有限展開形ゲームの構造

The Structure of Finite Extensive-Form Games

福 尾 洋 一

A game described with a directed rooted tree diagram, what is called a *game tree*, is referred to as an *extensive-form game.*

The purpose of this paper is to reconsider or seek the structures of *finite extensive-form games.*

Since Kuhn[8], there has been a large literature on *extensive-form games*, and huge particular models of them have been proposed. Accordingly, the efforts to seek the structure of *extensive-form games* may be too belated. However, apart from particular models as examples of *extensive-form games*, we think it may be difficult to describe the general structure of *extensive-form games* perfectly.

The efforts of this paper may also result in incomplete definitions about *extensive-form games.* However, we somewhat aim for the general description of the structure of *finite extensive-form games.*

Yôichi Fukuo

JEL : C7

キーワード：展開形ゲーム，混合戦略分布，行動戦略分布

Key words : extensive-form games, mixed strategies distributions, behavioral strategies distributions

0. 序

有向樹形図（いわゆる，ゲーム木）を用いて記述されるゲームの表現形式を展開形ゲームという．

本稿の目的は有限展開形ゲームの構造を整理することにある[1)]．

1) 樹形図を利用する分野は多い．たとえば，情報理論では「符号木」という木を使用する．なお，「有限」の意味は後段で判明する．

ところで，Kuhn[8] 以来，展開形ゲームの解説文献は膨大であり，個別展開形ゲーム・モデルは実に多く提案されいる．したがって，今更，展開形ゲームの構造を探ろうとする試みには何の新鮮味もなく，まさに数周回遅れランナーの走りのようなものであろう．しかし，例として提示される 1 つひとつの個別展開形ゲーム・モデルとは別に，展開形ゲームの一般構造を完全に記述することは容易でないように，われわれには思われる．

本稿の試みもまた，有限展開形ゲームの構造についての不十分な定義に終始することになるのかもしれない．しかし，多少なりとも一般性に向けた記述に心掛けたつもりである．本考察の基本体系は主として岡田 [13] に従い，加えて稿末文献を参考にした．

本論に入る前に，2 点について準備する．準備 1 は本稿前半部分で利用され，準備 2 は本稿最終部分で利用される．有限展開形ゲームの基本構造を整理するわれわれの試みからすれば，準備 2 にかかわる部分は蛇足であるといえるのかもしれない．

準備 1　分割，細分について

ある集合 $\boldsymbol{X}$ とその有限個の互いに排反する非空部分集合 $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ からなる族

$$\mathfrak{A} \triangleq \{\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n\}^{2)}$$

に対して，$\mathfrak{A}$ の成分集合 $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ が $\boldsymbol{X}$ を被覆するとき，すなわち，

$$\boldsymbol{X} = \sum\nolimits_{i=0}^{n} \boldsymbol{A}_i$$

であるとき[3]，$\mathfrak{A}$ は $\boldsymbol{X}$ の分割 division であるという．また，$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ によって分割されたという．1 つの集合 $\boldsymbol{X}$ に対して，2 つの分割

$$\mathfrak{B} \triangleq \{\boldsymbol{B}_0^{1_0}, \cdots, \boldsymbol{B}_0^{J_0}, \boldsymbol{B}_1^{1_1}, \cdots, \boldsymbol{B}_1^{J_1}, \cdots, \boldsymbol{B}_n^{1_n}, \cdots, \boldsymbol{B}_n^{J_n}\},$$

$$\mathfrak{A} \triangleq \{\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n\}$$

2)　$A \triangleq B$ は,「A を B によって定義する」とか「A は B によって定義される」ことを意味する．
3)　本稿では，集合 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2 \subset \boldsymbol{X}$ の直和，すなわち $\boldsymbol{A}_1 \cup \boldsymbol{A}_2$ かつ $\boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{A}_2 \neq \emptyset$, を $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$ と表記する．

があって，$\boldsymbol{B}_i^{j_i}(j_i = 1_i, \cdots, J_i)$ がある $\boldsymbol{A}_i$ の部分集合であるならば，すなわち，

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\} : \boldsymbol{A}_i = \sum_{j_i=1}^{J_i} \boldsymbol{B}_i^{j_i}$$

であるならば，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ の細分 subdivision であるという．

準備 2　有界実数値関数空間への距離の導入とコンパクト性について

任意の非空集合 $\boldsymbol{X}$ 上の有界実数値関数 f の全体を $\mathscr{F}$ とおく．すなわち，

$$\mathscr{F} \triangleq \{ f \mid f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R},\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : f(\boldsymbol{x}) < \infty \}$$

とする．任意の 2 つの関数 f_1，$f_2 \in \mathscr{F}$ に対して，関数 $d : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \boldsymbol{R}$ を

$$d(f_1, f_2) \triangleq \sup \{ |f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x})| \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \}$$

と定義すると，d は関数空間 $\mathscr{F}$ 上の距離関数であり，$\mathscr{F}$ は距離空間となる．このとき，$\mathscr{F}$ はコンパクト距離空間であり，$\mathscr{F}$ の部分空間

$$\mathscr{F}_{[0,1]} \triangleq \{ f \mid f : \boldsymbol{X} \to [0,1],\ f \in \mathscr{F} \}$$

は，$\mathscr{F}$ のコンパクト距離空間である4) 5)．

1．展開形ゲームのルール

1.1.　展開形ゲームの進行

ゲームの進行過程は，プレイヤーの有限行動列 $a_0, a_1, \cdots, a_L$ によって与えられる．行動列の項番号 l を第 l 期 stage, phase という．

行動主体としてのプレイヤーには，決定プレイヤー decision player（または人的プレイヤー personal player）と偶然プレイヤー chance player（または

4)　本稿の範囲では，最初から，値域 $[0,1]$ の実数値関数 $\mathscr{F}_{[0,1]}$ の全体に限定しても不都合はない．$\boldsymbol{X}$ 上の関数の列 $(f_l)_{l \in \mathcal{N}}$ がある関数に収束するとは，f_l が f に一様収束するという意味である．距離空間における位相の導入法，距離空間の直径，全有界性，完備性等の概念の詳細については，松坂 [9]pp.256—268 を見られたい．明らかに，$\mathscr{F}$ は全有界である．また，$\mathscr{F}$ が完備であることは，竹之内 [18]p.52 例 5*や松坂 [9]p.257 定理 8 の議論から導かれる．つまり，$\mathscr{F}$ は，全有界かつ完備な距離空間であるので，コンパクト距離空間である（松坂 [9]p.266. 定理 12）．以上のことから，直ちに，$\mathscr{F}_{[0,1]}$ が $\mathscr{F}$ のコンパクト部分空間であることが導かれる．

5)　位相空間 $\mathscr{F}$ に関する理論は，有限次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ に関する理論を踏襲しており，$\boldsymbol{R}^n$ に関する理論の応用であると解釈できる．実際，位相空間 $\boldsymbol{R}^n$ 上で導かれた結論を位相空間に適用することができる．

自然プレイヤー natural player）の 2 種類のタイプがある．単にプレイヤーというときは，決定プレイヤーと偶然プレイヤーを含めた意味で使用し，記号 $j \in \mathcal{J}$ であらわす．プレイヤー $j \in \mathcal{J}$ が行動する期をプレイヤー期といい，記号 $l = l^j \in \mathcal{L}^j$ であらわす．

決定プレイヤーとは，意思決定にしたがって結果をもたらす行動主体――家計，企業，政府，個人，グループ，組織等――のことであり，記号 $i \in \mathcal{I}$ であらわす．決定プレイヤーにより，可能な選択対象の中から，1 つの選択対象が選ばれる（たとえば，将棋でこまを動かす）ことを決定行動 decision behavior という．偶然プレイヤーとは，ランダムな行動結果をもたらす偶然機構――自然現象，景気，技術革新，ジャンケン，くじ引き，サイコロ，コイン・トス等――のことであり，記号 $j = 0$ であらわす．偶然プレイヤーにより，生起しうる事象の中から，1 つの事象がランダムに選ばれる（たとえば，トランプでカードが配られる）ことを偶然行動 random behavior という．行動を選択 choice ともいう．したがって，偶然選択，決定選択という表現も可能である．

ゲームのルールにより，すべての決定プレイヤーは，何らかの方法を通じて，以下の情報 **(R1)** ― **(R5)** を事前に知ることができ[6]，また，ゲームは **(P)** のように進行する．

(R1) 各期のプレイヤー．

すなわち，すべての決定プレイヤーは，各期に対して，① それが決定プレイヤー期であるか偶然プレイヤー期であるかという点についても，② どの特定のプレイヤーが行動するかという点についても，何らかの方法を通じて事前に知っている．

(R2) ① 決定プレイヤー期における選択可能な選択対象の集合（選択肢）．
② 偶然プレイヤー期における生起しうる事象の確率．

6) あくまでも 1 例であり，すべての可能性を網羅するものではない．また，(R1) ― (R5) の成立が常に保証されるわけでもない．とくに (R5) に関しては，Harsanyi[5] の問題提起がきわめて重要である．(R3) についても，留意すべき点がある．しかし目下のところ，「何らかの方法を通じて」という表現を挿入することにより，「何らかの方法」の正当性の問題も含め，(R1) ― (R5) の成立にかかわる諸問題の考察を（定義 19・20 でほんの少し触れるだけで）回避する．

すなわち，すべての決定プレイヤーは，何らかの方法を通じて，①② を事前に知っている．

(R3) 決定プレイヤーがもつことのできる情報集合．

すなわち，すべての決定プレイヤーは，自らが行動する期において，それ以前の各期の決定行動の関数としての情報が与えられることを，何らかの方法を通じて事前に知っている．

(R4) ゲーム長．

すなわち，すべて決定プレイヤーはゲームがいつ終結するかを，何らかの方法を通じて事前に知っている．

(R5) 決定プレイヤー利得関数．

すなわち，すべての決定プレイヤーは，ゲームの終結結果からの利得を与える関数を，何らかの方法を通じて事前に知ることができる．

(P) 各期におけるプレイヤーの行動に応じて局面は次の期に移行する．ゲーム開始からゲーム終了までに，各期において，決定プレイヤーまたは偶然プレイヤーが選んだ 1 つの行動列を 1 つのプレイという．異なる選択に応じて異なるプレイが対応する．

注意 1　偶然行動は，ゲーム開始期 0 において 1 回だけであると仮定されることが多い．しかし，ゲームのタイプによっては，偶然行動が複数回存在する可能性もあれば，偶然行動が存在しない可能性もある．それに対し，決定行動は，1 回だけでゲームが終了することもあるだろうが，複数回存在するゲームも多い．

1.2. ゲーム木

1.2.1. ゲーム木と節および枝

行動の継起関係を記述する有向樹形図をゲーム木 rooted tree という．ゲーム木は枝 edge, arrow，branch と節 node，vertex で構成される．枝の両端の点を節という．枝が 1 本も入ってこない節を始節 original node （または根節 root node），枝が 1 本も出ていかない節を終節 terminal node （または葉 leaf node），始節と終節以外の節を間節 inner node （または枝節 branch node）という．また，非終節（すなわち始節と間節）を期節 stage node（または手番 move）という．

以上を整理すると，

$$\text{ゲーム木}\begin{cases}\text{節}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{始節（根節）}\\ \text{間節（枝節）}\end{array}\right\}\text{期節, 手番}\\ \text{終節（葉節）}\end{cases}\\ \text{枝}\end{cases}$$

始節（根節）を第 0 節，間節（枝節）を第 1 節，第 2 節，…，第 l 節ともあらわす．したがって，期節または手番の配列番号は期列番号を示す．

ある間節ないし終節に対して，始節 0 からその間節ないし終節までにいたる「第 0 節→枝→第 1 節→枝→第 2 節→…→その間節ないし終節」の 1 意に定まる列をパス path（または履歴 history）という．このように，特定の間節ないし終節にいたるパスはすべて始節を始点とする――すなわち，すべての枝節および葉節は根節から成長する――1 意のパスとして定まるが，これを間節パスとか終節パスという．とくに，始節と特定の 1 つの終節を結ぶ終節パスをゲームの 1 つのプレイという．

1.2.2.　記号

以下において使用する基本記号の一部を列挙する．

$\mathcal{N}$　　：自然数 の全体.

K　　：ゲーム木.

$L \in \mathcal{N}$　：ゲーム長．有限.

$\mathcal{J} \triangleq \{j \mid j = 0, 1, \cdots, I\} = \{0\} + \mathcal{I} \subset \mathcal{N}$

　　：プレイヤー集合．異なるプレイヤー j の全体.

$\mathcal{I} \triangleq \{i \mid i = 1, 2, \cdots, I\} \subset \mathcal{N}$

　　：決定プレイヤー集合．異なる決定プレイヤー i の全体.

$\mathcal{I}^{\mathcal{I}} \subset \mathcal{J}$　：$\mathcal{I}$ の部分集合．とくに，$\mathcal{I}^{i} \triangleq \{i\}$.

$\mathcal{J}^{-\mathcal{I}} \subset \mathcal{J}$　：$\mathcal{I}^{\mathcal{I}}$ の補集合．とくに，$\mathcal{I}^{-i} \triangleq \mathcal{J} \backslash \mathcal{I}^{i} = \mathcal{J} \backslash \{i\}$.

$\mathcal{L} \triangleq \{\, l \mid l = 0, 1, \cdots, L\} \subset \mathcal{N}$

：期集合．期 l の全体．L はゲーム長．

$\boldsymbol{X}$　　：節集合．節 x の全体．

$\boldsymbol{X}_l \triangleq \{\, x_l \mid x_l = x_{\xi_l},\ \xi_l \in \mathcal{X}_l\,\} = \{\, x_{\xi_l} \mid \xi_l \in \mathcal{X}_l\}$

：期節集合．期節——以後，局所節—— $x_l = x_{\xi_l}$ の全体．

$\boldsymbol{x}_l \triangleq (x_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l} = (x_{1_l}, x_{2_l}, \cdots, x_{X_l})$

：期節（または期節プロファイル）[7]．

期節集合の全成分によるプロファイル．

$\mathcal{X}_l \triangleq \{\, \xi_l \mid \xi_l = 1_l,\ 2_l, \cdots,\ X_l\,\} \subset \mathcal{N}$

：局所節 $x_l = x_{\xi_l}$ の配列番号集合．

$\boldsymbol{W} \triangleq \{\, w \mid w = w_\omega = w_1, w_2, \cdots, w_W\,\}$

：終節集合．終節 w の全体．

プロファイル（あるいはベクトル）$\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_T)$ に対して，

$\arg \boldsymbol{t} \triangleq \{\, t \mid t = t_1, t_2, \cdots, t_T\}$

：プロファイル $\boldsymbol{t}$ の成分集合．arg は成分 argument.

したがって，$\arg \boldsymbol{x}_l = \boldsymbol{X}_l$.

$\mathrm{pr}_\tau(\boldsymbol{t}) = \mathrm{pr}_\tau(t_1, t_2, \cdots, t_T) \triangleq t_\tau$

：プロファイル $\boldsymbol{t}$ の第 τ 成分．pr は射影 projection.

1.3.　純戦略の局所枝と期枝

定義 1　局所枝 $a_l = a_{\xi_l}$

7) 厳密には，$\boldsymbol{x}_l$ は期節プロファイルとよぶべきであるが，しばしば単に期節という．以後，各種のプロファイルが定義されるが，いちいち，プロファイルであると断らない．なお，プロファイルとは配列とか組合せという意味で使用する．プロファイルは必ずしも数値の配列であるとは限らない．しかし，数値でない配列も番号化することのより，数値の配列に置き換えることができるので，プロファイルを，もっと広く普及している概念であるベクトルと理解しても混乱することはない．プロファイルはボールド体文字で表示される．プロファイルはただ1点からなることもある．期節がただ1点からなる場合，期節と局所節は同一実体である．しかし，このようなケースについても，期節はボールド体，局所節はローマン体で表示し，しかも両者を同一視する．

局所節 $x_l = x_{\xi_l} \in \boldsymbol{X}_l \, (l \in \mathcal{L}, \xi_l \in \mathfrak{X}_l)$ に対して，

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_l \triangleq \{ a_l \,|\, a_l = a_l^{\alpha_l}, \, \alpha_l \in \mathcal{A}_l \}, \\ \mathcal{A}_l \triangleq \{ \alpha_l \,|\, \alpha_l = 1, 2, \cdots, A_l \} \subset \mathcal{N} \end{cases}$$

あるいは，

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_{\xi_l} \triangleq \left\{ a_{\xi_l} \,\middle|\, a_{\xi_l} = a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}, \, \alpha_{\xi_l} \in \mathcal{A}_{\xi_l} \right\}, \\ \mathcal{A}_{\xi_l} \triangleq \{ \alpha_{\xi_l} \,|\, \alpha_{\xi_l} = 1, \, 2, \cdots, A_{\xi_l} \} \subset \mathcal{N} \end{cases}$$

とおく．集合 $\boldsymbol{A}_l$ は局所節 $x_l \in \boldsymbol{X}_l$ の下で選択可能な選択肢（有向枝）の全体（有限集合）であり，これを期局所枝集合（または期局所純戦略集合）といい，その成分 $a_l = a_l^{\alpha_l}$ を期局所枝（または期局所純戦略）――以後，局所枝――という．また，集合 $\mathcal{A}_l$ は局所枝の配列番号集合である[8]．

注意 2　始節 $x_0 \in \boldsymbol{X}_0$ から終節 $w \in \boldsymbol{W}$ への 1 つのプレイ w に対して，各期 $l \in \mathcal{L}$ における 1 つひとつの局所枝 $a_l \in \boldsymbol{A}_l$ は，プレイ w をゲームの前方から見れば，すなわち，始節 $x_0 \in \boldsymbol{X}_0$ から終節 $w \in \boldsymbol{W}$ への方向に見れば，選択可能な行動計画としての局所純戦略であり，プレイ w をゲームの後方から見れば，すなわち，$w \in \boldsymbol{W}$ から $x_0 \in \boldsymbol{X}_0$ への方向に見れば，選択した結果としての局所行動を示す．

定義 2　期枝 $\boldsymbol{a}_l$

$X_l \, (\in \mathcal{N})$ 個の期局所枝集合 $\boldsymbol{A}_{\xi_l} \, (\xi_l \in \mathfrak{X}_l)$ の直積集合

$$\boldsymbol{A}_l \triangleq \dot{\times}_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l} \boldsymbol{A}_{\xi_l} = \left\{ \boldsymbol{a}_l \,\middle|\, \boldsymbol{a}_l \triangleq \left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}} \right)_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l}, \; \alpha_{\xi_l} \in \mathcal{A}_{\xi_l} \right\},$$

$$\boldsymbol{a}_l \triangleq \left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}} \right)_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l} = \left(a_{1_l}^{\alpha_{1_l}}, a_{2_l}^{\alpha_{2_l}}, \cdots, a_{X_l}^{\alpha_{X_l}} \right)$$

を期枝集合といい，その成分 $\boldsymbol{a}_l$ を期枝という．期枝集合 $\boldsymbol{A}_l$ は $\prod_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l} A_{\xi_l}$ 個のプロファイル $\boldsymbol{a}_l$ からなる集合である．とくに，$l \in \mathcal{L}^j$ ならば，期枝集合 $\boldsymbol{A}_l$ はプレイヤー期枝集合であり，期枝 $\boldsymbol{a}_l$ はプレイヤー期枝である．

---

8)　厳密には，局所枝（番号）と局所純戦略（名称）は異なる概念である．局所節における選択肢の名称（たとえば，グー，チョキ，パー）が局所純戦略であり，局所節における選択肢の配列番号（たとえば，グーを 1，チョキを 2，パーを 3 と定めたときの 1，2，3）が局所枝である．しかし，両者を同一視しても混乱することはない．そこで，以後，「節」における選択肢一般をあつかう場合には，配列番号を用いて「枝」という用語を用いる．

例 1　ゲーム木の例

$$\begin{cases} x_l = x_{\xi_l}, \\ a_l = a_{\xi_l} = a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}},\ l \in \mathcal{L},\ \xi_l \in \mathcal{X}_l,\ \alpha_{\xi_l} \in \mathcal{A}_{\xi_l}, \end{cases} \quad \text{とする.}$$

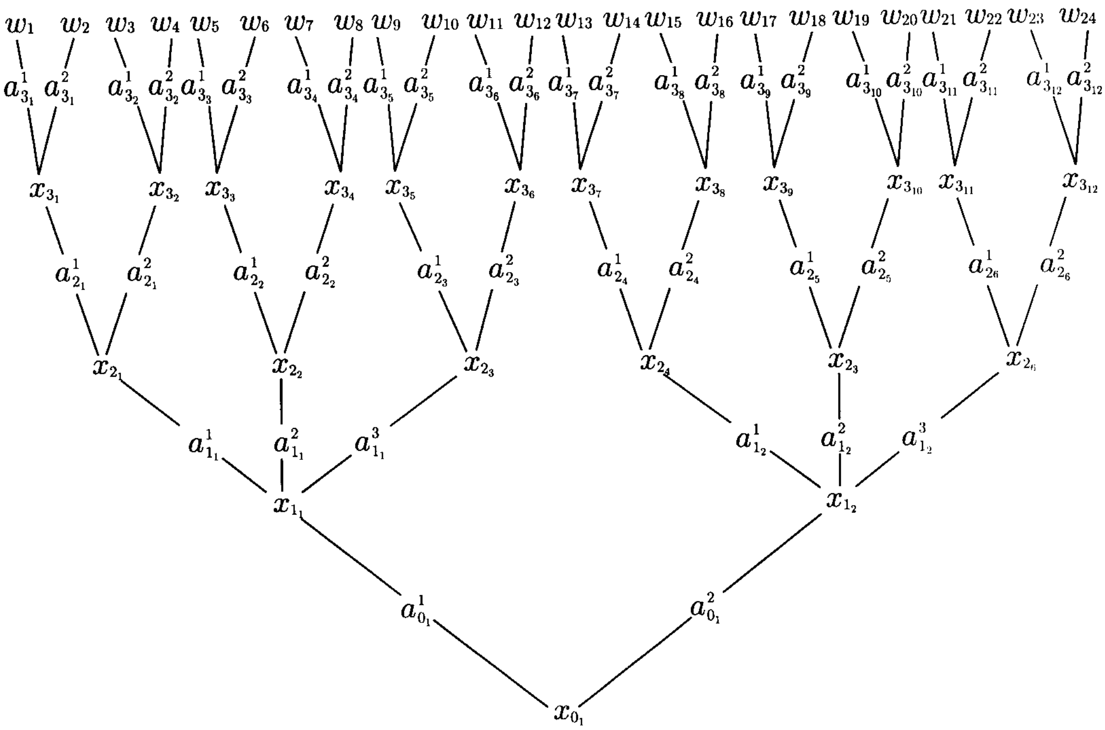

図 1.1: ゲーム木の例

例 2　期枝 $\boldsymbol{a}_l$ と期枝集合 $\boldsymbol{A}_l$ の例

期枝集合とその成分である期枝は，その前の期に選択される期枝との関連において，あるいは，後述するプレイヤーのもつ「情報」との関連において，展開ゲームに特徴的な役割を演じる．そこで，期枝（したがって，期枝集合）のいくつかを例示する．

期局所枝集合

$$\boldsymbol{A}_{\xi_l} \triangleq \left\{ a_{\xi_l} \,\middle|\, a_{\xi_l} = a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}} = a_{\xi_l}^1, a_{\xi_l}^2, \cdots, a_{\xi_l}^{A_{\xi_l}} \right\},$$

$$\mathcal{X}_l \triangleq \{ \xi_l \mid \xi_l = 1_l, 2_l, \cdots, X_l \}$$

から，期枝 $\boldsymbol{a}_l$ と期枝集合 $\boldsymbol{A}_l$ を構成してみよう．

(1)　$\boldsymbol{A}_{\xi_l} \triangleq \{ a_{\xi_l} \mid a_{\xi_l} = a_{\xi_l}^1,\ a_{\xi_l}^2,\ a_{\xi_l}^3 \}$, $\mathcal{X}_l \triangleq \{ \xi_l \mid \xi_l = 1_l, 2_l, 3_l \}$ の場合の $\boldsymbol{A}_l$.

$$A_{\xi_l} = 3\,(\alpha_{\xi_l} = 1, 2, 3), \quad X_l = 3_l\,(\xi_l = 1_l, 2_l, 3_l),$$

$\boldsymbol{E}_l \triangleq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ からの重複順列.

$3^3 = 27$ 個の期枝 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{l \cdot m}\,(m = 1, 2, \cdots, 27)$ があり，その配列は重複順列の辞書式順序に従う——以下の例も同様——.

$\boldsymbol{E}_l$の重複順列	$\boldsymbol{a}_{l \cdot m}$	$\boldsymbol{A}_{1_l}$	$\boldsymbol{A}_{2_l}$	$\boldsymbol{A}_{3_l}$
111	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 1}$	$a^1_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
112	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 2}$	$a^1_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
113	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 3}$	$a^1_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^3_{3_l}$
121	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 4}$	$a^1_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
122	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 5}$	$a^1_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
123	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 6}$	$a^1_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^3_{3_l}$
131	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 7}$	$a^1_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
132	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 8}$	$a^1_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
133	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 9}$	$a^1_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^3_{3_l}$
211	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 10}$	$a^2_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
212	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 11}$	$a^2_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
213	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 12}$	$a^2_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^3_{3_l}$
221	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 13}$	$a^2_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
222	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 14}$	$a^2_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
223	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 15}$	$a^2_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^3_{3_l}$
231	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 16}$	$a^2_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
232	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 17}$	$a^2_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
233	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 18}$	$a^2_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^3_{3_l}$
311	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 19}$	$a^3_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
312	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 20}$	$a^3_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
313	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 21}$	$a^3_{1_l}$	$a^1_{2_l}$	$a^3_{3_l}$
321	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 22}$	$a^3_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
322	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 23}$	$a^3_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
323	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 24}$	$a^3_{1_l}$	$a^2_{2_l}$	$a^3_{3_l}$
331	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 25}$	$a^3_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^1_{3_l}$
332	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 26}$	$a^3_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^2_{3_l}$
333	$\boldsymbol{a}_{l \cdot 27}$	$a^3_{1_l}$	$a^3_{2_l}$	$a^3_{3_l}$

(2) $\boldsymbol{A}_{\xi_\iota} \triangleq \{ a_{\xi_\iota} \,|\, a_{\xi_\iota} = a^1_{\xi_\iota}, a^2_{\xi_\iota} \}$, $\mathfrak{X}_\iota \triangleq \{ \xi_\iota \,|\, \xi_\iota = 1_\iota, 2_\iota, 3_\iota \}$ の場合の $\boldsymbol{A}_\iota$.

$A_{\xi_\iota} = 2\,(\alpha_{\xi_\iota} = 1, 2)$, $\quad X_\iota = 3_\iota\,(\xi_\iota = 1_\iota, 2_\iota, 3_\iota)$,

$\boldsymbol{E}_\iota \triangleq \{1,2\} \times \{1,2\} \times \{1,2\}$ からの重複順列.

$2^3 = 8$ 個の期枝 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\iota \cdot m}\,(m = 1, 2, \cdots, 8)$ がある.

$\boldsymbol{E}_\iota$の重複順列	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot m}$	$\boldsymbol{A}_{1_\iota}$	$\boldsymbol{A}_{2_\iota}$	$\boldsymbol{A}_{3_\iota}$
111	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 1}$	$a^1_{1_\iota}$	$a^1_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
112	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 2}$	$a^1_{1_\iota}$	$a^1_{2_\iota}$	$a^2_{3_\iota}$
121	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 3}$	$a^1_{1_\iota}$	$a^2_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
122	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 4}$	$a^1_{1_\iota}$	$a^2_{2_\iota}$	$a^2_{3_\iota}$
211	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 5}$	$a^2_{1_\iota}$	$a^1_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
212	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 6}$	$a^2_{1_\iota}$	$a^1_{2_\iota}$	$a^2_{3_\iota}$
221	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 7}$	$a^2_{1_\iota}$	$a^2_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
222	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 8}$	$a^2_{1_\iota}$	$a^2_{2_\iota}$	$a^2_{3_\iota}$

(3) $\boldsymbol{A}_{1_\iota} \triangleq \{ a_{1_\iota} \,|\, a_{1_\iota} = a^1_{1_\iota}, a^2_{1_\iota}, a^3_{1_\iota} \}$, $\boldsymbol{A}_{2_\iota} \triangleq \{ a_{2_\iota} \,|\, a_{2_\iota} = a^1_{2_\iota}, a^2_{2_\iota}, a^3_{2_\iota} \}$,

$\boldsymbol{A}_{3_\iota} \triangleq \{a^1_{3_\iota}\}$, $\mathfrak{X}_\iota \triangleq \{ \xi_\iota \,|\, \xi_\iota = 1_\iota, 2_\iota, 3_\iota \}$ の場合の $\boldsymbol{A}_\iota$.

$\boldsymbol{E}_\iota \triangleq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \times \{1\}$ からの重複順列.

$3^2 \times 1 = 9$ 個の期枝 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\iota \cdot m}\,(m = 1, 2, \cdots, 9)$ がある.

$\boldsymbol{E}_\iota$の重複順列	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot m}$	$\boldsymbol{A}_{1_\iota}$	$\boldsymbol{A}_{2_\iota}$	$\boldsymbol{A}_{3_\iota}$
111	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 1}$	$a^1_{1_\iota}$	$a^1_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
121	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 2}$	$a^1_{1_\iota}$	$a^2_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
131	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 3}$	$a^1_{1_\iota}$	$a^3_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
211	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 4}$	$a^2_{1_\iota}$	$a^1_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
221	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 5}$	$a^2_{1_\iota}$	$a^2_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
231	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 6}$	$a^2_{1_\iota}$	$a^3_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
311	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 7}$	$a^3_{1_\iota}$	$a^1_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
321	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 8}$	$a^3_{1_\iota}$	$a^2_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$
331	$\boldsymbol{a}_{\iota\cdot 9}$	$a^3_{1_\iota}$	$a^3_{2_\iota}$	$a^1_{3_\iota}$

(4) $\boldsymbol{A}_{1_\iota} \triangleq \{ a_{1_\iota} \,|\, a_{1_\iota} = a^1_{1_\iota}, a^2_{1_\iota}, a^3_{1_\iota} \}$, $\boldsymbol{A}_{2_\iota} \triangleq \{ a_{2_\iota} \,|\, a_{2_\iota} = a^1_{2_\iota}, a^2_{2_\iota} \}$ の場合の $\boldsymbol{A}_\iota$.

$\boldsymbol{E}_\iota \triangleq \{1,2,3\} \times \{1,2\}$ からの重複順列.

$3 \times 2 = 6$ 個の期枝 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\iota \cdot m}\,(m = 1, 2, \cdots, 6)$ がある.

$\boldsymbol{E}_l$の重複順列	$\boldsymbol{a}_{l\cdot m}$	$\boldsymbol{A}_{1_l}$	$\boldsymbol{A}_{2_l}$
11	$\boldsymbol{a}_{l\cdot 1}$	$a^1_{1_l}$	$a^1_{2_l}$
12	$\boldsymbol{a}_{l\cdot 2}$	$a^1_{1_l}$	$a^2_{2_l}$
21	$\boldsymbol{a}_{l\cdot 3}$	$a^2_{1_l}$	$a^1_{2_l}$
22	$\boldsymbol{a}_{l\cdot 4}$	$a^2_{1_l}$	$a^2_{2_l}$
31	$\boldsymbol{a}_{l\cdot 5}$	$a^3_{1_l}$	$a^1_{2_l}$
32	$\boldsymbol{a}_{l\cdot 6}$	$a^3_{1_l}$	$a^2_{2_l}$

1.4. 期分割とプレイヤー分割

1.4.1. 期分割

定義 3　期分割 $\mathfrak{X}_{\mathfrak{L}}$

期節集合 $\boldsymbol{X}_l$ による節集合 $\boldsymbol{X}$ の分割

$$\mathfrak{X}_{\mathfrak{L}} \triangleq \{\boldsymbol{X}_l \mid l \in \mathfrak{L}\}$$

を $\boldsymbol{X}$ の期分割という．定義により，期分割 $\mathfrak{X}$ については，

$$\boldsymbol{X} = \sum\nolimits_{l \in \mathfrak{L}} \boldsymbol{X}_l.$$

1.4.2. プレイヤー分割

ゲームのルールにより，期 $l \in \mathfrak{L}$ のプレイヤー，すなわち，期プレイヤー $j_l \in \mathfrak{J}$ は決まっており，逆にプレイヤー $j \in \mathfrak{J}$ が行動する期，すなわち，プレイヤー期 $l = l^j$ の全体であるプレイヤー期集合 $\mathfrak{L}^j \subset \mathfrak{L}$ は決まっている．この点に留意し，期分割 $\mathfrak{X} \triangleq \{\boldsymbol{X}_l \mid l \in \mathfrak{L}\}$ の配列を次のように変更する．

① 期集合 $\mathfrak{L}$ を，プレイヤー $j \in \mathfrak{J}$ に対応して，プレイヤー期集合 $\mathfrak{L}^j \subset \mathfrak{L} = \sum_{j \in \mathfrak{J}} \mathfrak{L}^j$,

$$\mathfrak{L}^j \triangleq \{l \mid l = l^j = l^{\sigma_j} \in \mathfrak{L},\ \sigma_j \in S_j\}, \quad \mathcal{S}_j \triangleq \{\sigma_j \mid \sigma_j = 1_j, 2_j, \cdots, S_j\}$$

ごとに分割し，新たな期族

$$\mathfrak{L} \triangleq \{\mathfrak{L}^j \mid j \in \mathfrak{J}\}$$

を構成する．その際，$\mathfrak{L}^j \in \mathfrak{L}$ の各成分期 $l = l^j = l^{\sigma_j} \in \mathfrak{L}^j$ については辞書式順序を保持しておく．

② 次に，$l \in \mathfrak{L}^j$ に対応する期節集合 $\boldsymbol{X}_l \subset \boldsymbol{X}$ の和であるプレイヤー期節集合

$$\boldsymbol{X}^j \triangleq \{ x^j \mid x^j = x_l \in \boldsymbol{X}_l,\ l \in \mathfrak{L}^j \} = \sum_{l \in \mathfrak{L}^j} \boldsymbol{X}_l \subset \boldsymbol{X}$$

を構成する．

定義 4　プレイヤー分割 $\mathfrak{X}$

集合族

$$\begin{cases} \mathfrak{X} \triangleq \{ \boldsymbol{X}^j \mid j \in \mathfrak{J} \}, \\ \boldsymbol{X} = \sum_{j \in \mathfrak{J}} \boldsymbol{X}^j = \sum_{j \in \mathfrak{J}} \sum_{l \in \mathfrak{L}^j} \boldsymbol{X}_l \end{cases}$$

は $\boldsymbol{X}^j (j \in \mathfrak{J})$ による $\boldsymbol{X}$ の分割であるが，これを節集合 $\boldsymbol{X}$ のプレイヤー分割という．

1.5.　純戦略のプレイヤー枝とゲーム枝

定義 5　プレイヤー局所節 x^j，プレイヤー節 $\boldsymbol{x}^j$

集合

$$\boldsymbol{X}^j \triangleq \{ x^j \mid x^j = x_l = x_{\xi_l} \in \boldsymbol{X}_l,\ l \in \mathfrak{L}^j,\ \xi_l \in \mathfrak{X}_l \} = \sum_{l \in \mathfrak{L}^j} \boldsymbol{X}_l \subset \boldsymbol{X}$$

をプレイヤー期節集合といい，成分 $x^j = x_l = x_{\xi_l}$ をプレイヤー局所節という．プレイヤー局所節 $x^j = x_l \,(l \in \mathfrak{L}^j)$ によって構成される列

$$\boldsymbol{x}^j \triangleq (\boldsymbol{x}_l)_{l \in \mathfrak{L}^j} = \big((x_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l}\big)_{l \in \mathfrak{L}^j}$$

をプレイヤー節という．ここで，$\boldsymbol{x}_l \,(l \in \mathfrak{L}^j)$ はプレイヤー期節である．

例 3　期 $l = l^j = l^{\sigma_j}$ とプレイヤー j の関係

期	期節	プレイヤー	プレイヤー期	プレイヤー期節
l	$\boldsymbol{x}_l$	j	l^{σ_j}	$\boldsymbol{x}_{l^{\sigma_j}}$
0	$\boldsymbol{x}_0$	0	0^{1_0}	$\boldsymbol{x}_{0^{1_0}}$
1	$\boldsymbol{x}_1$	1	1^{1_1}	$\boldsymbol{x}_{1^{1_1}}$
2	$\boldsymbol{x}_2$	2	2^{1_2}	$\boldsymbol{x}_{2^{1_2}}$
3	$\boldsymbol{x}_3$	3	3^{1_3}	$\boldsymbol{x}_{3^{1_3}}$
4	$\boldsymbol{x}_4$	0	4^{2_0}	$\boldsymbol{x}_{4^{2_0}}$
5	$\boldsymbol{x}_5$	1	5^{2_1}	$\boldsymbol{x}_{5^{2_1}}$

期	期節	プレイヤー	プレイヤー期	プレイヤー期節
6	$\boldsymbol{x}_6$	2	6^{2_2}	$\boldsymbol{x}_{6^{2_2}}$
7	$\boldsymbol{x}_7$	1	7^{3_1}	$\boldsymbol{x}_{7^{3_1}}$
8	$\boldsymbol{x}_8$	3	8^{2_3}	$\boldsymbol{x}_{8^{2_3}}$
9	$\boldsymbol{x}_9$	2	9^{3_2}	$\boldsymbol{x}_{9^{3_2}}$

$$\mathcal{J}=\{0,1,2,3\},\ \mathcal{I}=\{1,2,3\},\ \mathcal{L}=\{0,1,\cdots,9\},$$

$$\mathcal{L}^0=\{\,l\mid l=l^{\sigma_0}=0^{1_0},4^{2_0}\},\ \boldsymbol{x}^0=(\boldsymbol{x}_{0^{1_0}},\ \boldsymbol{x}_{4^{2_0}}),$$

$$\mathcal{L}^1=\{\,l\mid l=l^{\sigma_1}=1^{1_1},5^{2_1},7^{3_1}\},\ \boldsymbol{x}^1=(\boldsymbol{x}_{1^{1_1}},\ \boldsymbol{x}_{5^{2_1}},\boldsymbol{x}_{7^{3_1}}),$$

$$\mathcal{L}^2=\{\,l\mid l=l^{\sigma_2}=2^{1_2},6^{2_2},9^{3_2}\},\ \boldsymbol{x}^2=(\boldsymbol{x}_{2^{1_2}},\ \boldsymbol{x}_{6^{2_2}},\boldsymbol{x}_{9^{3_2}}),$$

$$\mathcal{L}^3=\{\,l\mid l=l^{\sigma_3}=3^{1_3},8^{2_3}\},\ \boldsymbol{x}^3=(\boldsymbol{x}_{3^{1_3}},\ \boldsymbol{x}_{8^{2_3}}).$$

定義 6　プレイヤー枝 $\boldsymbol{a}^j$，ゲーム枝 $\boldsymbol{a}$

プレイヤー期枝集合 $\boldsymbol{A}_l\ (l\in\mathcal{L}^j)$ の直積集合

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^j &\triangleq \bigtimes_{l\in\mathcal{L}^j}\boldsymbol{A}_l=\bigtimes_{l\in\mathcal{L}^j}\bigtimes_{\xi_l\in\mathfrak{X}_l}\boldsymbol{A}_{\xi_l}\\ &=\left\{\boldsymbol{a}^j\ \middle|\ \boldsymbol{a}^j\triangleq(\boldsymbol{a}_l)_{l\in\mathcal{L}^j},\ \ \boldsymbol{a}_l\in\boldsymbol{A}_l\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^j\triangleq(\boldsymbol{a}_l)_{l\in\mathcal{L}^j}&=\left(\left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}\right)_{\xi_l\in\mathfrak{X}_l}\right)_{l\in\mathcal{L}^j},\quad \alpha_{\xi_l}\in\mathcal{A}_{\xi_l}\\ &=\left(a_{1_l}^{\alpha_{1_l}},a_{2_l}^{\alpha_{2_l}},\cdots,a_{\mathrm{X}_l}^{\alpha_{\mathrm{X}_l}}\right)_{l\in\mathcal{L}^j}\end{aligned}$$

をプレイヤー枝集合といい，その成分 $\boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j$ をプレイヤー枝という．プレイヤー枝集合 $\boldsymbol{A}^j$ は $\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\prod_{\xi_l\in\mathfrak{X}_l}A_{\xi_l}$ 個のプロファイルからなる集合である．

また，プレイヤー枝集合 $\boldsymbol{A}^j\ (j\in\mathcal{J})$ の直積集合

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&\triangleq\boldsymbol{A}^0\times\boldsymbol{A}^{\mathcal{I}}\triangleq\boldsymbol{A}^0\times\left(\bigtimes_{i\in\mathcal{I}}\boldsymbol{A}^i\right)\\ &=\bigtimes_{j\in\mathcal{J}}\boldsymbol{A}^j=\bigtimes_{j\in\mathcal{J}}\bigtimes_{l\in\mathcal{L}^j}\bigtimes_{\xi_l\in\mathfrak{X}_l}\boldsymbol{A}_{\xi_l}\\ &=\left\{\boldsymbol{a}\ \middle|\ \begin{aligned}&\boldsymbol{a}\triangleq(\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{a}^{\mathcal{I}})\triangleq(\boldsymbol{a}^0,(\boldsymbol{a}^i)_{i\in\mathcal{I}})\\ &\quad=((\boldsymbol{a}_l)_{l\in\mathcal{L}^0},\ ((\boldsymbol{a}_l)_{l\in\mathcal{L}^i})_{i\in\mathcal{I}}),\ \boldsymbol{a}_l\in\boldsymbol{A}_l\end{aligned}\right\}\end{aligned}$$

をゲーム枝集合といい，その成分 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^0,\ \boldsymbol{a}^{\mathcal{I}})=(\boldsymbol{a}^0,(\boldsymbol{a}^i)_{i\in\mathcal{I}})\in\boldsymbol{A}$ をゲーム枝という．ゲーム枝集合 $\boldsymbol{A}$ は $\prod_{j\in\mathcal{J}}\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\prod_{\xi_l\in\mathfrak{X}_l}A_{\xi_l}$ 個のプロファイル $\boldsymbol{a}$ からなる集合である．またしばしば，ゲーム枝 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^0,\ \boldsymbol{a}^{\mathcal{I}})=(\boldsymbol{a}^0,(\boldsymbol{a}^i)_{i\in\mathcal{I}})\in\boldsymbol{A}$ から偶然行動枝 $\boldsymbol{a}^0$ を除いたプロファイル $\boldsymbol{a}^{\mathcal{I}}\in\boldsymbol{A}^{\mathcal{I}}$ をゲーム枝ということがある．

1.6.　混合戦略

定義 7　局所混合戦略分布 q_{ξ_l}，期混合戦略分布 q_l

$(\boldsymbol{A}_{\xi_l}, q_{\xi_l})$ を期局所枝集合 $\boldsymbol{A}_{\xi_l}\,(\xi_l \in \mathfrak{X}_l)$（有限集合）上の確率空間とし，さらに，各局所枝 $a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}$ は互いに独立な確率変数であるとみなす[9]．確率測度または分布[10] q_{ξ_l} を局所混合戦略分布 local mixed strategies distribution といい，q_{ξ_l} の全体 $\mathcal{Q}_{\xi_l}$ を局所混合戦略分布空間という．局所混合戦略分布 $q_{\xi_l} \in \mathcal{Q}_{\xi_l} : \boldsymbol{A}_{\xi_l} \to [0,1]$ は A_{ξ_l} 個の局所枝 $a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}$ の生起確率 $q_{\xi_l}(a_{\xi_l})$ を定める[11]．すなわち，

$$\begin{cases} q_{\xi_l}(a_{\xi_l}) \in [0,1]\,, \ \sum_{a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}} q_{\xi_l}(a_{\xi_l}) = 1, \quad \text{or} \\ q_{\xi_l}\left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}\right) \in [0,1]\,, \ \sum_{\alpha_{\xi_l} \in \mathcal{A}_{\xi_l}} q_{\xi_l}\left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}\right) = 1. \end{cases}$$

$(\boldsymbol{A}_l, q_l)$ を期枝集合 $\boldsymbol{A}_l\,(l \in \mathcal{L})$（有限集合）上の確率空間とする．分布 q_l を期混合戦略分布 stage mixed strategies distribution といい，q_l の全体 $\mathcal{Q}_l$ を期混合戦略分布空間という．期混合戦略分布 $q_l \in \mathcal{Q}_l : \boldsymbol{A}_l \to [0,1]$ は $\prod_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l} A_{\xi_l}$ 個の期枝 $\boldsymbol{a}_l \triangleq \left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}\right)_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l}$ の生起確率 $q_l(\boldsymbol{a}_l)$ を定める．すなわち，

$$\begin{cases} q_l(\boldsymbol{a}_l) \in [0,1]\,, \ \sum_{\boldsymbol{a}_l \in \boldsymbol{A}_l} q_l(\boldsymbol{a}_l) = 1, \quad \text{or} \\ q_l\left(\left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}\right)_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l}\right) \in [0,1]\,, \ \sum_{\alpha_{\xi_l} \in \mathcal{A}_{\xi_l}} q_l\left(\left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}\right)_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l}\right) = 1. \end{cases}$$

注意 3　$(\boldsymbol{A}_{\xi_l}, q_{\xi_l})$ を期局所枝集合 $\boldsymbol{A}_{\xi_l}$（有限集合）上の確率空間とする．定められた番号 $\alpha_{\xi_l} = \overline{\alpha}_{\xi_l} \in \mathcal{A}_{\xi_l}$ に対して，局所枝 $\overline{a}_{\xi_l} \triangleq a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}$ を（生起確率 1 で）選択するということは，局所混合戦略分布 $q_{\xi_l} \in \mathcal{Q}_{\xi_l}$ として，定義関数 indicator function，$\mathbb{I}_{\overline{a}_{\xi_l}} : \boldsymbol{A}_{\xi_l} \to \{0,1\}$，

$$q_{\xi_l}(a_{\xi_l}) = \mathbb{I}_{\overline{a}_{\xi_l}}(a_{\xi_l}) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{for} \ a_{\xi_l} = \overline{a}_{\xi_l},\ a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}, \\ 0 & \text{for} \ a_{\xi_l} \neq \overline{a}_{\xi_l},\ a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l} \end{cases}$$

9)　ごく自然な仮定である．
10)　伊藤 [4]p.74 の用語法にしたがう．
11)　確率理論では，通常，確率変数の集合によって定義される集合関数である分布と確率変数の特定集合に対応する集合関数値に対応する生起確率を区別して表現する．しかし，ここでは誤解のおそれがないので，両者を同一記号 q で表示する．

が定められているということに他ならない．このようにして，任意の局所枝 $a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}$ に対して，局所混合戦略分布 $q_{\xi_l} = \mathbb{I}_{a_{\xi_l}} \in \mathcal{Q}_{\xi_l}$ が対応している．全く同様に，任意の期枝 $\boldsymbol{a}_l \in \boldsymbol{A}_l$ は期混合戦略分布 $q_l \in \mathcal{Q}_l$ の特別事例である．

今後，任意の $a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}$ ないし $\boldsymbol{a}_l \in \boldsymbol{A}_l$ について混合戦略分布を考えるときには，常に，上の方法で定められる分布 $q_{\xi_l} = \mathbb{I}_{a_{\xi_l}} \in \mathcal{Q}_{\xi_l}$ ないし $q_l = \mathbb{I}_{\boldsymbol{a}_l} \in \mathcal{Q}_l$ を考える．

定理 1　局所混合戦略分布と期混合戦略分布の間には 1 対 1 対応[12]（全単射）関係がある．すなわち，次の関係が成立する．

(1)　局所混合戦略分布の組 $(q_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}$，$q_{\xi_l} \in \mathcal{Q}_{\xi_l}$ は，対応する期混合戦略分布 $q_l \in \mathcal{Q}_l$ を導く．導かれた期混合戦略分布 $q_l \in \mathcal{Q}_l$ は，それを導いたもとの局所混合戦略の組 $(q_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}$，$q_{\xi_l} \in \mathcal{Q}_{\xi_l}$ を導く．

(2)　期混合戦略分布 $q_l \in \mathcal{Q}_l$ は，対応する局所混合戦略分布の組 $(q_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}$，$q_{\xi_l} \in \mathcal{Q}_{\xi_l}$ を導く．導かれた局所混合戦略分布 $(q_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}$，$q_{\xi_l} \in \mathcal{Q}_{\xi_l}$ は，それを導いたもとの期混合戦略分布 $q_l \in \mathcal{Q}_l$ を導く．

証明　各局所枝 $a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}$ は互いに独立な確率変数であることに留意しておく．

(1)．任意に与えられた期枝を

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{a}}_l &= (\overline{a}_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l} = \left(a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}}\right)_{\xi_l \in \mathcal{X}_l} \\ &= \left(a_{1_l}^{\overline{\alpha}_{1_l}},\ a_{2_l}^{\overline{\alpha}_{2_l}},\ \cdots,\ a_{X_l}^{\overline{\alpha}_{X_l}}\right) \in \boldsymbol{A}_l, \quad \overline{\alpha}_{\xi_l} \in \mathcal{A}_{\xi_l}\end{aligned}$$

ただし，X_l 個の組 $(\overline{\alpha}_{1_l}, \overline{\alpha}_{2_l}, \cdots, \overline{\alpha}_{X_l})$ は，

$$\{1,2,\cdots,A_{1_l}\},\ \{1,2,\cdots,A_{2_l}\},\cdots,\ \{1,2,\cdots,A_{X_l}\}$$

の中から 1 つずつ選んでつくる $\prod_{\xi_l \in \mathcal{X}_l} A_{\xi_l}$ 個の順列の 1 つ——とする．任意に与えられた局所混合戦略分布

$$(\overline{q}_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l} = (\overline{q}_{1_l}, \overline{q}_{2_l}, \cdots, \overline{q}_{X_l}) \in \mathcal{Q}_{1_l} \times \mathcal{Q}_{2_l} \times \cdots \times \mathcal{Q}_{X_l}$$

に対して，期混合戦略分布 $\overline{q}_l \in \mathcal{Q}_l$ を規則

$$\overline{q}_l\,(\overline{\boldsymbol{a}}_l) = \overline{q}_l\,\left((\overline{a}_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}\right) = \overline{q}_l\,\left(\left(a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}}\right)_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}\right)$$

12) 期分布と局所分布の関係は，結合分布と周辺分布の関係に類似している．

$$
\begin{aligned}
&= \overline{q}_\iota \left(a_{1_\iota}^{\overline{\alpha}_{1_\iota}},\ a_{2_\iota}^{\overline{\alpha}_{2_\iota}},\ \cdots,\ a_{X_\iota}^{\overline{\alpha}_{X_\iota}}\right) \\
&\triangleq \prod\nolimits_{\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota} \overline{q}_{\xi_\iota}\left(\overline{a}_{\xi_\iota}\right) = \prod\nolimits_{\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota} \overline{q}_{\xi_\iota}\left(a_{\xi_\iota}^{\overline{\alpha}_{\xi_\iota}}\right) \\
&= \overline{q}_{1_\iota}\left(a_{1_\iota}^{\overline{\alpha}_{1_\iota}}\right) \overline{q}_{2_\iota}\left(a_{2_\iota}^{\overline{\alpha}_{2_\iota}}\right) \cdots \overline{q}_{X_\iota}\left(a_{X_\iota}^{\overline{\alpha}_{X_\iota}}\right)
\end{aligned}
$$

によって定める．次に，上に導かれた期混合戦略分布 $\overline{q}_\iota \in \mathcal{Q}_\iota$ を用いると，任意に与えられた局所枝 $\overline{a}_{\overline{\xi}_\iota} \triangleq a_{\overline{\xi}_\iota}^{\overline{\alpha}_{\overline{\xi}_\iota}}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\overline{q}_{\xi_\iota}\left(a_{\overline{\xi}_\iota}^{\overline{\alpha}_{\overline{\xi}_\iota}}\right) &= \overline{q}_{\xi_\iota}\left(a_{\overline{\xi}_\iota}^{\overline{\alpha}_{\overline{\xi}_\iota}}\right) \prod\nolimits_{\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota \setminus \{\overline{\xi}_\iota\}} \left[\sum\nolimits_{\alpha_{\xi_\iota} \in \mathcal{A}_{\xi_\iota}} \overline{q}_{\xi_\iota}\left(a_{\xi_\iota}^{\alpha_{\xi_\iota}}\right)\right] \\
&= \sum\nolimits_{\boldsymbol{a}_\iota \in \boldsymbol{A}_\iota} \left[\prod\nolimits_{\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota} \overline{q}_{\xi_\iota}\left(a_{\xi_\iota}^{\alpha_{\xi_\iota}}\right)\right] \mathbb{I}_{\overline{a}_{\overline{\xi}_\iota}}\left(\boldsymbol{a}_\iota\right) \\
&= \sum\nolimits_{\boldsymbol{a}_\iota \in \boldsymbol{A}_\iota} \overline{q}_\iota\left(\boldsymbol{a}_\iota\right) \mathbb{I}_{\overline{a}_{\overline{\xi}_\iota}}\left(\boldsymbol{a}_\iota\right),
\end{aligned}
$$

ただし， $\mathbb{I}_{\overline{a}_{\overline{\xi}_\iota}} : \boldsymbol{A}_\iota \to \{0, 1\}$ は定義関数[13)]，

$$
\mathbb{I}_{\overline{a}_{\overline{\xi}_\iota}}\left(\boldsymbol{a}_\iota\right) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad \overline{a}_{\overline{\xi}_\iota} \in \arg \boldsymbol{a}_\iota, \\ 0 & \text{for} \quad \overline{a}_{\overline{\xi}_\iota} \notin \arg \boldsymbol{a}_\iota \end{cases}
$$

——が成立する．明らかに，上付きバーを付した上の関係は，上付きバーのない一般的関係に置き換えることができ，結論を得る．

(2). 任意に与えられた局所枝を $\overline{a}_{\xi_\iota} = a_{\xi_\iota}^{\overline{\alpha}_{\xi_\iota}}$, $\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota$, $\overline{\alpha}_{\xi_\iota} \in \mathcal{A}_{\xi_\iota}$ とする．任意に与えられた期混合戦略分布 $\overline{q}_\iota \in \mathcal{Q}_\iota$ に対して，局所混合戦略分布 $\overline{q}_{\xi_\iota} \in \mathcal{Q}_{\xi_\iota}$ を，

$$
\overline{q}_{\xi_\iota}\left(\overline{a}_{\xi_\iota}\right) = \overline{q}_{\xi_\iota}\left(a_{\xi_\iota}^{\overline{\alpha}_{\xi_\iota}}\right) \triangleq \sum\nolimits_{\boldsymbol{a}_\iota \in \boldsymbol{A}_\iota} \overline{q}_\iota\left(\boldsymbol{a}_\iota\right)\ \mathbb{I}_{\overline{a}_{\xi_\iota}}\left(\boldsymbol{a}_\iota\right)
$$

によって定める．次に，上に導かれた局所混合戦略分布 $\overline{q}_{\xi_\iota} \in \mathcal{Q}_{\xi_\iota}$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
\overline{q}_\iota\left(\overline{\boldsymbol{a}}_\iota\right) &= \sum\nolimits_{\boldsymbol{a}_\iota \in \boldsymbol{A}_\iota} \left[\prod\nolimits_{\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota} \overline{q}_\iota\left(\boldsymbol{a}_\iota\right)\ \mathbb{I}_{\overline{a}_{\xi_\iota}}\left(\boldsymbol{a}_\iota\right)\right] \\
&= \prod\nolimits_{\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota} \left[\sum\nolimits_{\boldsymbol{a}_\iota \in \boldsymbol{A}_\iota} \overline{q}_\iota\left(\boldsymbol{a}_\iota\right)\ \mathbb{I}_{\overline{a}_{\xi_\iota}}\left(\boldsymbol{a}_\iota\right)\right] \\
&= \prod\nolimits_{\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota} \overline{q}_{\xi_\iota}\left(\overline{a}_{\xi_\iota}\right) = \prod\nolimits_{\xi_\iota \in \mathcal{X}_\iota} \overline{q}_{\xi_\iota}\left(a_{\xi_\iota}^{\overline{\alpha}_{\xi_\iota}}\right)
\end{aligned}
$$

が成立する．ここで，上の関係を一般化することにより，結論を得る．□

定義 8　プレイヤー混合戦略分布 q^j, ゲーム混合戦略分布 $\boldsymbol{q}$

$(\boldsymbol{A}^j, q^j)$ をプレイヤー枝集合 $\boldsymbol{A}^j$ 上の確率空間とする．分布 q^j をプレイヤー混合戦略分布 player's mixed strategies distribution といい，q^j の全体 $\mathcal{Q}^j$ を

13) $\overline{a}_{\xi_\iota} \in \arg \boldsymbol{a}_\iota$ とは，$\mathrm{pr}_{\xi_\iota}\left(\boldsymbol{a}_\iota\right) = \overline{a}_{\xi_\iota}$ という意味である．

プレイヤー混合戦略分布空間という．混合戦略分布 $q^j \in \mathscr{Q}^j$，$q^j : \boldsymbol{A}^j \to [0,1]$ が与えられると，$\prod_{l \in \mathcal{L}^j} \prod_{\xi_l \in \mathcal{X}_l} A_{\xi_l}$ 個のプレイヤー枝 $\boldsymbol{a}^j \in \boldsymbol{A}^j$ の混合戦略分布の生起確率 $q^j(\boldsymbol{a}^j)$ が定まる．すなわち，

$$\begin{cases} q^j(\boldsymbol{a}^j) \in [0,1], \ \sum_{\boldsymbol{a}^j \in \boldsymbol{A}^j} q^j(\boldsymbol{a}^j) = 1, \ \text{or} \\ q^j\left(\left(\left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}\right)_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}\right)_{l \in \mathcal{L}^j}\right) \in [0,1], \\ \quad \sum_{l \in \mathcal{L}^j} \sum_{\xi_l \in \mathcal{X}_l} q^j\left(\left(\left(a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}\right)_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}\right)_{l \in \mathcal{L}^j}\right) = 1. \end{cases}$$

なお，プレイヤー枝 $\overline{\boldsymbol{a}}^j \in \boldsymbol{A}^j$ に対して，混合戦略分布 $q^j \triangleq \mathbb{I}_{\overline{\boldsymbol{a}}^j} : \boldsymbol{A}_l \to \{0, 1\}$，

$$\mathbb{I}_{\overline{\boldsymbol{a}}^j}(\boldsymbol{a}^j) = \begin{cases} 1 & \text{for} \ \boldsymbol{a}^j = \overline{\boldsymbol{a}}^j, \ \boldsymbol{a}^j \in \boldsymbol{A}^j, \\ 0 & \text{for} \ \boldsymbol{a}^j \neq \overline{\boldsymbol{a}}^j, \ \boldsymbol{a}^j \in \boldsymbol{A}^j \end{cases}$$

はプレイヤー枝 $\overline{\boldsymbol{a}}^j \in \boldsymbol{A}^j$ の生起確率を 1 で与える分布である．

プレイヤー混合戦略分布空間 $\mathscr{Q}^j$ $(j \in \mathcal{J})$ の直積空間

$$\boldsymbol{\mathscr{Q}} \triangleq \mathscr{Q}^0 \times \boldsymbol{\mathscr{Q}}^{\mathcal{I}} \triangleq \mathscr{Q}^0 \times \left(\bigtimes_{i \in \mathcal{I}} \mathscr{Q}^i\right) = \bigtimes_{j \in \mathcal{J}} \mathscr{Q}^j$$

をゲーム混合戦略分布空間といい，その成分 $\boldsymbol{q} = (q^0, \boldsymbol{q}^{\mathcal{I}}) = (q^0, (q^i)_{i \in \mathcal{I}}) \in \boldsymbol{\mathscr{Q}}$ をゲーム混合戦略分布という．混合戦略分布 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{\mathscr{Q}}$ は，ゲーム枝 $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{a}^{\mathcal{I}}) = (\boldsymbol{a}^0, (\boldsymbol{a}^i)_{i \in \mathcal{I}}) \in \boldsymbol{A} \triangleq \boldsymbol{A}^0 \times \boldsymbol{A}^{\mathcal{I}}$ に対して，混合戦略分布の生起確率

$$\left(q^0(\boldsymbol{a}^0), (q^i(\boldsymbol{a}^i))_{i \in \mathcal{I}}\right), \ \boldsymbol{a}^i \in \boldsymbol{A}^i$$

を定める．

定理 2　局所混合戦略分布とプレイヤー混合戦略分布の間には 1 対 1 対応（全単射）関係がある．すなわち，次の関係が成立する．

(1)　局所混合戦略分布の組 $(q_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}$，$q_{\xi_l} \in \mathscr{Q}_{\xi_l}$ は，対応するプレイヤー混合戦略分布 $q^j \in \mathscr{Q}^j$ を導く．導かれたプレイヤー混合戦略分布 $q^j \in \mathscr{Q}^j$ は，それを導いたもとの局所混合戦略分布の組 $(q_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}$，$q_{\xi_l} \in \mathscr{Q}_{\xi_l}$ を導く．

(2)　プレイヤー混合戦略分布 $q^j \in \mathscr{Q}^j$ は，対応する局所混合戦略分布の組 $(q_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}$，$q_{\xi_l} \in \mathscr{Q}_{\xi_l}$ を導く．導かれた局所混合戦略分布の組 $(q_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}$，$q_{\xi_l} \in \mathscr{Q}_{\xi_l}$ は，それを導いたもとのプレイヤー混合戦略分布 $q^j \in \mathscr{Q}^j$ を導く．

証明　(1)．任意に与えられたプレイヤー枝を

$$\overline{\boldsymbol{a}}^j=((\overline{a}_{\xi_l})_{\xi_l\in\mathcal{X}_l})_{l\in\mathcal{L}^j}=((a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}})_{\xi_l\in\mathcal{X}_l})_{l\in\mathcal{L}^j},\ \overline{\alpha}_{\xi_l}\in\mathcal{A}_{\xi_l}$$

とする．任意に与えられた局所混合戦略分布

$$((\overline{q}_{\xi_l})_{\xi_l\in\mathcal{X}_l})_{l\in\mathcal{L}^j}\in(\times_{\xi_l\in\mathcal{X}_l}\mathcal{Q}_{\xi_l})_{l\in\mathcal{L}^j}$$

に対して，プレイヤー期混合戦略分布 $\overline{q}^j\in\mathcal{Q}^j$ を規則

$$\overline{q}^j(\boldsymbol{a}^j)=\overline{q}^j\left(((\overline{a}_{\xi_l})_{\xi_l\in\mathcal{X}_l})_{l\in\mathcal{L}^j}\right)=\overline{q}^j\left(((a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}})_{\xi_l\in\mathcal{X}_l})_{l\in\mathcal{L}^j}\right)$$

$$\triangleq\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\prod_{\xi_l\in\mathcal{X}_l}\overline{q}_{\xi_l}(\overline{a}_{\xi_l})=\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\prod_{\xi_l\in\mathcal{X}_l}\overline{q}_{\xi_l}(a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}})$$

によって定める．次に，上に導かれた期混合戦略分布 $\overline{q}^j\in\mathcal{Q}^j$ を用いると，任意に与えられた局所枝 $\overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}\triangleq a_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}^{\overline{\alpha}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}}$, $\overline{l}\in\mathcal{L}^i$, $\overline{\xi}_{\overline{l}}\in\mathcal{X}_{\overline{l}}$, $\overline{\alpha}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}\in\mathcal{A}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}$ に対して，

$$\overline{q}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}(\overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}})=\overline{q}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}(\overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}})\prod_{(l,\xi_l)\in\mathcal{L}^j\times\mathcal{X}_l\setminus\{(\overline{l},\overline{\xi}_{\overline{l}})\}}\left[\sum_{\boldsymbol{a}_{\xi_l}\in\boldsymbol{A}_{\xi_l}}\overline{q}_{\xi_l}(a_{\xi_l})\right]$$

$$=\sum_{\boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\prod_{\xi_l\in\mathcal{X}_l}\overline{q}_{\xi_l}(a_{\xi_l})\right]\ \mathbb{I}_{\overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}}(\boldsymbol{a}^j)$$

$$=\sum_{\boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j}\overline{q}^j(\boldsymbol{a}^j)\ \mathbb{I}_{\overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}}(\boldsymbol{a}^j),$$

ただし，$\mathbb{I}_{\overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}}:\boldsymbol{A}^j\to\{0,1\}$ は定義関数，

$$\mathbb{I}_{\overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}}(\boldsymbol{a}^j)=\begin{cases}1 & \text{for}\quad \overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}\in\arg\boldsymbol{a}_{\overline{l}}\subset\arg\boldsymbol{a}^j,\ \boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j,\\ 0 & \text{for}\quad \overline{a}_{\overline{\xi}_{\overline{l}}}\notin\arg\boldsymbol{a}_{\overline{l}}\subset\arg\boldsymbol{a}^j,\ \boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j\end{cases}$$

——が成立する．ここで，上の関係を一般化することにより，結論を得る．

(2)．任意に与えられプレイヤー局所枝を $\overline{a}_l=\overline{a}_{\xi_l}=a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}}$, $l\in\mathcal{L}^j$, $\xi_l\in\mathcal{X}_l$, $\overline{\alpha}_{\xi_l}\in\mathcal{A}_{\xi_l}$ とすると，任意に与えられたプレイヤー混合戦略分布 $\overline{q}^j\in\mathcal{Q}^j$ に対して，プレイヤー局所混合戦略分布 $\overline{q}_{\xi_l}\in\mathcal{Q}_{\xi_l}$ を

$$\overline{q}_{\xi_l}(\overline{a}_{\xi_l})\triangleq\sum_{\boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j}\overline{q}^j(\boldsymbol{a}^j)\ \mathbb{I}_{\overline{a}_{\xi_l}}(\boldsymbol{a}^j),$$

によって定める．次に，上に導かれた局所混合戦略分布 $\overline{q}_{\xi_l}\in\mathcal{Q}_{\xi_l}$ を用いると，任意に与えられプレイヤー枝

$$\overline{\boldsymbol{a}}^j=((\overline{a}_{\xi_l})_{\xi_l\in\mathcal{X}_l})_{l\in\mathcal{L}^j}=((a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}})_{\xi_l\in\mathcal{X}_l})_{l\in\mathcal{L}^j},\ \overline{\alpha}_{\xi_l}\in\mathcal{A}_{\xi_l}$$

に対して，

$$\overline{q}^j(\overline{\boldsymbol{a}}^j)=\sum_{\boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j}\left[\overline{q}^j(\boldsymbol{a}^j)\ \mathbb{I}_{\overline{\boldsymbol{a}}^j}(\boldsymbol{a}^j)\right]$$

$$=\sum_{\boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\prod_{\xi_l\in\mathcal{X}_l}\overline{q}^j(\boldsymbol{a}^j)\ \mathbb{I}_{\overline{a}_{\xi_l}}(\boldsymbol{a}^j)\right]$$

$$=\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\prod_{\xi_l\in\mathcal{X}_l}\overline{q}_{\xi_l}(\overline{a}_{\xi_l})=\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\prod_{\xi_l\in\mathcal{X}_l}\overline{q}_{\xi_l}(a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}})$$

が成立する．ここで，上の関係を一般化することにより，結論を得る．□

系　任意に与えられたプレイヤー枝

$$\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}^j=(\overline{a}_{\xi_l})_{l\in\mathcal{L}^j}=\left(a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}}\right)_{l\in\mathcal{L}^j}\in\boldsymbol{A}^j,\ \xi_l\in\mathcal{X}_l,\ \overline{\alpha}_{\xi_l}\in\mathcal{A}_{\xi_l}$$

に対して，プレイヤー混合戦略分布 $\overline{q}^j\in\mathcal{Q}^j$ が与える上記プロファイルの生起確率は，

$$\overline{q}^j\left(\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}^j\right)=\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\overline{q}_{\xi_l}(\overline{a}_{\xi_l})=\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\overline{q}_{\xi_l}(a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}})$$

によって与えられる．

証明

$$\begin{aligned}\overline{q}^j\left(\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}^j\right)&=\sum_{\boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j}\left[\overline{q}^j(\boldsymbol{a}_j)\ \mathbb{I}_{\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}^j}(\boldsymbol{a}^j)\right]\\&=\sum_{\boldsymbol{a}^j\in\boldsymbol{A}^j}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\overline{q}^j(\boldsymbol{a}^j)\ \mathbb{I}_{\overline{a}_{\xi_l}}(\boldsymbol{a}^j)\right]\\&=\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\overline{q}_{\xi_l}(\overline{a}_{\xi_l})=\prod_{l\in\mathcal{L}^j}\overline{q}_{\xi_l}(a_{\xi_l}^{\overline{\alpha}_{\xi_l}}).\quad\square\end{aligned}$$

1.7.　情報集合の局所枝と期枝

定義 9　情報集合

ゲームのルールに次の仮定を追加する．すなわち，行動の選択に直面するプレイヤー $i\in\mathcal{I}$ に対してある情報を提供する $\boldsymbol{X}$ の非空部分集合 $\boldsymbol{U}\subset\boldsymbol{X}$ の存在を仮定する．プレイヤーに情報を提供するという意味で，この集合 $\boldsymbol{U}$ を情報集合と呼ぶ．

定義 10　局所情報集合，プレイヤー局所情報集合 $\boldsymbol{X}_l$

期 $l\in\mathcal{L}$ または $l\in\mathcal{L}^j$ において行動の選択に直面するプレイヤー $i\in\mathcal{I}$ に対してある情報を提供する，互いに排反する $U_l(\in\mathbb{N})$ 個の非空部分集合 $\boldsymbol{U}_l=\boldsymbol{U}_{v_l}\subset\boldsymbol{X}_l,\ v_l\in\mathcal{U}_l$ の族であって，かつ $\boldsymbol{X}_l$ を被覆する族を定義し，その集合族を $\mathfrak{U}_l$ とあらわす．すなわち，

$$\begin{cases}\mathfrak{U}_l\triangleq\{\boldsymbol{U}_l\mid\boldsymbol{U}_l=\boldsymbol{U}_{v_l},\ v_l\in\mathcal{U}_l\}=\{\boldsymbol{U}_{v_l}\mid v_l\in\mathcal{U}_l\},\\\mathcal{U}_l\triangleq\{v_l\mid v_l=1_l,2_l,\cdots,U_l\}\subset\mathbb{N}.\end{cases}$$

$l \in \mathcal{L}$ または $l \in \mathcal{L}^j$ に応じて，配列番号 $\upsilon_l \in \mathcal{U}_l$ に対応する $\boldsymbol{U}_l \in \mathfrak{U}_l$ を局所情報集合とかプレイヤー局所情報集合という．集合 $\mathcal{U}_l$ は U_l 個の局所（またはプレイヤー局所）情報集合の配列番号集合，集合族 $\mathfrak{U}_l$ は期節集合 $\boldsymbol{X}_l$ の分割である．すなわち，

$$\boldsymbol{X}_l = \sum\nolimits_{\upsilon_l \in \mathcal{U}_l} \boldsymbol{U}_{\upsilon_l}.$$

定義 11　プレイヤー情報集合 $\boldsymbol{U}^j$

局所情報集合族

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}^j &\triangleq \{\boldsymbol{U}^j \mid \boldsymbol{U}^j = \boldsymbol{U}_l \in \mathfrak{U}_l,\ l \in \mathcal{L}^j\} \\ &= \{\boldsymbol{U}^j \mid \boldsymbol{U}^j = \boldsymbol{U}_{\upsilon_l} \in \mathfrak{U}_l,\ \upsilon_l \in \mathcal{U}_l,\ l \in \mathcal{L}^j\}\end{aligned}$$

をプレイヤー情報集合族，その成分 $\boldsymbol{U}^j \in \mathfrak{U}^j$ をプレイヤー情報集合という．

定義 12　局所枝 $e_l = e_{\upsilon_l}$

局所情報集合 $\boldsymbol{U}_l = \boldsymbol{U}_{\upsilon_l} \in \mathfrak{U}_l\,(l \in \mathcal{L},\ \upsilon_l \in \mathcal{U}_l)$ に対して，

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_l \triangleq \{e_l \mid e_l = e_l^{\varepsilon_l},\ \varepsilon_l \in \mathcal{E}_l\}, \\ \mathcal{E}_l \triangleq \{\varepsilon_l \mid \varepsilon_l = 1, 2 \cdots, E_l\} \subset \mathcal{N} \end{cases}$$

あるいは，

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{\upsilon_l} \triangleq \left\{e_{\upsilon_l} \,\middle|\, e_{\upsilon_l} = e_{\upsilon_l}^{\varepsilon_{\upsilon_l}},\ \varepsilon_{\upsilon_l} \in \mathcal{E}_{\upsilon_l}\right\}, \\ \mathcal{E}_{\upsilon_l} \triangleq \{\varepsilon_{\upsilon_l} \mid \varepsilon_{\upsilon_l} = 1,\ 2, \cdots, E_{\upsilon_l}\} \subset \mathcal{N} \end{cases}$$

とおく．集合 $\boldsymbol{E}_l$ は局所情報集合 $\boldsymbol{U}_l \in \mathfrak{U}_l$ の下で選択可能な選択肢（有向枝）の全体（有限集合）であり，これを期局所枝集合（または期局所情報集合）といい，その成分 $e_l = e_l^{\varepsilon_l}$ を期局所枝（または期局所情報集合）——以後，局所枝——という．また，集合 $\mathcal{E}_l$ は局所枝の配列番号集合である．

定義 13　期枝 $\boldsymbol{e}_l$

$U_l\,(\in \mathcal{N})$ 個の期局所枝集合 $\boldsymbol{E}_{\upsilon_l}\,(\upsilon_l \in \mathcal{U}_l)$ の直積集合

$$\boldsymbol{E}_l \triangleq \bigtimes\nolimits_{\upsilon_l \in \mathcal{U}_l} \boldsymbol{E}_{\upsilon_l} = \left\{\boldsymbol{e}_l \,\middle|\, \boldsymbol{e}_l \triangleq \left(e_{\upsilon_l}^{\varepsilon_{\upsilon_l}}\right)_{\upsilon_l \in \mathcal{U}_l},\ \varepsilon_{\upsilon_l} \in \mathcal{E}_{\upsilon_l}\right\},$$

$$\boldsymbol{e}_l \triangleq \left(e_{\upsilon_l}^{\varepsilon_{\upsilon_l}}\right)_{\upsilon_l \in \mathcal{U}_l} = \left(e_{1_l}^{\varepsilon_{1_l}}, e_{2_l}^{\varepsilon_{2_l}}, \cdots, e_{U_l}^{\varepsilon_{U_l}}\right)$$

を期枝集合といい，その成分 $\boldsymbol{e}_l$ を期枝という．期枝集合 $\boldsymbol{E}_l$ は $\prod_{\upsilon_l \in \mathcal{U}_l} U_{\upsilon_l}$ 個のプロファイル $\boldsymbol{e}_l$ からなる集合である．とくに，$l \in \mathcal{L}^j$ ならば，期枝集合 $\boldsymbol{E}_l$

はプレイヤー期枝集合であり，期枝 $\boldsymbol{e}_l$ はプレイヤー期枝である.

1.8. 情報集合のプレイヤー枝とゲーム枝

定義 14 プレイヤー枝 $\boldsymbol{e}^j$，ゲーム枝 $\boldsymbol{e}$

プレイヤー期枝集合 $\boldsymbol{E}_l\,(l \in \mathcal{L}^j)$ の直積集合

$$\boldsymbol{E}^j \triangleq \bigtimes_{l \in \mathcal{L}^j} \boldsymbol{E}_l = \bigtimes_{l \in \mathcal{L}^j} \bigtimes_{v_l \in \mathcal{U}_l} \boldsymbol{E}_{v_l}$$

$$= \left\{ \boldsymbol{e}_j \;\middle|\; \boldsymbol{e}^j \triangleq (\boldsymbol{e}_l)_{l \in \mathcal{L}^j},\ \boldsymbol{e}_l \in \boldsymbol{E}_l \right\},$$

$$\boldsymbol{e}^j \triangleq (\boldsymbol{e}_l)_{l \in \mathcal{L}^j} = \left(\left(e_{v_l}^{\varepsilon_{v_l}} \right)_{v_l \in \mathcal{U}_l} \right)_{l \in \mathcal{L}^j}, \quad \varepsilon_{v_l} \in \mathcal{E}_{v_l}$$

$$= \left(e_{1_l}^{\varepsilon_{1_l}}, e_{2_l}^{\varepsilon_{2_l}}, \cdots, e_{U_l}^{\varepsilon_{U_l}} \right)_{l \in \mathcal{L}^j}$$

をプレイヤー枝集合といい，その成分 $\boldsymbol{e}^j \in \boldsymbol{E}^j$ をプレイヤー枝という．プレイヤー枝集合 $\boldsymbol{E}^j$ は $\prod_{l \in \mathcal{L}^j} \prod_{v_l \in \mathcal{U}_l} U_{v_l}$ 個のプロファイルからなる集合である.

また，プレイヤー枝集合 $\boldsymbol{E}^j\,(j \in \mathcal{J})$ の直積集合

$$\boldsymbol{E} \triangleq \boldsymbol{E}^0 \times \boldsymbol{E}^{\mathcal{I}} \triangleq \boldsymbol{E}^0 \times \left(\bigtimes_{i \in \mathcal{I}} \boldsymbol{E}^i \right) = \bigtimes_{j \in \mathcal{J}} \boldsymbol{E}^j$$

$$= \bigtimes_{j \in \mathcal{J}} \bigtimes_{l \in \mathcal{L}^j} \boldsymbol{E}_l = \bigtimes_{j \in \mathcal{J}} \bigtimes_{l \in \mathcal{L}^j} \bigtimes_{v_l \in \mathcal{U}_l} \boldsymbol{E}_{v_l}$$

$$= \left\{ \boldsymbol{e} \;\middle|\; \begin{aligned} &\boldsymbol{e} \triangleq (\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^{\mathcal{I}}) \triangleq (\boldsymbol{e}^0, (\boldsymbol{e}^i)_{i \in \mathcal{I}}) \\ &\quad = \left((\boldsymbol{e}_l)_{l \in \mathcal{L}^0}, \left((\boldsymbol{e}_l)_{l \in \mathcal{L}^i} \right)_{i \in \mathcal{I}} \right),\ \boldsymbol{e}_l \in \boldsymbol{E}_l \end{aligned} \right\}$$

をゲーム枝集合といい，その成分 $\boldsymbol{e} \triangleq (\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^{\mathcal{I}}) \triangleq \left(\boldsymbol{e}^0, (\boldsymbol{e}^i)_{i \in \mathcal{I}}\right) \in \boldsymbol{E}$ をゲーム枝という．ゲーム枝集合 $\boldsymbol{E}$ は $\prod_{j \in \mathcal{J}} \prod_{l \in \mathcal{L}^j} \prod_{v_l \in \mathcal{U}_l} U_{v_l}$ 個のプロファイル $\boldsymbol{e}$ からなる集合である．またしばしば，ゲーム枝 $\boldsymbol{e} \triangleq (\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^{\mathcal{I}}) \triangleq \left(\boldsymbol{e}^0, (\boldsymbol{e}^i)_{i \in \mathcal{I}}\right) \in \boldsymbol{E}$ から偶然行動枝 $\boldsymbol{e}^0$ を除いたプロファイル $\boldsymbol{e}^{\mathcal{I}} \in \boldsymbol{E}^{\mathcal{I}}$ をゲーム枝ということがある.

1.9. 情報分割

1.9.1. 情報分割

情報集合の族

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{L}} \triangleq \{ \boldsymbol{U}_l \mid \boldsymbol{U}_l \in \mathfrak{U}_l,\ l \in \mathcal{L} \} = \{ \boldsymbol{U}_{v_l} \mid \boldsymbol{U}_{v_l} \in \mathfrak{U}_l,\ v_l \in \mathcal{U}_l,\ l \in \mathcal{L} \}$$

を節集合 $\boldsymbol{X}$ の期情報分割という．期分割 $\mathfrak{X}_{\mathfrak{L}}$ は節集合 $\boldsymbol{X}$ の分割であり，期情報分割 $\mathfrak{U}_{\mathfrak{L}}$ は期分割 $\mathfrak{X}_{\mathfrak{L}}$ の細分である．すなわち，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \sum\nolimits_{l\in\mathfrak{L}} \boldsymbol{X}_l \\ &= \sum\nolimits_{l\in\mathfrak{L}} \boldsymbol{U}_l = \sum\nolimits_{l\in\mathfrak{L}} \sum\nolimits_{v_l\in\mathfrak{U}_l} \boldsymbol{U}_{v_l}.\end{aligned}$$

1.9.2. プレイヤー情報分割

情報集合の族

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} &\triangleq \{\boldsymbol{U}^j \mid \boldsymbol{U}^j \in \mathfrak{U}^j,\ j\in\mathfrak{J}\} \\ &= \{\boldsymbol{U}^j \mid \boldsymbol{U}^j = \boldsymbol{U}_l \in \mathfrak{U}_l,\ l\in\mathfrak{L}^j,\ j\in\mathfrak{J}\}\end{aligned}$$

を節集合 $\boldsymbol{X}$ のプレイヤー情報分割という．プレイヤー情報分割 $\mathfrak{U}$ はプレイヤー分割 $\mathfrak{X}$ の細分である．すなわち，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \sum\nolimits_{j\in\mathfrak{J}} \boldsymbol{X}^j = \sum\nolimits_{j\in\mathfrak{J}} \sum\nolimits_{l\in\mathfrak{L}^j} \boldsymbol{X}_l \\ &= \sum\nolimits_{j\in\mathfrak{J}} \boldsymbol{U}^j = \sum\nolimits_{j\in\mathfrak{J}} \sum\nolimits_{l\in\mathfrak{L}^j} \boldsymbol{U}_l = \sum\nolimits_{j\in\mathfrak{J}} \sum\nolimits_{l\in\mathfrak{L}^j} \sum\nolimits_{v_l\in\mathfrak{U}_l} \boldsymbol{U}_{v_l}.\end{aligned}$$

仮定　情報集合の性質についての仮定

いま，ある期において，行動の選択に直面しているプレイヤーは，

(1) 到達しているはずの局所節がどの局所情報集合に属しているかについては分かっているが，

(2) その局所情報集合内のどの局所節に到達しているかについては分からない，換言すると，どの局所節も同一に見えてしまう，

という状況におかれているものとする．このとき，条件 (1)(2) をみたす局所情報集合について，次の性質 (I1)—(I4) を仮定する．すなわち，

(I1) 1つの局所情報集合は1つのプレイ上の局所節を高々1つもつ．なぜなら，1つの局所情報集合がそれ以前の期節を含むとすれば，それは，行動の選択に直面する決定プレイヤーが，それ以前の期のプレイヤーがすでに意思決定を下してある選択行動をとったという事実を知らないことを意味し，合理的なプレイヤーの記憶能力に関する想定として適当でない．

(I2) 1つの局所情報集合に属する任意の局所節は同じ数の枝をもつ．なぜ

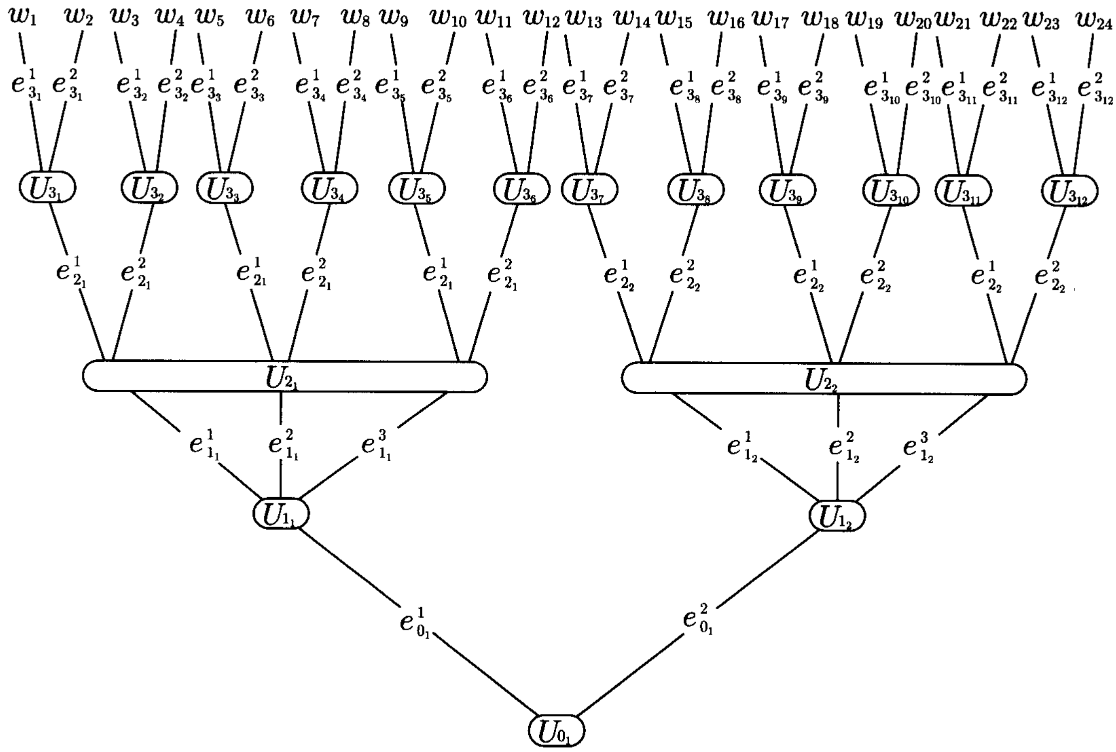

図 1.2: ゲーム木の 1 例——情報集合を考慮した場合——

なら，ある 1 つの局所情報集合上で行動の選択に直面しているプレイヤーにとって，どの局所節に到達していようと，同じ局所情報集合内にあっては実質的には同じ意思決定問題に直面しているはずである．

(I3) ゲーム開始期 0 の局所情報集合はただ 1 つの 1 点集合である．

1.10. 行動戦略

定義 15 局所行動戦略 b_{v_l}

$(\boldsymbol{E}_{v_l}, b_{v_l})$ を期局所枝集合 $\boldsymbol{E}_{v_l}\,(v_l \in \mathfrak{U}_l)$ （有限集合）上の確率空間とし，さらに，各局所枝 $e_{v_l} \in \boldsymbol{E}_{v_l}$ は互いに独立な確率変数であるとみなす．分布 b_{v_l} を局所行動戦略分布 local behavioral strategies distribution といい，b_{v_l} の全体 $\mathscr{B}_{v_l}$ を局所行動戦略分布空間という．局所行動戦略分布 $b_{v_l} \in \mathscr{B}_{v_l} : \boldsymbol{E}_{v_l} \to [0,1]$ は E_{v_l} 個の局所枝 $e_{v_l} \in \boldsymbol{E}_{v_l}$ の生起確率 $b_{v_l}(e_{v_l})$ を定める[14]．すなわち，

14) 局所行動戦略分布と局所混合戦略分布は同じ数学的構造をもつ

$$\begin{cases} b_{v_l}(e_{v_l}) \in [0,1], & \sum_{e_l \in \boldsymbol{E}_{v_l}} b_{v_l}(e_{v_l}) = 1, \text{ or} \\ b_{v_l}\left(e_{v_l}^{\varepsilon_{v_l}}\right) \in [0,1], & \sum_{v_l \in \mathfrak{U}_l} b_{v_l}\left(e_{v_l}^{\varepsilon_{v_l}}\right) = 1. \end{cases}$$

注意 4　$(\boldsymbol{E}_{v_l}, b_{v_l})$ を期局所枝集合 $\boldsymbol{E}_{v_l}$（有限集合）上の確率空間とする．定められた番号 $\varepsilon_{v_l} = \bar{\varepsilon}_{v_l} \in \mathcal{E}_{v_l}$ に対して，局所枝 $\bar{e}_{v_l} = e_{v_l}^{\bar{\varepsilon}_{v_l}} \in \boldsymbol{E}_{v_l}$ を（生起確率 1 で）選択するということは，局所行動戦略分布 $b_{v_l} \in \mathscr{B}_{v_l}$ として，定義関数 $\mathbb{I}_{\bar{e}_{v_l}} : \boldsymbol{E}_{v_l} \to \{0,1\}$,

$$b_{v_l}(e_l) = \mathbb{I}_{\bar{e}_{v_l}}(e_l) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{for } e_{v_l} = \bar{e}_{v_l},\ e_{v_l} \in \boldsymbol{E}_{v_l} \\ 0 & \text{for } e_{v_l} \neq \bar{e}_{v_l},\ e_{v_l} \in \boldsymbol{E}_{v_l} \end{cases}$$

が定められているということに他ならない．このようにして，任意の局所枝 $e_{v_l} \in \boldsymbol{E}_{v_l}$ に対して，局所行動戦略分布 $b_{v_l} = \mathbb{I}_{e_l} \in \mathscr{B}_{v_l}$ が対応している．

今後，任意の $e_{v_l} \in \boldsymbol{E}_{v_l}$ ないし $e_l \in \boldsymbol{E}_l$ について局所行動戦略分布を考えるときには，常に，上の方法で定められる分布 $b_{v_l} = \mathbb{I}_{e_{v_l}} \in \mathscr{B}_{v_l}$ ないし $b_l = \mathbb{I}_{e_l} \in \mathscr{B}_l$ を考える．

定義 16　期行動戦略分布 $\boldsymbol{b}_l$，プレイヤー行動戦略分布 $\boldsymbol{b}^j$，
ゲーム行動戦略分布 $\boldsymbol{b}$

直積空間 $\boldsymbol{\mathscr{B}}_l \triangleq \bigtimes_{v_l \in \mathfrak{U}_l} \mathscr{B}_{v_l}$ を期行動戦略分布空間といい，その成分

$$\boldsymbol{b}_l \triangleq (b_{v_l})_{v_l \in \mathfrak{U}_l} = (b_{1_l}, b_{2_l}, \cdots, b_{U_l})$$

を期行動戦略分布 stage behavioral strategies distribution という．直積空間 $\boldsymbol{\mathscr{B}}^j \triangleq \bigtimes_{l \in \mathfrak{L}^j} \bigtimes_{v_l \in \mathfrak{U}_l} \mathscr{B}_{v_l}$ をプレイヤー行動戦略分布空間といい，その成分

$$\boldsymbol{b}^j \triangleq \left((b_{v_l})_{v_l \in \mathfrak{U}_l}\right)_{l \in \mathfrak{L}^j} = (b_{1_l}, b_{2_l}, \cdots, b_{U_l})_{l \in \mathfrak{L}^j}$$

をプレイヤー行動戦略分布 player's behavioral strategies distribution という．また，直積空間

$$\boldsymbol{\mathscr{B}} \triangleq \boldsymbol{\mathscr{B}}^0 \times \boldsymbol{\mathscr{B}}^{\mathfrak{J}} \triangleq \boldsymbol{\mathscr{B}}^0 \times \left(\bigtimes_{i \in \mathfrak{J}} \boldsymbol{\mathscr{B}}^i\right) = \bigtimes_{j \in \mathfrak{J}} \bigtimes_{l \in \mathfrak{L}^j} \bigtimes_{v_l \in \mathfrak{U}_l} \mathscr{B}_{v_l}$$

をゲーム行動戦略分布空間といい，その成分

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &\triangleq (\boldsymbol{b}^0, \boldsymbol{b}^{\mathfrak{J}}) \triangleq \left(\left((b_{v_l})_{v_l \in \mathfrak{U}_l}\right)_{l \in \mathfrak{L}^0}, \left(\left((b_{v_l})_{v_l \in \mathfrak{U}_l}\right)_{l \in \mathfrak{L}^i}\right)_{i \in \mathfrak{J}}\right) \\ &= \left((b_{v_l})_{v_l \in \mathfrak{U}_l}\right)_{l \in \mathfrak{L}} \end{aligned}$$

をゲーム行動戦略分布という．

注意 5　局所節 $\boldsymbol{x}_l \in \boldsymbol{X}_l$ と局所情報集合 $\boldsymbol{U}_l \in \mathfrak{U}_l$ の定義，局所混合戦略分布 $q_{\xi_l} \in \mathscr{Q}_{\xi_l}$ と局所行動戦略分布 $b_{\upsilon_l} \in \mathscr{B}_{\upsilon_l}$ の定義には，両者間に大きな差異はないが，期混合戦略分布 $q_l \in \mathscr{Q}_l$ と期行動戦略分布 $\boldsymbol{b}_l \in \boldsymbol{\mathscr{B}}_l$ の定義，プレイヤー混合戦略分布 $q^j \in \mathscr{Q}^j$ とプレイヤー行動戦略 $\boldsymbol{b}^j \in \boldsymbol{\mathscr{B}}^j$ の定義，ゲーム混合戦略分布 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{\mathscr{Q}}$ とゲーム行動戦略分布 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{\mathscr{B}}$ の定義には，両者間に大きな差異がある．

1.11.　終節プレイと利得

注意 6　終節 $w \in \boldsymbol{W}$ 上の期 $l \in \mathfrak{L}$ に対して，

① 局所節 $x_{\xi(w)_l} \in \boldsymbol{X}_l$, 局所枝 $a_{\xi(w)_l} \triangleq a_{\xi(w)_l}^{\alpha(w)_{\xi(w)_l}}$, プレイヤー枝 $\boldsymbol{a}_{(w)}^j \triangleq (a_{\xi(w)_l})_{l \in \mathfrak{L}^j}$, ゲーム枝 $\boldsymbol{a}_{(w)} \triangleq (\boldsymbol{a}_{(w)}^0, \boldsymbol{a}_{(w)}^{\mathfrak{I}}) \triangleq (\boldsymbol{a}_{(w)}^0, (\boldsymbol{a}_{(w)}^i)_{i \in \mathfrak{I}})$ が定まり，

② 局所情報集合 $\boldsymbol{U}_{\upsilon(w)_l} \in \mathfrak{U}_l$, 局所枝 $e_{\upsilon(w)_l} \triangleq e_{\upsilon(w)_l}^{\varepsilon(w)_{\upsilon(w)_l}}$, プレイヤー枝 $\boldsymbol{e}_{(w)}^j \triangleq (e_{\upsilon(w)_l})_{l \in \mathfrak{L}^j}$, ゲーム枝 $\boldsymbol{e}_{(w)} \triangleq (\boldsymbol{e}_{(w)}^0, \boldsymbol{e}_{(w)}^{\mathfrak{I}}) \triangleq (\boldsymbol{e}_{(w)}^0, (\boldsymbol{e}_{(w)}^i)_{i \in \mathfrak{I}})$ が定まる．

したがって，与えられた終節 $w \in \boldsymbol{W}$ 対して，終節プレイの確率は，各局所枝が互いに独立な確率変数であることを考えると，$\mathfrak{L}^0 \neq \emptyset$ ならば，

① $$\prod_{j \in \mathcal{J}} q_{(w)}^j (\boldsymbol{a}_{(w)}^j) = q_{(w)}^0 (\boldsymbol{a}_{(w)}^0) \prod_{i \in \mathfrak{I}} q_{(w)}^i (\boldsymbol{a}_{(w)}^i)$$
$$= q_{(w)}^0 (\boldsymbol{a}_{(w)}^0) \prod_{i \in \mathfrak{I}} \prod_{l \in \mathfrak{L}^i} q_{\xi(w)_l} (a_{\xi(w)_l}),$$
$$a_{\xi(w)_l} = a_{\xi(w)_l}^{\alpha(w)_{\xi(w)_l}},$$

ただし，$q_{(w)}^0 (\boldsymbol{a}_{(w)}^0) \triangleq \prod_{l \in \mathfrak{L}^0} q_{\xi(w)_l} (a_{\xi(w)_l})$ ――，または，

② $$\prod_{l \in \mathfrak{L}} b_{\upsilon(w)_l} (e_{(w)_l}) = \left[\prod_{l \in \mathfrak{L}^0} b_{\upsilon(w)_l} (e_{(w)_l})\right] \left[\prod_{l \in \mathfrak{L}^i} b_{\upsilon(w)_l} (e_{(w)_l})\right]$$
$$= \left[\prod_{l \in \mathfrak{L}^0} b_{\upsilon(w)_l} (e_{(w)_l})\right] \left[\prod_{l \in \mathfrak{L}^i} b_{\upsilon(w)_l} \left(e_{\upsilon(w)_l}^{\varepsilon(w)_{\upsilon(w)_l}}\right)\right]$$

によって与えられる．

仮定　偶然行動の局所分布 $\bar{q}_{\xi_l}^0$ と仮定

これまで，終節 $w \in \boldsymbol{W}$ に対する終節プレイにおける偶然行動の生起確率を記号 $q_{(w)}^0 (\boldsymbol{a}_{(w)}^0)$ （混合戦略分布）または $\prod_{l \in \mathfrak{L}^0} b_{\upsilon(w)_l} (e_{(w)_l})$ （行動戦略分布）

によってあらわした．しかし，ここで改めて，偶然行動は外生的に与えられる（決定プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ にとっては確定した）偶然局所分布

$$\overline{q}^0_{\xi_l} \in \mathscr{Q}_{\xi_l} : \boldsymbol{A}_l \to (0,1) \ \ (l \in \mathcal{L}^0),$$

$$\overline{q}^0_{\xi_l}(a_{\xi_l}) \in (0,1), \ \sum\nolimits_{a_{\xi_l} \in \boldsymbol{A}_{\xi_l}} \overline{q}^0_{\xi_l}(a_{\xi_l}) = 1, \ \ a_{\xi_l} = a^{\alpha_{\xi_l}}_{\xi_l}$$

に従うと仮定する[15]．

定義 17　終節プレイにおける偶然行動確率 π

偶然プレイヤーが存在せず，$\mathcal{L}^0 = \emptyset$ の可能性があることを考えて，終節 $w \in \boldsymbol{W}$ に対する終節プレイにおける偶然行動の生起確率 $\pi(w)$ を与える関数 $\pi : \boldsymbol{W} \to [0,1]$ を，次式

$$\pi(w) \triangleq \begin{cases} \prod_{l \in \mathcal{L}^0} \overline{q}^0_{\xi(w)_l}(a_{\xi(w)_l}) = \prod_{l \in \mathcal{L}^0} \overline{q}^0_{\xi(w)_l}\left(a^{\alpha(w)_{\xi(w)_l}}_{\xi(w)_l}\right) & \text{for} \ \ \mathcal{L}^0 \neq \emptyset, \\ 1 \ \ \text{for} \ \ \mathcal{L}^0 = \emptyset \end{cases}$$

によって定義する．よって，

$$\begin{aligned} \prod\nolimits_{j \in \mathfrak{J}} q^j_{(w)}\left(\boldsymbol{a}^j_{(w)}\right) &= \pi(w) \prod\nolimits_{i \in \mathfrak{I}} q^i_{(w)}\left(\boldsymbol{a}^i_{(w)}\right) \\ &= \pi(w) \prod\nolimits_{i \in \mathfrak{I}} \prod\nolimits_{l \in \mathcal{L}^i} q_{\xi(w)_l}(a_{\xi(w)_l}) \\ &= \pi(w) \prod\nolimits_{l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^0} q_{\xi(w)_l}(a_{\xi(w)_l}), \ \ a_{\xi(w)_l} = a^{\alpha(w)_{\xi(w)_l}}_{\xi(w)_l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod\nolimits_{l \in \mathcal{L}} b_{v(w)_l}(e_{(w)_l}) &= \pi(w) \prod\nolimits_{i \in \mathfrak{I}} \prod\nolimits_{l \in \mathcal{L}^i} b_{v(w)_l}(e_{(w)_l}) \\ &= \pi(w) \prod\nolimits_{l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^0} b_{v(w)_l}(e_{(w)_l}), \ \ e_{(w)_l} = e^{\varepsilon(w)_{v(w)_l}}_{v(w)_l}. \end{aligned}$$

定義 18　決定プレイヤー利得関数 h^i

終節 $w \in \boldsymbol{W}$ における決定プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ の利得を定義する実数値関数

$$h^i : w \in \boldsymbol{W} \to h^i(w) \in \boldsymbol{R}$$

を決定プレイヤー利得関数 payoff function といい，$h^i(w) \in \boldsymbol{R}$ を決定プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ の利得という．また，集合

$$\mathscr{H} \triangleq \{h \,|\, h = h^i, \ i \in \mathfrak{I}\}$$

をプレイヤー利得関数集合という．

---

15) $\overline{q}^0_{\xi_l}(a_{\xi_l}) = 0$ となる枝 a_{ξ_l} は最初から除いておけばよく，また，$\overline{q}^0_{\xi_l}(a_{\xi_l}) = 1$ ならば，偶然行動を考慮に入れる必要がない．

1.12.　展開形ゲームのルール

$\Gamma \triangleq (K, \mathfrak{X}, \pi, \mathfrak{U}, \mathscr{H})$ の構成要素であるゲーム木 K，プレイヤー分割 $\mathfrak{X}$，偶然行動の確率を与える関数 π，プレイヤー情報分割 $\mathfrak{U}$，プレイヤー利得関数集合 $\mathscr{H}$ を展開形ゲームのルールという．

1.13.　共通知識と情報の完備性

定義 19　共通知識

プレイヤーの共通知識 common knowledge とは，次の 2 つが成立することである．すなわち，

① すべての決定プレイヤーがゲームのルールを完全に知っている，

② すべての決定プレイヤーは「他の決定プレイヤーがゲームのルールを知っている」ことを知っている．

定義 20　完備情報ゲーム・不完備情報ゲーム

共通知識仮定をみたすゲームを完備情報ゲーム game with complete information という．完備情報でないゲームを不完備情報ゲーム game with incomplete information という．

2. 展開形ゲームの分析道具

2.1.　実現確率

定義 21　枝 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ の下での $w \in \boldsymbol{W}$ の実現確率 $p(w \mid \boldsymbol{a})$

終節 $w \in \boldsymbol{W}$ とゲーム枝 $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{a}^{\mathfrak{I}}) = \left(\boldsymbol{a}^0, (\boldsymbol{a}^i)_{i \in \mathfrak{I}}\right) \in \boldsymbol{A} \triangleq \boldsymbol{A}^0 \times \boldsymbol{A}^{\mathfrak{I}}$ のペア $w \mid \boldsymbol{a}$ に対して，$w \in \boldsymbol{W}$ が $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ によって導かれる確率―― $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ の下で $w \in \boldsymbol{W}$ が到達される確率――を，

$$p(w \mid \boldsymbol{a}) \triangleq \pi(w) \prod\nolimits_{i \in \mathfrak{I}} \mathbb{I}_{\boldsymbol{A}^i_{(w)}}(\boldsymbol{a}^i),$$

ただし，$i \in \mathfrak{I}$ に対して，

$$\boldsymbol{A}^i_{(w)} \triangleq \left\{ \boldsymbol{a}^i \;\middle|\; \boldsymbol{a}^i \in \boldsymbol{A}^i,\ \arg \boldsymbol{a}^i_{(w)} \subset \arg \boldsymbol{a}^i \right\},$$

関数 $\mathbb{I}_{A^i_{(w)}}(a^i) : A^i \to \{1,0\}$ は定義関数,

$$\mathbb{I}_{A^i_{(w)}}(a^i) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad a^i \in A^i_{(w)} \cap A^i, \\ 0 & \text{for} \quad a^i \notin A^i_{(w)}, \quad a^i \in A^i \end{cases}$$

——によって定義し, $a \in A$ の下での $w \in W$ の実現確率 realization probability という. ある決定プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ に対して $a^i \notin A^i_{(w)}$ ならば, $p(w \mid a) = 0$ となるので, すべての決定プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ に対して $a^i \in A^i_{(w)}$ のときのみ, $p(w \mid a) > 0$, すなわち, $p(w \mid a) = \pi(w) > 0$ となる. 3つの同値条件

(1) $\quad p(w \mid a) = \pi(w) > 0,$

(2) $\quad \arg a_{(w)} \subset \arg a,$

(3) $\quad \forall i \in \mathfrak{I} : a^i \in A^i_{(w)},$

が成立するとき, 終節 $w \in W$ はゲーム枝 $a \in A$ の下で到達可能であるという.

定義 22　混合戦略分布 $q \in \mathcal{Q}$ の下での $w \in W$ の実現確率 $p(w \mid q)$

終節 $w \in W$ とゲーム混合戦略分布

$$q = (\overline{q}^0, q^{\mathfrak{I}}) = (\overline{q}^0, (q^i)_{i \in \mathfrak{I}}) \in \mathcal{Q} = \mathcal{Q}^0 \times \mathcal{Q}^{\mathfrak{I}},$$

$$\overline{q}^0 \triangleq ((\overline{q}^0_{\xi_l})_{\xi_l \in \mathfrak{X}_l})_{l \in \mathcal{L}^0}$$

のペア $w \mid q$ に対して, $w \in W$ が $q \in \mathcal{Q}$ によって導かれる確率——$q \in \mathcal{Q}$ の下で $w \in W$ が到達される確率——を, 注意 6 および定義 17 を考慮して,

$$\begin{aligned} p(w \mid q) &= \sum_{a^1 \in A^1} \cdots \sum_{a^I \in A^I} \left[\prod_{i \in \mathfrak{I}} q^i(a^i)\right] p(w \mid a) \\ &= \sum_{a^1 \in A^1_{(w)}} \cdots \sum_{a^I \in A^I_{(w)}} \left[\prod_{i \in \mathfrak{I}} q^i(a^i)\right] p(w \mid a) \\ &= \pi(w) \prod_{i \in \mathfrak{I}} \prod_{l \in \mathcal{L}^i} q_{\xi(w)_l}(a_{\xi(w)_l}) \\ &= \pi(w) \prod_{l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^0} q_{\xi(w)_l}(a_{\xi(w)_l}), \quad a_{\xi(w)_l} = a^{\alpha(w)_{\xi(w)_l}}_{\xi(w)_l} \end{aligned}$$

ただし, $q_{\xi(w)_l} \in \mathcal{Q}_{\xi(w)_l}$ は, ゲーム混合戦略分布 $q \in \mathcal{Q}$ を構成する期混合戦略分布 $q_l \in \mathcal{Q}_l$ が配列番号 $\xi(w)_l \in \mathfrak{X}_l$ に導く局所混合戦略分布——によって定義する[16]. この確率 $p(w \mid q)$ を $q \in \mathcal{Q}$ の下での $w \in W$ の実現確率という. $p(w \mid q) > 0$ のとき, $w \in W$ は $q \in \mathcal{Q}$ の下で到達可能であるという.

16) 定理 2 系および $p(w \mid a)$ の性質により, この定義はごく自然である.

定義 23　行動戦略分布 $\boldsymbol{b} \in \mathscr{B}$ の下での $w \in \boldsymbol{W}$ の実現確率

終節 $w \in \boldsymbol{W}$ とゲーム行動戦略分布

$$\boldsymbol{b} = \left(\overline{\boldsymbol{q}}^0, \boldsymbol{b}^{\mathcal{I}}\right) = \left(\overline{\boldsymbol{q}}^0, \left(\boldsymbol{b}^i\right)_{i \in \mathcal{I}}\right) \in \mathscr{B} = \mathscr{Q}^0 \times \mathscr{B}^{\mathcal{I}},$$

$$\overline{\boldsymbol{q}}^0 \triangleq \left(\left(\overline{q}^0_{\xi_l}\right)_{\xi_l \in \mathcal{X}_l}\right)_{l \in \mathcal{L}^0}$$

のペア $w|\boldsymbol{b}$ に対して，$w \in \boldsymbol{W}$ が $\boldsymbol{b} \in \mathscr{B}$ によって導かれる確率——$\boldsymbol{b} \in \mathscr{B}$ の下で $w \in \boldsymbol{W}$ が到達される確率——を，注意 6 および定義 17 を考慮して，

$$p(w \mid \boldsymbol{b}) \triangleq \pi(w) \prod_{i \in \mathcal{I}} \prod_{l \in \mathcal{L}^i} b_{\upsilon(w)_l}\left(e_{\upsilon(w)_l}\right)$$

$$= \pi(w) \prod_{l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^0} b_{\upsilon(w)_l}\left(e_{\upsilon(w)_l}\right), \quad e_{\upsilon(w)_l} = e_{\upsilon(w)_l}^{\varepsilon(w)_{\upsilon(w)_l}}$$

によって定義し，$\boldsymbol{b} \in \mathscr{B}$ の下での $w \in \boldsymbol{W}$ の実現確率という．$p(w|\boldsymbol{b}) > 0$ のとき，$w \in \boldsymbol{W}$ は $\boldsymbol{b} \in \mathscr{B}$ の下で到達可能であるという．

注意 7　ゲーム混合戦略分布 $\boldsymbol{q} \in \mathscr{Q}$ の下での終節 $w \in \boldsymbol{W}$ の実現確率の定義とゲーム行動戦略分布 $\boldsymbol{b} \in \mathscr{B}$ の下での終節 $w \in \boldsymbol{W}$ の実現確率の定義が異なる理由は，基本的には，期混合戦略分布 $q_l \in \mathscr{Q}_l$ の定義と期行動戦略分布 $\boldsymbol{b}_l \in \mathscr{B}_l$ の定義の差異に帰着する．しかし，局所混合戦略分布と局所行動戦略分布の水準にまでさかのぼって考えると，当然というべきかもしれないが，両者の定義は類似する．

注意 8　混合戦略分布と行動戦略分布とは，節における選択肢の分布と情報集合における選択肢の分布という意味において，概念としては異なるが，プレイヤー混合戦略にもとづいて定義される実現確率 $p(w|\boldsymbol{q})$ と局所行動戦略 $p(w|\boldsymbol{b})$ にもとづいて定義される実現確率 は，数学的構造という観点からみれば，(必ずしも一致するわけではないが) 密接に関係する．とくに，任意の期において，期混合戦略分布は，その期の任意の情報集合に関して，局所行動戦略分布を導く[17)]．

17) たとえば，岡田 [13]pp.81-93，鈴木 [17]pp.111-121 等を見られたい．定理 1，定理 2 およびその系は，混合戦略分布内での局所分布と期分布の関係を示したものであり，混合戦略分布と行動戦略分布の関係を示しているわけではない．なお，混合戦略分布と行動戦略分布の関連性については，改めて別の機会に検討したい

定義 24　ゲーム戦略一般の記号 $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathscr{S}}$

ゲーム混合戦略分布 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{\mathscr{Q}}$ あるいはゲーム行動戦略分布 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{\mathscr{B}}$ に関連して，形式上，両者を共通した枠組みで論ずることがある．このようなとき，混合戦略戦略分布と行動戦略分布をまとめ，戦略分布

$$\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathscr{S}},$$

$$\boldsymbol{s} = \left(\overline{\boldsymbol{q}}^0, \boldsymbol{s}^{\mathfrak{I}}\right) = \left(\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{s}^{-i}\right) \in \boldsymbol{\mathscr{S}} \triangleq \mathscr{S}^i \times \boldsymbol{\mathscr{S}}^{-i},$$

$$\boldsymbol{s}^{-i} \triangleq \left(\boldsymbol{s}^1, \cdots, \boldsymbol{s}^{i-1}, \boldsymbol{s}^{i+1}, \cdots, \boldsymbol{s}^I\right),$$

$$\boldsymbol{s} = \left(\left(\boldsymbol{s}^i\right)_{i \in \mathfrak{I}^{\mathfrak{I}}}, \left(\boldsymbol{s}^i\right)_{i \in \mathfrak{J}-\mathfrak{I}}\right) \in \boldsymbol{\mathscr{S}} \triangleq \mathscr{S}^{\mathfrak{I}^{\mathfrak{I}}} \times \boldsymbol{\mathscr{S}}^{\mathfrak{J}-\mathfrak{I}}$$

などとあらわす．

注意 9　戦略 $(\boldsymbol{b}^i, \boldsymbol{a}^{-i}) \in \boldsymbol{\mathscr{B}}^i \times \left(\bigtimes_{k \in \mathfrak{I} \setminus \{i\}} \boldsymbol{A}^k_{(w)}\right)$，$\{i\} = \mathfrak{I}^i$ に対して，終節 $w \in \boldsymbol{W}$ に対する実現確率は，

$$p\left(w \,|\, \boldsymbol{b}^i, \boldsymbol{a}^{-i}\right) = \pi(w) \prod\nolimits_{l \in \mathfrak{L}^i} b_{v(w)_l}\left(e_{v(w)_l}\right)$$

によって与えられる．同様にして，枝と分布が混在するゲーム戦略プロファイル——それ自体１つの戦略である——についても，終節に対する実現確率が定義される．

2.2.　決定プレイヤー期待利得

定義 25　決定プレイヤー期待利得 H^i

プレイヤー利得関数 h^i にもとづいて，ゲーム戦略分布

$$\boldsymbol{s} = \left(\overline{\boldsymbol{q}}^0, \boldsymbol{s}^{\mathfrak{I}}\right) = \left(\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{s}^{-i}\right) \in \boldsymbol{\mathscr{S}}$$

に対するプレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ の期待利得が，到達可能な終節 $w \in \boldsymbol{W}$ での利得の期待値 $H^i : \boldsymbol{\mathscr{S}} \to \boldsymbol{R}$,

$$H^i(\boldsymbol{s}) \triangleq \sum\nolimits_{w \in \boldsymbol{W}} p(w \,|\, \boldsymbol{s})\, h^i(w)$$

によって定義される．ここで，$p(w \,|\, \boldsymbol{s}) = p(w \,|\, \boldsymbol{s}^i,\ \boldsymbol{s}^{-i})$，$\{i\} = \mathfrak{I}^i$ は戦略 $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathscr{S}}$ の下での $w \in \boldsymbol{W}$ の実現確率である．関数 H^i は $\boldsymbol{\mathscr{S}}$ 上の実数値連続関数であ

る．また，$r_k^i \triangleq H^i(\boldsymbol{s}_k) \in H^i(\mathscr{S})$，$k=1,2$ とおくと，

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1+\lambda_2=1:$$

$$\lambda_1 r_1^i + \lambda_2 r_2^i = \sum\nolimits_{w\in \boldsymbol{W}} \Big[\lambda_1 p(w\,|\,\boldsymbol{s}_1) + \lambda_2 p(w\,|\,\boldsymbol{s}_2)\Big] h^i(w)$$

であり，$\lambda_1 p(w\,|\,\boldsymbol{s}_1)+\lambda_2 p(w\,|\,\boldsymbol{s}_2)$ を，r_1^i, r_2^i を導いた $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_1$ に対する新たな分布の実現確率とみなすことができるから，$H^i(\mathscr{S})$ は凸集合である[18)]．

ゲーム枝 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{a}^{\mathfrak{I}}) = \big(\boldsymbol{a}^0, (\boldsymbol{a}^i)_{i\in\mathfrak{I}}\big) \in \boldsymbol{A} \triangleq \boldsymbol{A}^0 \times \boldsymbol{A}^{\mathfrak{I}}$ に対する $j\in\mathfrak{J}$ の利得は，

$$H^i(\boldsymbol{a}) \triangleq \sum\nolimits_{w\in \boldsymbol{W}} p(w\,|\,\boldsymbol{a})\, h^i(w)$$

によって与えられる．

3．展開形ゲームの標準化

3.1．展開形ゲームの標準化

定義 26　展開形ゲームの標準化

決定プレイヤー $i\in\mathfrak{I}$ に関連して，プレイヤー枝集合（純戦略集合）の列 $\boldsymbol{A}^{\mathfrak{I}} \triangleq \times_{i\in\mathfrak{I}} \boldsymbol{A}^i$ と期待利得関数の列 $\boldsymbol{H}^{\mathfrak{I}} \triangleq \times_{i\in\mathfrak{I}} H^i$ を用いて，展開形ゲームから標準形ゲーム

$$G=\big(\mathfrak{I},\ \boldsymbol{A}^{\mathfrak{I}},\ \boldsymbol{H}^{\mathfrak{I}}\big)$$

を構成できる．標準形ゲーム G を展開形ゲーム Γ の標準形展開ゲームという．また，展開形ゲームから標準形ゲームを構成することを展開ゲームの標準化という．

3.2．標準形展開ゲームのまとめ

標準形展開ゲーム Γ を整理すると次のようになる．

18) 福尾 [2] 定理 22 により，有限個の凸集合 $H^i(\mathscr{S})$ の直積 $\boldsymbol{H}^{\mathfrak{I}}(\mathscr{S}) \triangleq \times_{i\in\mathfrak{I}} H^i(\mathscr{S})$ もまた凸集合である．

(1) 各決定プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ に対して，プレイヤー純戦略空間 $\boldsymbol{A}^i$（枝集合）が与えられる．

(2) 任意のゲーム純戦略 $\boldsymbol{a}^{\mathfrak{I}} = (\boldsymbol{a}^i)_{i\in\mathfrak{I}} \in \boldsymbol{A}^{\mathfrak{I}} \triangleq \times_{i\in\mathfrak{I}} \boldsymbol{A}^i$ に対して，その結果として導かれる終節 $w \in \boldsymbol{W}$ に対応して，各プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ の利得 が与えられている．

(3) 任意のゲーム純戦略（枝）$\boldsymbol{a}^{\mathfrak{I}} = (\boldsymbol{a}^i)_{i\in\mathfrak{I}} \in \boldsymbol{A}^{\mathfrak{I}}$ に対して，その結果として終節 $w \in \boldsymbol{W}$ が導かれる偶然行動確率 $\pi(w)$ が与えられる．

(4) 各プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ は，互いに他のプレイヤーのとる戦略を与件として，1つのプレイヤー純戦略（枝）$\boldsymbol{a}^i \in \boldsymbol{A}^i$ を選択し，ゲーム純戦略（枝）$\boldsymbol{a}^{\mathfrak{I}} = (\boldsymbol{a}^i)_{i\in\mathfrak{I}} \in \boldsymbol{A}^{\mathfrak{I}}$ が定まる．

(5) 選択されたゲーム純戦略（枝）$\boldsymbol{a}^{\mathfrak{I}} = (\boldsymbol{a}^i)_{i\in\mathfrak{I}} \in \boldsymbol{A}^{\mathfrak{I}}$ に対して，各プレイヤー $i \in \mathfrak{I}$ の期待利得は $H^i(\boldsymbol{a})$ で与えられる

3.3. 標準形展開ゲームにおけるナッシュ均衡

定義 27　展開形ゲーム Γ におけるナッシュ均衡

展開形ゲーム $\Gamma = (K, \mathfrak{X}, \pi, \mathfrak{U}, \mathscr{H})$ において，

① ゲーム行動戦略分布 $\boldsymbol{b}_* \triangleq (\boldsymbol{b}_*^i, \boldsymbol{b}_*^{-i}) \in \mathscr{B}$ がナッシュ均衡であるとは，

$$\forall i \in \mathfrak{I} \forall \boldsymbol{b}^i \in \mathscr{B}^i : H^i(\boldsymbol{b}_*^i, \boldsymbol{b}_*^{-i}) \geqq H^i(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_*^{-i})$$

が成立することである．

② ゲーム混合戦略分布 $\boldsymbol{q}_* \triangleq (q_*^i, \boldsymbol{q}_*^{-i}) \in \mathscr{Q}$ がナッシュ均衡であるとは，

$$\forall i \in \mathfrak{I} \forall q^i \in \mathscr{Q}^i : H^i(q_*^i, \boldsymbol{q}_*^{-i}) \geqq H^i(q^i, \boldsymbol{q}_*^{-i})$$

が成立することである．さらに，上の①② をまとめると，

③ ゲーム戦略分布

$$\boldsymbol{s}_* \triangleq (\boldsymbol{s}_*^i, \boldsymbol{s}_*^{-i}) \in \mathscr{S}$$

がナッシュ均衡であるとは，

$$\forall i \in \mathfrak{I} \forall \boldsymbol{s}^i \in \mathscr{S}^i : H^i(\boldsymbol{s}_*^i, \boldsymbol{s}_*^{-i}) \geqq H^i(\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{s}_*^{-i})$$

が成立することである.

定理 3[Nash] [19]　展開形ゲーム $\Gamma=(K,\mathfrak{X},\pi,\mathfrak{U},\mathscr{H})$ には，混合戦略分布の範囲において，ナッシュ均衡戦略分布が存在する.

証明　段階 1　決定プレイヤー混合戦略分布空間 $\mathscr{Q}^i$,

$$\mathscr{Q}^i \triangleq \{q^i \mid q^i : \boldsymbol{A}^i \to [0,1]\},\ i \in \mathfrak{I}$$

を $\boldsymbol{A}^i$ 上の有界実数値関数空間の部分空間とみなすと，準備 2 により，関数空間 $\mathscr{Q}^i$ は有界実数値空間のコンパクト（部分）距離空間となる[20]．また，分布（すなわち，確率測度）の定義により，空間 $\mathscr{Q}^i$ は $\boldsymbol{A}^i$ 上で単体であるから，空間 $\mathscr{Q}^i$ はコンパクト凸（部分）距離空間である．ゲーム木 K は有限ゲーム長 L，有限個の節 $\mathscr{Q}^i$，有限個の枝 $a_{\xi_l}=a_{\xi_l}^{\alpha_{\xi_l}}$，$e_{v_l}=e_{v_l}^{\varepsilon_{v_l}}$ によって構成されていることから，空間 $\boldsymbol{\mathscr{Q}}$ は有限個の空間 $\mathscr{Q}^i$ の直積空間である．ところで，コンパクト凸距離空間の有限個の直積空間もまたコンパクト凸距離空間であるので，結局，空間 $\boldsymbol{\mathscr{Q}}$ もまたコンパクト凸（部分）距離空間である．

段階 2　任意に与えられた $\boldsymbol{q}^{-i} \in \boldsymbol{\mathscr{Q}}^{-i}$ に対して，関数

$$H^i : q^i \in \mathscr{Q}^i \to H^i(q^i, \boldsymbol{q}^{-i}) \in \boldsymbol{R}$$

はコンパクト凸（部分）距離空間 $\boldsymbol{\mathscr{Q}}^{-i}$ 上の実数値連続関数である．よって，最大値・最小値の定理により，関数 H^i は $\boldsymbol{\mathscr{Q}}^{-i}$ 上で最大値をもつ．すなわち，

$$\forall \boldsymbol{q}^{-i} \in \boldsymbol{\mathscr{Q}}^{-i} \exists q_\circ^i \in \mathscr{Q}^i \forall q^i \in \mathscr{Q}^i : H^i(q_\circ^i, \boldsymbol{q}^{-i}) \geqq H^i(q^i, \boldsymbol{q}^{-i}).$$

そこで，任意に与えられた $\boldsymbol{q}^{-i} \in \boldsymbol{\mathscr{Q}}^{-i}$ に対して，期待利得を最大にする戦略分布の集合を

$$B^i(\boldsymbol{q}^{-i}) \triangleq \left\{q_\circ^i \in \mathscr{Q}^i \,\middle|\, \forall q^i \in \mathscr{Q}^i : H^i(q_\circ^i, \boldsymbol{q}^{-i}) \geqq H^i(q^i, \boldsymbol{q}^{-i})\right\}$$

19) Nash[11] 自身の証明はきわめてコンパクトかつコンデンスである．一見，この定理は行動戦略分布の範囲においても成立することが期待される．しかし，前にも述べたように，行動戦略分布に関連する分析は，本稿で言及しなかった容易でない論点を含んでいる (たとえば，鈴木[17]pp.111-121 を見られたい).

20) 脚注 4 で示唆されているが，この脈絡においては,「部分」という表現はあってもなくても本質的差異はない.

とおく．関数 H^i の性質により，

$$\forall q_1^i, q_2^i \in B^i(\boldsymbol{q}^{-i})\,\forall\lambda_1, \lambda_2 \geqq 0, \lambda_1+\lambda_2=1 : \lambda_1 q_1^i + \lambda_2 q_2^i \in B^i(\boldsymbol{q}^{-i})$$

であり，$B^i(\boldsymbol{q}^{-i})$ は非空凸コンパクト集合である．次に，対応（または写像）$B:\boldsymbol{\mathcal{Q}}\to\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ を

$$B(\boldsymbol{q}) \triangleq \times_{i\in\mathfrak{I}} B^i(\boldsymbol{q}^{-i})$$

によって定義する．$B(\boldsymbol{q})$ は非空凸コンパクト集合である[21]．対応 B は戦略分布 $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ から分布の集合 $B(\boldsymbol{q})$ への写像である．$B(\boldsymbol{\mathcal{Q}})$ は，コンパクト凸集合 $\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{-i}$ 上の連続像 $B^i(\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{-i})$ （コンパクト集合 ）の直積であり，コンパクトである．

段階 3　対応 B が閉写像であることを示す．

$$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_\nu \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}, \quad \lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{t}_\nu = \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{t}_\nu \in B(\boldsymbol{q})$$

とすると，すべての $i\in\mathfrak{I}$ に対して，$t_\nu^i \in B^i(\boldsymbol{q}^{-i})$．つまり，任意に与えられた $\boldsymbol{q}^{-i}\in\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{-i}$ に対して，

$$\forall q^i \in \mathcal{Q}^i : H^i(t_\nu^i, \boldsymbol{q}^{-i}) \geqq H^i(q^i, \boldsymbol{q}^{-i}),\ \nu = 1, 2, \cdots.$$

関数 H^i は距離空間 $\mathscr{H}^i$ 上の実数値連続関数であるので，$t_\nu^i \to t^i$ に対しても，上の関係は保たれ，結局，$t^i \in B^i(\boldsymbol{q}^{-i})$，すなわち，$\boldsymbol{t}\in B(\boldsymbol{q})$．よって，$B$ は閉写像である．

段階 4　以上により，$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{-i}$ はコンパクト凸（部分）距離空間であること，写像 $B:\boldsymbol{\mathcal{Q}}\to\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ は分布 $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ に非空凸コンパクト集合

$$B(\boldsymbol{q}) \subset \boldsymbol{\mathcal{Q}}$$

を対応づける閉写像であることが示された．よって，角谷の定理により[22]，不

21) 福尾 [2] 定理 22．松坂 [9]p.212, 定理 13.

22) 角谷の定理については，二階堂 [12] と小山 [7] を参考にした．しかし，この両文献ともに，その定理は有限次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ をベースとしており，本稿において利用したい内容そのものではない．たびたび言及しているように対応（または写像）$B:\boldsymbol{\mathcal{Q}}\to\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ の定義域 $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ は関数空間の 1 つである分布空間である．したがって，空間 $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ の性質に関して十分に注意を払う必要がある．つまり，角谷の定理が対応 B に対しても適用可能であるかという点についての検討は重要である．しかし，脚注 5 でも指摘したように，結局のところ，角谷の定理は $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ 上の対応 B に対しても適用することができる．

動点（ナッシュ均衡）$\boldsymbol{q}_* \in B(\boldsymbol{q}_*)$ が存在する．□

4. おわりに

本稿の目的は展開形ゲームの構造を整理することであった．とくに留意した点は，プレイの各段階である期 general stage と特定のプレイヤーが行動するプレイヤー期 player stage とを区別したことである．期一般とプレイヤー期を区別することにより，同一プレイヤーが複数期で行動する可能性を明示した．また，局所戦略分布を混合戦略分布についても導入することにより，混合戦略分布と行動戦略分布の分析上の類似点を明確にすることができた．定理 1 と定理 2 の結論は，直感的には，すぐに予想される内容であるが，いずれにせよ局所戦略分布と期戦略分布の関係を示している．このような結論は，先行文献ですでに得られている可能性もあるが，定義関数と成分集合というきわめてシンプルな概念を活用することにより，シンプルな証明を得ることができた．定理 1 と定理 2 を媒介にすることにより，実現確率の定義への橋渡しがスムーズになり，議論の流れが多少なりとも明快になったのではないか．混合戦略分布と行動戦略分布の関係については，さらなる見通しも立つが，この点については，稿を改めたい[23)]．

展開形ゲームの混合戦略分布の範囲におけるナッシュ均衡の存在証明は，本稿の主たる目的ではなかった．しかし，文献に見られる存在証明を必ずしも十分に理解できなかったため[24)]，改めて証明の行間補充を試みた．誤った部分があるかもしれない．

以上

23) 混合戦略分布から行動戦略分布への関係については注意 8 で少し言及したが，逆の関係については明言しなかった．

24) たとえば，Perea[15]p.44，岡田 [13]p.35 の証明．有限次元ユークリッド空間上での議論なら問題はない．しかし，ナッシュ均衡は分布空間上で定義されるので，この点に対する配慮が必要であろうかと思われる．

参　考　文　献

[1] Fudenberg, D. & Tirole, J., Game Theory, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1992.

[2] 福尾洋一「凸集合」『経済学論究（関西学院大学）』**34**(1)(1980), pp. 29-52.

[3] ――――「閉凸拡張関数」『同上』**38**(3)(1984), pp. 113-136.

[4] 伊藤　清『確率論』岩波書店, 1991 年.

[5] Harsanyi, J. C., "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players. Part I : The Basic Model," Man. Sci. 14 (1967) pp.159-182.

[6] Hart, S. "Games in Extensive and Strategic Forms, " in Handbook of Game Theory, Vol.1, Edit. by R. J. Aumann & S. Hart, Elsevier Science Publishers B.V. 1992. pp.20-40.

[7] 小山昭雄『経済学教室 3』岩波書店, 1994 年.

[8] Kuhn, H. W., "Extensive Game and the Problem of Information," in Contributions to the Theory of Games Ⅱ, 1953, pp.193-213.

[9] 松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店, 1968 年.

[10] Myerson, R. B., Game Theory: Analysis of Conflict, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1991.

[11] Nash, J. F. Jr., "Equilibrium Points in n-Person Games," PNAS 36 (1950) pp.48-49

[12] 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』岩波書店, 1960 年.

[13] 岡田　章『ゲーム理論』有斐閣, 1996 年.

[14] Osborne, M. J. & Rubinstein, A., A Course in Game Theory, MIT Press, Princeton, 1994.

[15] Perea, A. Rationality in Extensive Form Games, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.

[16] 坂口　実『ゲームの理論』森北出版, 1969 年.

[17] 鈴木光男『ゲーム理論入門』共立出版, 1981 年.

[18] 竹之内　脩『トポロジー』廣川書店, 1962 年.