資本主義形成の数学モデル

河　野　正　道

1.　はじめに

経済史の通説においては、商業の発達が資本主義の形成の大きな要因を与えたとされている。一方、これに対して大塚理論[1)]では、世界におけるすべての発展段階において商業と呼びうる現象が存在していたのであり、中世の後期において、すなわち、資本主義の発展段階において大きな影響を与えたのは、地方の経済の興隆である、と主張する。イギリスの中世後期においては地代の支払い手段として用役の代わりに貨幣地代が導入された。このことによって農民は土地から自由になり、彼らは自ら生産した物を近くの市場で販売するようになった。この結果、局地的市場圏が形成されるようになった[2)]。

以後、農民は市場で生産物を売買することによって利潤を得、富を蓄積していった。これは従来は商人にしか許されなかったことである。局地的市場において自由競争が行われ、その結果としてある者は富を蓄積し、この富が産業資本として用いられたのである。一方、他の人々は労働者として留まった。

このように封建領主から自由を獲得した農民により局地的市場圏を通じて蓄積された富が産業資本として用いられたのである。この大塚理論を新古典派の経済理論

1)　文献 [3] を参照

2)　そのような貨幣地代の出現と局地的市場圏との関係は Kosminski[2] に論じられている。

を用いて定式化してみるのが、小論の目的である。

なお、現実の富の不平等の拡大を説明するためには、これだけでは不十分である。というのは、定常均衡を元にして物事を考える経済理論の考え方からすれば、長期的に安定な定常均衡が存在し、そこではすべての個人は同質的であると見なすのが一般的であるからである。仮に、商才のある人物が富を築いたとしても、彼の子孫がその富を継続的に保有する十分な根拠とはならない。小論では、大きな富を保有する家系は、永年かかってその富を築き上げげたと仮定し、それを可能とするメカニズムが経済の中に存在すると考える。我々の問題は、初期時点においては等しい資産を保有していた家々であるはずなのに、ある家系は次第に裕福になり、他の家系はそうではないのは何故か、ということである。すなわち、不平等発生プロセスを経済理論的に導出することである。

この目的のために基本となる２つの考え方は、次の通りである。(A) 富を築くのに商才が必要であることは認める。しかし、彼の富が幾世代に渡って成長するためには社会的環境が必要である。(B) 富が成長を続けるためには、所得の稼得方法と同時に消費のパターンが重要である。つまり、その家系が富を枯渇してしまわないような消費パターンを保有していたかである。

この小論では、各時点において長期均衡が成立していると見なす。社会環境と貯蓄行動の重要性を際だたせるために、すべての個人は能力において同質であると仮定する。我々の分析の出発点は、局地的市場圏が形成された時点であり、そこではすべての個人は同質であり、すべてが労働を供給する労働者であったとする。しかし、彼らは資産を保有しており、賃金所得のみならず、利子所得も受け取っている。外的環境が変化したときに、これは技術水準の変化と考えているが、この長期均衡は不安定となる。その結果、個人間の資産の乖離が生じる。従って、この長期均衡に対して何らかの外的な衝撃があったときに、ある個人はその資産を増加させ、他の者たちは減少させる方向に動く。

個人は十分に大きな資産を保有し、十分な利子所得を受け取るときには、労働を供給しないと仮定するので、彼らは資本家となる。他の者たちは労働者に留まる。

このようにして２つの階級が存在する安定的な長期均衡が出現するのである。技術進歩の結果、先の長期均衡が不安定なものになるためには、貯蓄関数と労働供給関数がある仮定を満たさなければならない。ある家系の資産が継続的に成長するためには、所得が上昇するにつれて貯蓄率も上昇する必要がある。数学的に、この不均等拡大プロセスは以下のように説明できる。微分方程式体系の均衡解があるパラメーターの変化のために不安定になり、不安定な均衡点から新しい安定な均衡点に移動するのである。このような方法によって、微分方程式体系を用いて資本家の出現をモデル化する。ここで示されたモデルは新古典派モデルであり、基礎となっているのは、Samuelson-Modigliani[5] によって示された２階級モデルである。

2.　モデル

2.1　代表的個人の方法

初期時点においては全ての個人は同質であったという仮定から出発する。ここで注目すべきことは、すべての人が同質であったとしても同じ行動をとるという結果にはならないということである。つまり、全ての個人が同質的であるという定常均衡は不安定となることもあり、これとは異なった安定な均衡が存在し、経済はそこに収束する可能性があるということである。従って、多数の同質的な個人による経済を扱うときに、すべての個人が同じように行動するという前提での“代表的個人”の手法はここでは必ずしも真実を捉えきれないということである[3)]。

生産技術は

3)　次の連立方程式体系の運動を考えてみよう。

$$\dot{x} = \frac{1}{2}x - y$$
$$\dot{y} = -x + \frac{1}{2}y$$

$x+y$ は安定な定常均衡値、つまり、$x+y=0$ に収束する。しかし、x および y は発散し、それらの定常均衡は鞍点となっている。

この例は、すべての個人が同質的であれ代表的個人の方法によって経済の動きを正確に分析できるという考えは間違いであり、同質的な個人であっても異質的に行動する可能性を示している。

$$y = lf(k), f' > 0, f" < 0, \lim_{k\to\infty} f' = 0, \lim_{k\to 0} f' = \infty \tag{1}$$

で示され、y は労働者一人当たりの生産量、l は労働、k は資本労働比率である。資本労働比率 k は

$$k = \frac{a}{l} \tag{2}$$

で与えられる。ここで a は資産である。完全競争を仮定し、賃金率、利子率はそれぞれ

$$w = f(k) - f'(k)k, \quad r = f'(k) \tag{3}$$

となる。個人の所得は賃金所得と利子所得で構成される。Y を所得とし、

$$Y = wl + ra \tag{4}$$

となる。労働供給 l は資産 a, 賃金率 w, 利子率 r に依存し、

$$l = \psi(a, w, r), \quad \psi(0, w, r) > 0, \quad \psi_a < 0, \quad \psi_{aa} > 0,$$
$$\psi(a, w, r) = 0 \quad \text{for} \quad a \geq a^o \tag{5}$$

と表現することができる。つまり、資産が 0 のときには労働供給量は正である。また、資産の量がある a^o 以上では全く労働を供給しなくなる。さらに、この労働供給 l の満たすべき性質として、資産 a が増えると労働供給 l は減少するが、彼の予想する所得 Y を減らすほどは減少しない。つまり、

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = wl_a + r > 0 \tag{6}$$

を満たすものとする[4)]。このとき、賃金率 w, 利子率 r は完全競争下の彼にとっては所与であり、a が動いても w, r は動かないと予想する。このような前提の下で (6) が成立するように彼の労働供給を決定するのである。このときの Y を彼の予想所得

4) 真の所得については、a が動けば w, r を経由しての効果が存在する。

を呼ぼう。この予想所得は$\partial^2 Y/\partial a^2 = wl_{aa} > 0$となるので、凸増加関数である。

また、a°はw, rに依存する。さらに、w, rは資本労働比率kに依存するから

$$l = l(k, a), \quad l_a < 0 \tag{7}$$

と表現できる。よって彼の予想所得Yは資産aと資本労働比率kの関数として

$$Y(k, a) = wl(a, k) + ra \tag{8}$$

となる。貯蓄関数は所得Yの関数として

$$s = s(Y), \quad s(0) = 0, \quad 0 < s' < 1, \quad 0 < s", \quad \lim_{Y \to \infty} s' = 1 \tag{9}$$

である。平均貯蓄率s/YはYに関して増加関数であり、所得Yが無限大に発散するにつれて1に収束する。貯蓄関数が所得に関して凸であり、予想所得関数$Y(k, a)$が資産aに関して凸であるから、計画貯蓄$s(Y(k, a))$は資産に関して凸である。

この経済の人口はnの率で成長している。すると資産の動きは

$$\dot{a} = s(wl + ra) - na \tag{10}$$

となる。ここでドットは時間変化率である。このように、代表的個人の資産aの動きが与えられたときに、すべての個人の資産が代表的個人のそれと全く同じ動きをするとして経済全体の運動を考察する。

以下において、この経済には少なくとも1個の均衡が存在することを示す。(2)を全微分して(7)を用いて

$$\frac{dk}{da} = \frac{1 - kl_a}{l + kl_k} \tag{11}$$

となる。後に$l_k < 0$を仮定するが、$l + kl_k > 0$は満たされるとする。よって、$dk/da > 0$であり、資本労働比率と資産は同じ方向へと動く。(10)をkを用いて書き換える。$Y = f(k)l = f(k)a/k$であるから

$$\dot{a}= s(Y) - na = \left\{\frac{s(Y)}{Y} - \frac{k}{f(k)}n\right\}Y \tag{12}$$

となる。$k \to 0$ のとき $f/k \to \infty$ となるから、また、$l > 0$ であるので (2) より $a \to 0$ のときに $k \to 0$ となる。よって、$k/f \to 0$ となる。しかしこのとき、$s(Y)/Y$ は強く正であるから、十分に小さな a に対しては $\dot{a}> 0$ となる。また、$k \to \infty$ のとき（これは $a \to \infty$ によってもたらされるのであるが、）$k/f \to \quad \infty$ となり、$s/Y < 1$ であるから、十分に大きな a については $\dot{a}< 0$ となる。従って、少なくともある 1 個の a が存在し、そのとき $\dot{a}= 0$ となる。

また、複数均衡が存在しても、1 個の安定的な均衡が存在し、そこでは $d\,\dot{a}\,/da < 0$ が成立する。

定理 1：全ての個人が一様に行動すると仮定すると、資産が正の範囲において少なくとも 1 個の定常均衡が存在する。

先に示したように、全ての個人の貯蓄関数、あるいは行動方程式が同一であったとしても、各人は異なった行動をとり得る。そのような経済をＮ人経済と呼ぼう。

2.2　N 人経済

このＮ人経済の均衡の存在と安定性を検討する。この経済の運動は

$$\begin{aligned} \dot{a}^i &= s(Y(k, a^i)) - na^i = 0, i = 1, ..., N \\ k &= \frac{\sum_i a^i}{\sum_i l^i} \end{aligned} \tag{13}$$

で示される。定常均衡はすべての i について $\dot{a}^i = 0$ となるところで与えられる。

k, w, r の均衡水準を、それぞれ k^*, w^*, r^* で示す。個人 i の予想所得 $Y(k, a^i)$ は簡単化のために、Y^i と表わす。始めに示したように、予想貯蓄 $s(Y^i)$ は資産 a^i の

凸関数であるから、定常均衡において個人の資産a^iに関しての定常均衡が２個存在する可能性がある。このときは、以下に示すように、$r^* > n$でなければならない。

$r^* > n$のとき、$a^i > a^o$においては$Y^i = r^* a^i$だから$a^i \to \infty$のとき、$s/Y^i \to 1$および$na^i/Y^i \to n/r^* < 1$となる。従って$s(Y(k^*, a^i)) - na^i = \{\frac{s}{Y^i} - \frac{n}{r^*}\}Y^i > 0$が、十分に大きな$a^i$に対して成立する。

さらに、$a^i = 0$のときには労働を供給し、賃金率は正であり、貯蓄率も正であるから$s(Y^i) - na^i > 0$が成立する。よって(13)には２個の均衡が存在するときには$r^* > n$でなければならない。$r^* < n$のときには$a^i \to \infty$に対して、$s/Y \to 1$となり、$na^i/Y \to n/r^* < 1$となる。$Y^i > s(Y^i)$であり、かつ、$s(Y^i)$がa^iに関して凸であるから(13)に唯一の均衡解が存在する。

補助定理１: $r^* > n$のときにはa^iに関して２個の均衡が存在し、$r^* < n$のときには１個の均衡が存在する。

$r^* > n$においては２個の均衡が存在することを示した。しかし、その双方ともがa^oよりも小さいか、つまり、労働供給が正で与えられている範囲であるか否かは不明である。

以下に様々なケースに応じての、この経済の均衡の安定分析を行う。

2.2.1 安定分析

a^{i*}を均衡値とする。すると、均衡の近傍での体系の運動は(13)より

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \vdots \\ \dot{a}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N1} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - a_1^* \\ \vdots \\ a_N - a_N^* \end{bmatrix} \tag{14}$$

と近似できる。ここで

$$h_{ij} = \begin{cases} s' \cdot (wl_a^i - r) - n + s' \cdot \{wl_k^i + f"l^i(\frac{a^i}{l^i} - k)\}\frac{1-kl_a^i}{(l+kl_k)N} & \text{when } i = j \\ s' \cdot \{wl_k^i + f"l^i(\frac{a^i}{l^i} - k)\}\frac{1-kl_a^i}{(l+kl_k)N} & \text{when } i \neq j \end{cases}$$

である。ここで、$l = \frac{\sum_i l^i}{N}$ である。労働供給は (5) で示され、a^i に依存する。すべての個人が労働を供給するとは限らない。労働を供給しない個人、これを資本家と呼ぶ、については $l^i = l_k^i = l_a^i = 0$ を解釈する。(14) の行列の行列式の固有根の実部が全て負であれば、均衡は局所的に安定である。

2.3 ケース A : $r^* < n$

$k = k^*$ において $s(Y^i) - na^i$ の値は、a^i が 0 から増加するにつれて正から負と単調に減少する。従って、唯一の均衡においては $s' \cdot (wl_a^i - r) - n < 0$ が成立する。すべての個人が同一の資産 a^i を持つのだから、$a^i/l^i = k$ となり、また、$l_k < 0$ を仮定するので $h_{ij} < 0, (i \neq j)$ となる。よって、付録の定理 A(i) より、均衡は安定となる[5)]。

なお、$l_k^i < 0$、つまり、労働供給が賃金率に対して負の関係を持つのは、ベントアップした労働供給曲線のときに、これが成立する可能性がある。

2.4 ケース A : $r^* > n$ の場合

この場合には均衡資産の値が 2 個存在する。つまり、$s(Y^i) - na^i = 0$ を満たす a^i は 2 個存在する。というのは、$s(Y^i)$ は a^i に関して凸増加関数であり、a^i が 0 から増加するにつれて $s(Y^i) - na^i$ の値は正、負、正と符号を変えることが明らかであるからである。この 2 つの均衡資産を $a^I, a^{II}, (a^I < a^{II})$ とし、a^I の資産を保

5) しかし、$\frac{\partial l}{\partial k} = -kf"\frac{\partial l}{\partial w} + f"\frac{\partial l}{\partial r}$ となる。利子率が上昇すると資産所得が増えるので労働供給意欲は低下する $(,\partial l/\partial r < 0)$, であろう。よって、労働供給が賃金率に正の関係 $(,\partial l/\partial w > 0)$, があれば $\partial l/\partial k > 0$ となる。

有するグループをグループ１とし、同様にグループ２を定義する[6)]。

なお、a^I においては $s'\cdot(wl_a^I+r)-n<0$ となり、a^{II} においては $s'\cdot(wl_a^{II}+r)-n>0$ となる。

個人は $i=1,\ldots,N^1$ をグループ１と、$i=N^1+1,\ldots,N$ をグループ２とする。このとき、(14) の行列は付録に示されたように４分割される。

$1\le i\le N^1, 1\le i\le N$ では

$$h_{ii}=s'\cdot(wl_a^I+r)-n+s'\cdot\{wl_k^I+f"l^I(\frac{a^I}{l^I}-k)\}\frac{1-kl_a^I}{(l+kl_k)N},$$

$$h'_{ij}=s'\cdot\{wl_k^I+f"l^I(\frac{a^I}{l^I}-k)\}\frac{1-kl_a^I}{(l+kl_k)N},\quad (i\neq j)$$

となり、$N^1+1\le i\le N, 1\le j\le N$ では

$$h_{ii}=s'\cdot(wl_a^{II}+r)-n+s'\cdot\{wl_k^{II}+f"l^I(\frac{a^{II}}{l^{II}}-k)\}\frac{1-kl_a^I}{(l+kl_k)N}$$

$$h'_{ij}=s'\cdot\{wl_k^{II}+f"l^I(\frac{a^{II}}{l^{II}}-k)\}\frac{1-kl_a^I}{(l+kl_k)N},\quad (i\neq j)$$

となる。

今、$a^o>a^{II}$ のとき、２つのグループともに労働を供給し、先に示したように $1\le i,j\le N^1$ において $h_{ii}-h_{ij}=s'\cdot(wl_a^{II}+r)-n>0$ であるから、第２グループが２人以上の個人から形成されている場合は、付録の定理 A(ii) よりこの均衡は不安定となる。$a^I<a^o<a^{II}$ のときには、第２グループの個人は労働を供給しない。そのときは、均衡では $s(ra^{II})-na^{II}=0$ であり、貯蓄関数 (9) の形状から均衡では $s'\cdot r>n$ でなければならない。よって、$N^1+1\le i,j\le N$ で $h_{ii}-h_{ij}>0$ となり、この場合も同じく、第２グループが２人以上によって形成されているときは、この定常均衡は定理 A(ii) より不安定となる。

定理２：大きな資産を持つグループが２人以上の個人で成り立つとき、この定常均

6) グループ１とグループ２の変数はスーパーフィックスの I, II によって示す。

衡は不安定である。

我々の議論は離陸プロセスを示すものであるから、初期時点においては資本家は存在しなかったと仮定しよう。現実に、経済の資産が十分に小さいときには、まず初めに到達する定常均衡は上で示したようなものであろう。次に、この均衡から経済が離陸し、資本家が出現するプロセスを示す。

3.　技術進歩

技術進歩を導入し、生産関数を次のように修正する。

$$y = xlf(k) \tag{15}$$

ここで x は技術のレベルを示す変数である。すると賃金率、利子率は

$$w = x(f - f'k), \quad r = xf'$$

となる。技術進歩は賃金率 w、利子率 r を経由して資本労働比率 k に影響を与える。経済は、前節で示されたように、全ての個人は同質の労働者であるという安定な均衡にあるとしよう。技術進歩がこの均衡にどのような影響を与えるかを検討する。すべて同質の個人であり、均衡は安定であるから、代表的個人の方法を用いる。このときの個人の所得を $\tilde{Y}(k, a, x)$ とすると、均衡は

$$s(\tilde{Y}(k, a, x)) - na = 0 \tag{16}$$

$$k - \frac{a}{l} = 0 \tag{17}$$

で示される。ここで、$\tilde{Y}_x = (wl + ra)/x + xwl_x$ である。技術が進歩することによって、労働供給が一定である,$l_x = 0$, との仮想的前提においては所得は上昇する。現実には、一次効果として所得が上昇するので個人は労働供給を減少させる。しかし、

受け取る所得を技術進歩前ほどは減少させない、と仮定する[7)]。よって、$\tilde{Y}_x > 0$ となる。また、$l_x < 0$ となる。これは先に $l_k < 0$ を仮定したが、これより導出することができる[8)]。

(16) の解が a^* であるとしよう。$\tilde{Y}_x > 0$ であるから、x が上昇するにつれて、すべての a に対して関数 $s(\tilde{Y})$ のグラフは上方へとシフトする[9)]。(図１参照)[10)] 補助定理１で示されたように $r^* > n$ のときには、a の均衡値は２つ存在する。x が上昇するときには、予想貯蓄関数は図１に示されたように上方へとシフトする。脚注９で示したように、x の上昇につれて資本労働比率 k も上昇し、均衡利子率 r^* も変化するのであるが、図１では表示上の簡単化のために、この変化は無視しよう。すると２つの定常均衡が互いに近寄ってきて一致する。一致したときは

$$s' \cdot \tilde{Y}_a(k^*, a^*, x) - n = 0 \tag{18}$$

が成立する。(18) は全ての個人について成立するのであるから、$s' \cdot \tilde{Y}_a^i(k^*, a^*, x) -$

7) これは資産 a が上昇するにつれて労働供給を減少させるが、受け取り所得を低下させるほどは低下させないという仮定と同じである。

8) $$\frac{\partial l}{\partial k} = \frac{\partial l}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial k} + \frac{\partial l}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial k} < 0$$

であるから

$$\frac{\partial l(xw, xr, a)}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial w}w + \frac{\partial l}{\partial r}r < 0$$

となる。

9) (16) と (17) を全微分して

$$\begin{bmatrix} s' \cdot \tilde{Y}_k & s' \cdot \tilde{Y}_a - n \\ 1 + \dfrac{kl_k}{l} & -\dfrac{1 - kl_a}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dk}{dx} \\ \dfrac{da}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s' \cdot \tilde{Y}_x \\ \dfrac{kl_x}{l} \end{bmatrix}$$

となる。これより、

$$\frac{dk}{dx} = \frac{k}{\Delta}[-s' \cdot Y_x l_a + l_x\{s' \cdot x(wl_a + r) - n\}] > 0$$

となる。ここで Δ は上の行列の行列式の値であり、正である。

10) 図中のサフィックスのアラビア数字１，２は、それぞれ、x_1, x_2 を示し、$w_1 = w|_{x=x_1}$ などである。なお、$x_2 > x_1$ である。

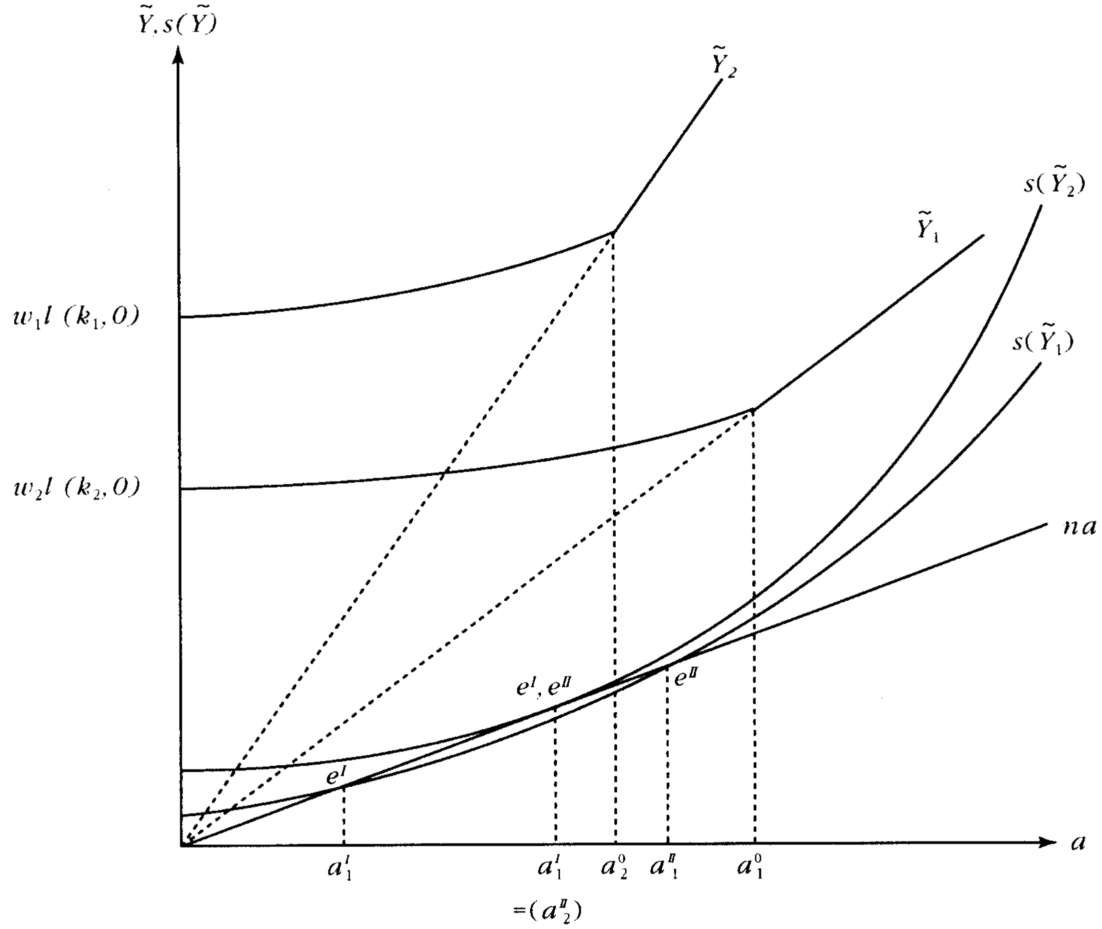

図 1

$n=0$ が全ての i に対して成立する。その結果、この均衡は付録の定理 A(ii) より、安定でも不安定でもなく中立的となる。ほんの僅かなショックがあったときには、一部の個人の資産は上方へと乖離し、再び均衡へと戻ることはない。また、他の個人の資産は減少し、ある一定の値に収束するであろう。すなわち、個人間の乖離が生じるのである。この資産に関する動きは、新しい安定な定常均衡へと到達するまで継続する。

一部の個人の資産は上昇する。しかし、上限が存在する。というのは資本家が生き延びるためには $r^* > n$ でなければならず、すなわち、資本労働比率に上限が存

在することを意味する。よって、労働供給は上限があるから、個人の資産にも上限がある。従って資産の上方への運動はどこかで静止しなければならず、そこで新しい均衡が成立する。

我々は先に見たように、２種類のグループが存在し、第２グループに２人以上の個人が存在する均衡は不安定であることを示した。よって考えることのできるケースは、第２グループが１人の個人から形成される場合である。

この場合の安定分析は、付録の定理 A(iii) で示されている。つまり、$s' \cdot r - n > 0$ が成立しており、複数の資本家が存在すれば互いの資産は離れようとする力が働く。しかし、今は一人しか資本家はいない。彼の資産 a^{II} が動くとき、資本労働比率が変化し、利子率を経由して元の均衡に戻そうとする経路が存在する。そのために彼の資産はこの定常均衡において安定的である。

定理３：ただ一人の資本家が存在する定常均衡は安定である。

4.　結論

外的攪乱によって、全ての個人が同質的であるという安定な均衡が不安定なものとなり、一人の資本家が出現し、その他は労働者として留まる、という新しい安定な均衡へと移っていくプロセスを導出した。

代表的個人の方法による分析は、すべての個人が同じように動くという制約を課しているのであり、個々の主体が異なったように動く場合を排除している。我々の分析は、個々人の間の相対的関係の不安定性を分析したのである。

ここでの重要な仮定は労働供給関数は、資本労働比率が上昇すると労働供給は減少するという仮定である。この経済的意味付けは、労働供給関数が賃金率に対してベントアップしていうことと解釈することができる。この仮定なくしては、各個人の資産が互いに乖離を始めるというミクロ的不安定性が生じる前に、マクロ的不安定性が生じてしまう。つまり、個人の資産（、その他の変数）が一様に同じ方向へ

と動き始めるのである。これは、我々が求めるものではない。従って、ベントアップした労働供給関数を仮定したのであるが、現実に、極めて裕福になった経済においては、さらに賃金率が上昇すると労働供給意欲はなくなっている、と想定するのが合理的であろう。

付録

各要素を m_{ij} とする N 行 N 列の行列$\boldsymbol{M}$を考える。ただし、$N = N^1 + N^2$ である。その要素は、

$1 \leq i \leq N^1, 1 \leq j \leq N$ のときは

$$m_{ij} = \begin{cases} a+b & \text{when } i = j \\ b & \text{when } i \neq j \end{cases}$$

となり、

$N^1 + 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$ のときは

$$m_{ij} = \begin{cases} a'+b' & \text{when } i = j \\ b' & \text{when } i \neq j \end{cases}$$

である。次の定理が成立する。

定理 A

(i) $N^2 = 0$ のとき、$a < 0, a + (N^1 - 1)b < 0$ のとき、$\boldsymbol{M}$ の固有根はすべて負となる。

(ii)$N^1 \geq 2, N^2 \geq 2$ のとき、a または a' が 0, または正なら $\boldsymbol{M}$ の固有根は 0, または正を含む。

(iii)$N^1 \geq 2, N^2 = 1$ のとき、N^1 が十分に大きいときは、$a' > 0, a < 0, b < 0$ のとき、$\boldsymbol{M}$ の固有根はすべて負となる。

(i) の証明

$|\boldsymbol{M}\text{-}\boldsymbol{\lambda I}|$ の N^1 行を $1,...,N^1-1$ 行からひく。その後、$1,..,N^1-1$ 列を N^1 列にたすことにより、$|\boldsymbol{M}-\boldsymbol{\lambda I}|=(a-\lambda)^{N^1-1}\{a+(N^1-1)b-\lambda\}=0$ となり、これより導出される。（証明了）

(ii) の証明

N 行を b/b' 倍して $1,...,N^1$ 行からひく。N 行を $N^1+1,...,N-1$ 行からひく。第 1 列を $\{b(a'-\lambda)\}/\{b'(a-\lambda)\}$ 倍して N 列にたす。N^1+1 列を N 列にたす。これより $|\boldsymbol{M}-\boldsymbol{\lambda I}|=(a-\lambda)^{N^1-1}(a'-\lambda)^{N^2-1}\{\lambda^2-\lambda(a+a'+N^1b+N^2b')+N^1a'b+N^2ab'+aa'\}=0$ となり、a、または、a' が固有根に含まれ、いずれか一方が正なら $\boldsymbol{M}$ は不安定行列となる。（証明了）

(iii) の証明

(ii) と同様の操作によって $|\boldsymbol{M}-\boldsymbol{\lambda I}|=(a-\lambda)^{N^1-1}\{\lambda^2-\lambda(a+a'+N^1b+b')+N^1a'b+ab'+aa'\}=0$ が導出できる。よって、N^1 が十分に大きいときは、$a'>0, a<0, b<0$ で固有根はすべて負となり、$\boldsymbol{M}$ は不安定行列となる。（証明了）

参考文献

[1] Kaldor, N. (1955-56), “Alternative Theories of Distribution,” *Review of Economic Studies,* 23,83-100.

[2] Kosminski, E.A. (1962) “Services and Money Rents in the Thirteenth Century,” in Cares Wilson, E.M.ed., Essays in Economic History, Vol.II, 231-48.

[3] Otsuka, H.(1964) “The Market Structure of Rural Industry in the Early Stages of the Development of Modern Capitalism,” in the Second Intrernational Econmic History Conference, Vol.I, Mouton, 1964.

[4] Pasinetti.L.(1962) “Rate of Profit and Income Distribution in Relation to

the Rate of Economic Growth," *Review of Economic Studies*,29,267-279.

[5] Samuelson, P. and Modigliani, F.(1966) "The Pasinetti Paradox in Neoclassical and More General Models," *Review of Economic Studies*,33,269-301.