於いて、$\hat{V}_T = \hat{\Sigma}^{-1}$ とした場合を取り扱うことにし、帰無仮説 H_o の下での GMM 推定量を $\tilde{\theta}^*_{G,T}$ と表し、そのときの Σ^*_G の一致推定量を $\tilde{\Sigma}^*_G$ とし、$\hat{\theta}^*_{G,T}$ に対応する一致推定量を $\hat{\Sigma}^*_G$ とする。このとき、下記の 3 種類の検定統計量を考えよう。

$$\mathrm{GLR} = \mathrm{T}\left(S_T(\hat{\theta}^*_{G,T}) - S_T(\tilde{\theta}^*_{G,T})\right) \tag{43}$$

$$\mathrm{LM} = \mathrm{T}\frac{\partial S_T(\tilde{\theta}^*_{G,T})}{\partial \theta'}\tilde{\Sigma}^{*-1}_G\frac{\partial S_T(\tilde{\theta}^*_{G,T})}{\partial \theta} \tag{44}$$

$$\mathrm{W} = \mathrm{T}h'(\hat{\theta}^*_{G,T})\left(\frac{\partial h(\hat{\theta}^*_{G,T})}{\partial \theta'}\hat{\Sigma}^{*-1}_G\frac{\partial h'(\hat{\theta}^*_{G,T})}{\partial \theta}\right)^{-1}h(\hat{\theta}^*_{G,T}) \tag{45}$$

そうすれば、$\mathrm{T} \to \infty$ のとき、これらの 3 検定統計量が、帰無仮説 H_o の下で、いずれも $\chi^2(r)$ 分布に従うことを明らかにすることが出来る。

5 節．おわりに

本稿では、定常時系列のスペクトル密度関数 $f(\theta, \lambda)$ の未知母数 θ について、周波数領域に於ける GMM 推定量 $\hat{\theta}_{G,T}$ を考えて、その漸近的性質を明らかにすると共に、代表的な GLR, LM, W 検定統計量の漸近的性質について整理し

た。本稿で考察した GMM 推定量 $\hat{\theta}_{G,T}$ は、重み関数の選択に応じたふり幅の広い分析を可能にするという特徴を持っている。また、最尤推定量 $\hat{\theta}_{M,T}$ と比較して有効性は劣るが、未知母数 θ の $\sqrt{T}$ 一致推定量となっている。

なお、本稿では GMM 推定量 $\hat{\theta}_{G,T}$ の $\mathrm{T} \to \infty$ の場合の漸近的性質を中心に考察したが、今後 T が有限な場合の小標本特性や、重み付き積分量の特性等に関してさらに考察を加えなければならない。いずれも今後の検討課題としたい。

参考文献

[1] Anderson, T. W. [1971]. The Statistical Analysis of Time Series, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[2] Dahlhaus, R. and Wefelmeyer, W. [1996]. Asymptotically optimal estimation in misspecified time series models, Annals of Statistics, 24, 952-974.

[3] Dahlhaus, R. [2000]. A likelihood approximation for locally stationary processes, Annals of Statistics, 28, 1762-1794.

[4] Dunsmuir, W. [1979]. A central limit theorem for parameter estimation in stationary vector time series and its application to models for a signal observed with noise, Annals of Statistics, 7, 490-506.

[5] Hannan, E. J. [1970]. Multiple Time Series, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[6] Hosoya, Y. [1974]. Estimation problems on stationary time-series models, Ph.D. thesis, Yale University.

[7] Hosoya, Y. and Taniguchi, M. [1982]. A central limit theorem for stationary processes and the parameter estimation of linear processes, Annals of Statistics, 10, 132-153.

[8] Priestley, M. B. [1981]. Spectral Analysis and Time Series, AcademicPress, London.

[9] Taniguchi, M. and Kakizawa, Y. [2000]. Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series, Springer-Verlag, New York.

[10] Whittle, P. [1961]. Gaussian estimation in stationary time series, Bulletin of the International Statistical Institute, 39, 105-130.