貨幣的成長と期待形成

村　田　　　治

序

本稿では貨幣的成長モデルにおいて，期待形成の違いが均衡解の存在，一意性，体系の安定性等にどのような関わりがあるかを吟味する．[1)]

本稿で扱われる期待形成は次の６つである．[2)]

（1）　適応期待　（adaptive expectations）

（2）　静学期待　（static expectations）

（3）　近視眼的完全予見　（myopic perfect foresights）

（4）　合理的完全予見　（rational perfect foresights）

（5）　漸近的合理的期待　（asymptotically rational expectations）

（6）　外挿的期待　（extrapolative expectations）

１．モデル

以下のモデルで用いる記号は次の通りである．

Y：実質国民所得，K：実質資本ストック，L：労働供給，M：名目貨幣残高，P：物価水準，P^e：予想物価水準，y：一人当りの実質国民所得（$y=Y/L$），k：資本―労働比率（$k=K/L$），m：一人当りの実質貨幣残高（$m=M/PL$），π：物価上昇率（$\pi=\dot{P}/P$），π^e：予想物価上昇率（$\pi^e=\dot{P}^e/P^e$），μ：貨幣成

1）　分析に際しては共通の貨幣的成長モデルを用いる．

2）　期待形成仮説の展望としては森本〔12, pp. 85～90〕を参照されたい．この他に特殊なものとして Frenkel の期待形成方式がある．Frenkel〔7, p. 406〕参照．

長率（$\mu = \dot{M}/M$），n：労働供給成長率（$n = \dot{L}/L$），s：貯蓄性向，r：資本の名目収益率.

(1)　資本蓄積

生産関数は一次同次，及び well-behaved と仮定すると，一人当りの生産は

$$y = f(k),\ f' > 0,\ f'' < 0,\ f(0) = 0,\ f(\infty) = \infty,$$
$$f'(0) = \infty,\ f'(\infty) = 0 \tag{1}$$

で示される.

次に，予想可処分所得 Y_D は実質所得に新規の実質貨幣発行残高を加え，これより貨幣残高の予想減価を引いたものと定義する．つまり，

$$Y_D = Y + \frac{\dot{M}}{P} - \pi^e \frac{M}{P} \tag{2}$$

となる．この可処分所得の一定割合 s が貯蓄され，資本と実質貨幣残高の増加となる．よって，貯蓄 S は

$$S = \dot{K} + \frac{\dot{M}}{P} - \pi^e \frac{M}{P} \tag{3}$$

(1)(2)(3)式より

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1 - s)(\mu - \pi^e)m \tag{4}$$

を得る.

(2)　貨幣需要関数，及び物価水準の調整

一人当りの貨幣需要は一人当りの所得と資本の名目収益率の関数とする．つまり，

$$m^d = l(f(k),\ r),\ l_1 > 0,\ l_2 < 0 \tag{5}$$

となる．ただし，$r = f'(k) + \pi^e$ と定義する．ここで，いくつかの仮定をおこう.

仮定1

資本―労働比率 k は下に有界で，十分小さな ϵ に対して，$0<\epsilon\leqq k$ である．さらに，貨幣需要関数 l は $l(f(k),\ r)\geqq 0$, *for all* k, $0<\epsilon\leqq k<\infty$, *and for all* r.

仮定2

所与の k, $0<\epsilon\leqq k<\infty$ に対して，$l(f(k),\ \bar{r}(k))=0$ となる $\bar{r}(k)$ が存在する．

ところで，資本の名目収益率は $r=f'(k)+\pi^e$ と定義されているので，仮定2は所与の k に対して，$l(f(k),r)=0$ となる π^e が存在することを含意する.[1]

仮定3

$$0<\bar{r}(k)\leqq R<\infty,\quad \bar{r}'(k)>0,^{2)}\quad \lim_{k\to\infty}\bar{r}(k)=R$$

仮定3は，貨幣需要をゼロとする資本の名目収益率 $\bar{r}$ が上に有界であることを意味する．換言すれば，予想インフレ率 π^e がある水準以上になると貨幣が需要されなくなることを含意している.[3]

仮定4

$R>\mu$

次に，物価水準の調整は Fischer. S, に従って生産物市場の超過需要 (y^d-y^s) と予想物価上昇率 π^e によって決定されると仮定しよう．つまり，

$$\pi=\alpha\,(y^d-y^s)+\pi^e,\quad \alpha>0 \tag{6}$$

となる.[4] さらに，ワルラス法則より

---

1) 仮定2，3に関しては，Bermeister-Dobell〔2，pp. 161～162〕参照.

2) 仮定2より，$l[f(k),\ \bar{r}(k)]=0$．よって，$(l_1f'+l_2\bar{r}')dk=0$，これより $\bar{r}'(k)=-l_1f'/l_2>0$

3) つまり，インフレ予想が高いため，資産は全て実物資本で持たれ，貨幣は保有されなくなる．

4) Fischer,〔6，pp. 880～82〕参照.

$$y^d - y^s + m^d - m = 0$$

が成立するので，(6)式は

$$\pi = \alpha\,[m - l(f(k),\ r)] + \pi^e,\quad \alpha > 0 \tag{7}$$

となる.[1]

(3) 動学方程式

以上より，kとmの動学方程式は次のようになる.

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1-s)(\mu - \pi^e)\,m \tag{4}$$

$$\dot{m} = (\mu - n - \pi)\,m \tag{8}$$

従って，(7)式を考慮するなら，π^eの決定方式が付け加わればモデルは完結する.

2．期待形成

(1) 適応期待

適応期待の期待形成は

$$\dot{\pi}^e = \beta\,(\pi - \pi^e),\quad \beta > 0 \tag{9}$$

で示される．よって，調整方程式は

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1-s)(\mu - \pi^e)\,m \tag{4}$$

$$\dot{m} = (\mu - n - \pi)\,m \tag{8}$$

$$\dot{\pi}^e = \beta\,(\pi - \pi^e),\quad \beta > 0 \tag{9}$$

の３本となる.

---

1) このような定式化を行っているものとしては，Hadjimachalakis〔8，p. 387〕，Hayakawa〔10，p. 211〕，Benhabib-Miyao〔1，p. 589〕がある．また，Burmeister--Dobell〔2，p. 165〕をも参照せよ.

i）存在と一意性

ここで，次の関数を定義する．

$$G=\dot{k}\,|_{\pi=\pi^e}=sf(k)-nk-(1-s)(\mu-\pi^e)m \tag{10}$$

$$H=\dot{m}\,|_{\pi=\pi^e}=(\mu-n-\pi^e)m \tag{11}$$

まず，$H=0$ 線を求めよう．

① $H=0$ 線[1]

H 関数上では $\pi=\pi^e$ であるので，(7)式より，

$$m=l(f(k),\ r) \tag{12}$$

が成立している．これより

$$r=\phi(k,\ m) \tag{13}$$

$$\phi_1=-l_1f'/l_2>0,\quad \phi_2=1/l_2<0$$

を得る．次に資本の名目収益率 r は

$$r=f'(k)+\pi^e \tag{14}$$

であるので，(13)(14)式より，

$$\mu-n-\pi^e=\mu-n+f'(k)-\phi(k,\ m) \tag{15}$$

を得る．よって，

$$H=[\mu-n+f'(k)-\phi(k,\ m)]m \tag{16}$$

となる．$m=0$ の場合，(16)式の〔　〕の中は

$$\mu-n+f'(k)-\phi(k,\ 0)=\mu-n+f'(k)-\bar{r}(k) \tag{17}$$

1) $H=0$ 線上では $\dot{\pi}^e=0$，$\dot{m}=0$ が成立している．

となる．仮定より，$\bar{r}(k)$，$f'(k)$ は $0<\varepsilon\leqq k<\infty$ において有界であるので(17)式も有界となる.[1] 従って，(16)式より，$m=0$ の場合，$H=0$ となる．つまり

$$H|_{m=0}=0,\quad 0<\varepsilon\leqq k<\infty \tag{18}$$

次に $m>0$ の場合を考える．ここで，

$$\bar{H}=\mu-n+f'(k)-\phi(k,\ m) \tag{19}$$

とおくと，$m>0$ なら，$\bar{H}=0 \Longleftrightarrow H=0$ である．さらに，

$$\bar{H}_m=-\phi_2>0$$

であるので，$\bar{H}=0$ 式を m について解くことができ，

$$m=\bar{m}(k)=l[f(k),\ f'(k)+\mu-n]$$
$$\bar{m}'=l_1f'+l_2f''>0$$

を得る．ただし，上式は $m=l[f(k),\ f'(k)+\mu-n]>0$ の場合にのみ成立する．つまり，

$$f'(k)+\mu-n<\bar{r}(k) \tag{20}$$

の場合にのみ成立する．ここで，$\underline{k}$ を

$$f'(\underline{k})+\mu-n=\bar{r}(\underline{k}) \tag{21}$$

と定義すると，$H=0$ 線として，

$$m=\bar{m}(k),\quad \bar{m}'>0,\quad k>\underline{k} \tag{22}$$

を得る．さらに，k^{**}，$\tilde{k}$ をそれぞれ

1) $\bar{r}(k)$ の有界性は仮定3により，また $f'(k)$ の有界性は生産関数の性質による．

$$sf(k^{**}) - nk^{**} = 0$$
$$sf'(\tilde{k}) - n = 0$$

の解とし（$0 < \tilde{k} < k^{**}$），次の仮定をおく．

仮定 5

$$\tilde{k} \leqq \underline{k} < k^{**}$$

② $G = 0$ 線[1]

(13)(14)式より，G 関数は

$$G = sf(k) - nk - (1-s)[\mu + f'(k) - \phi(k,\ m)]m \tag{23}$$

となる．まず，$m = 0$ の場合，上式の〔　〕の中は有界であるので[2]

$$G|_{m=0} = 0,\ \ k = k^{**} \tag{24}$$

を得る．次に $m > 0$ の場合，

$$G_m = (1-s)\phi_2 m - (1-s)[\mu + f'(k) - \phi(k,\ m)]$$

となり，これより

$$G_m|_{G=0} = (1-s)\phi_2 m - (sf(k) - nk)/m \tag{25}$$

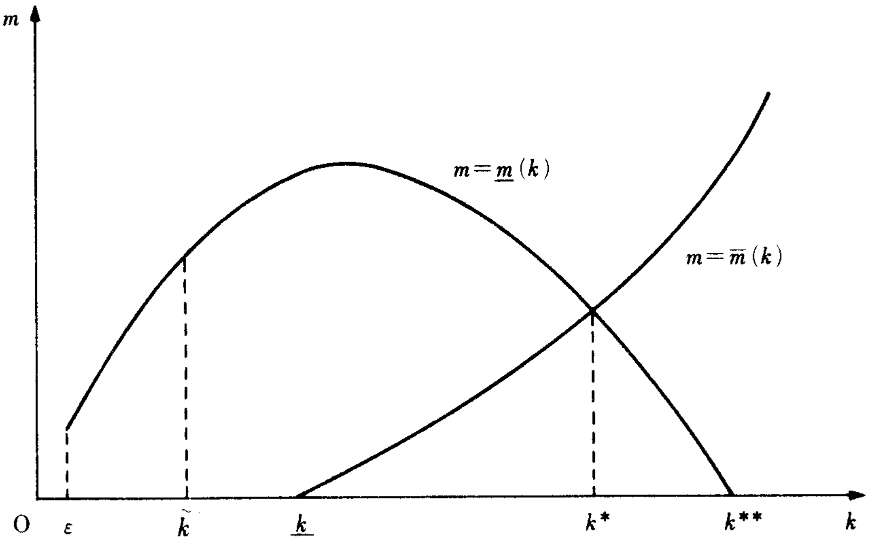
を得る[3]．よって

$$G_m|_{G=0} < 0,\ \ 0 < \varepsilon \leqq k < k^{**}$$

1）$G = 0$ 線上では $\dot{\pi}^e = 0$，$\dot{k} = 0$ が成立している．

2）$f'(k)$ は生産関数の性質と仮定 1 により有界である．また，$m = 0$ のとき，$\phi(k,\ m)$ は $\bar{r}(k)$ となり，よって仮定 3 より有界となる．

3）$G_m|_{G=0}$ は $G = 0$ の下での $\partial G/\partial m$ を意味する．従って，(23)式より $(1-s)[\mu + f'(k) - \phi(k, m)] = (sf(k) - nk)/m$ となり，(25)式を得る．



第1図

となり[1]，関数 $G=0$ は m について解くことができ，$G=0$ 線として

$$m=\underline{m}(k),\quad 0<\varepsilon\leqq k<k^{**} \tag{26}$$

を得る．ここで，(22)(26)式を $m-k$ 平面に図示すると第1図のようになる．

最後に次の関数を定義しよう．

$$\Psi=G|_{\dot{m}=0,\ m>0}=sf(k)-nk-(1-s)nl[f(k),\ f'(k)+\mu-n]$$

ここで，

$$sf(k)-nk>0,\quad 0<\varepsilon\leqq k<k^{**}$$
$$l[f(\underline{k}),\ f'(\underline{k})+\mu-n]=0$$
$$\tilde{k}\leqq\underline{k}<k^{**}$$

であるので，

$$\Psi(\underline{k})>0$$

1) $0<\varepsilon\leqq k<k^{**}$ においては，$sf(k)-nk>0$ である．

が成立する．他方

$$\Psi(k^{**}) = -(1-s)nl[f(k^{**}),\ f'(k^{**})+\mu-n]$$
$$< -(1-s)nl[f(\underline{k}),\ f'(\underline{k})+\mu-n] = 0$$

となる．よって，$\underline{k} < k < k^{**}$ において，

$$\Psi(k^{*}) = 0$$

となる k^{*} が存在する．最後に

$$\Psi'(k) = sf'(k) - n - (1-s)n\bar{m}'(k) < 0$$

より，[1] 一意性が証明される．

以上で，$k^{*}>0$，$m^{*}>0$，$\pi=\pi^{e}=\mu-n$ の均衡の存在と一意性が証明された．

ii）安定性

(7)式は(14)式を考慮すると

$$\pi = \varphi(k,\ m,\ \pi^{e}) \tag{27}$$
$$\varphi_1 = \frac{\partial\pi}{\partial k} = -\alpha(l_1 f' + l_2 f'') < 0$$
$$\varphi_2 = \frac{\partial\pi}{\partial m} = \alpha > 0$$
$$\varphi_3 = \frac{\partial\pi}{\partial\pi^{e}} = 1 - \alpha l_2 > 0$$

と書けるので，動学方程式は

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1-s)(\mu-\pi^{e})m$$
$$\dot{m} = [\mu - n - \varphi(k,\ m,\ \pi^{e})]m$$
$$\dot{\pi}^{e} = \beta[\varphi(k,\ m,\ \pi^{e}) - \pi^{e}],\quad \beta > 0$$

1) 仮定5より $\tilde{k} < k^{*}$ であるので，$sf'(k^{*}) - n < 0$ である．

となる．上式を均衡点（k^*，m^*，π^{e*}）の近傍で線型化すると

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{m} \\ \dot{\pi}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf' - n & -(1-s)n & (1-s)m \\ -m\varphi_1 & -m\varphi_2 & -m\varphi_3 \\ \beta\varphi_1 & \beta\varphi_2 & \beta(\varphi_3 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ m - m^* \\ \pi^e - \pi^{e*} \end{pmatrix}$$

を得る．上式の係数行列をΔとすると，

$$Det.\ \Delta = m\beta\,[(sf' - n)\,\varphi_2 + (1-s)\,n\varphi_1]$$

$$trace\ \Delta = sf' - n - m\varphi_2 + \beta\,(\varphi_3 - 1)$$

$$\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = (sf' - n)\,[\beta\,(\varphi_3 - 1) - m\varphi_2] - mn(1-s)\,\varphi_1 + m\beta\,[\varphi_2 - (1-s)\,\varphi_1]$$

$$\begin{aligned} trace\ \Delta \times [\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}] - Det.\ \Delta \\ = [\beta(\varphi_3 - 1) - m\varphi_2]\,[\{(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}) + mn\,(1-s)\,\varphi_1\} \\ + (sf' - n)^2] - mn\,(1-s)\,\varphi_1\,(\beta\varphi_3 - m\varphi_2) \\ - m\,(1-s)\,(sf' - n)\,\varphi_1(n+\beta) \end{aligned}$$

となり，均衡の存在と一意性が保証されているなら，安定条件（十分条件）は

$$\beta < \frac{\alpha\, m}{1 - \alpha\, l_2} = -\frac{m}{l_2 - 1/\alpha} \tag{28}$$

となる.[1][2]

(2) 静学期待

静学期待は適応期待において調整係数βがゼロの特殊ケースである.[3] 従って，この定式化は

$$\pi^e = \bar{\pi}^e = const. \tag{29}$$

---

1) 仮定１～５が満足されるなら均衡の存在と一意性が保証される．特に，仮定５が満たされるなら，$sf'(k^*) - n < 0$となる．

2) (28)式は$\alpha = \infty$の場合，Cagan の安定条件になる．Cagan ［5，pp. 64～65］，Sidrauski ［14，p. 806］，Burmeister-Dobell ［2，p. 188］参照．

3) Burmeister-Dobell ［2，p. 187］参照．

となる[1]．よって，動学方程式は

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1-s)(\mu - \bar{\pi}^e)m \tag{30}$$

$$\dot{m} = (\mu - n - \pi)m \tag{31}$$

となる．

i）存在と一意性

① $\dot{m} = 0$ 線

$m = 0$ の場合，(7)式より

$$\pi = -\alpha\, l[f(k),\ f'(k) + \bar{\pi}^e] + \bar{\pi}^e$$

を得，これより

$$\mu - n - \pi = \mu - n + \alpha\, l[f(k),\ f'(k) + \bar{\pi}^e] - \bar{\pi}^e$$

を得る．よって，$0 < \varepsilon \leqq k < \infty$ においては，$\mu - n - \pi$ は有界となり[2]，

$$\dot{m}\,|_{m=0} = 0$$

を得る．次に，$m > 0$ の場合，$\dot{m} = 0 \Longleftrightarrow \mu - n - \pi = 0$ である．$\mu - n - \pi = 0$ は(7)式を考慮すると，

$$\mu - n - \pi = \mu - n - \alpha\,\{m - l[f(k),\ f'(k) + \bar{\pi}^e]\} - \bar{\pi}^e = 0$$

となり，これより

$$m = \frac{1}{\alpha}\{\mu - n - \bar{\pi}^e + \alpha\ l[f(k),\ f'(k) + \bar{\pi}^e]\} \tag{32}$$

を得る．上式が意味を持つのは，

$$\mu - n - \bar{\pi}^e + \alpha\, l[f(k),\ f'(k) + \bar{\pi}^e] > 0$$

1) (29)式を定差形で表現すると $\pi_{t+i}^e = \pi_t^e\,(i = 1, 2 \cdots)$ となろう．

2) 生産関数の性質により，$f(k)$，$f'(k)$ は $0 < \varepsilon \leqq k < \infty$ において有界である．

の場合に限られる．ここで，$\underline{\underline{k}}$ を

$$\mu - n - \bar{\bar{\pi}}^e + \alpha\, l[f(k),\ f'(k) + \bar{\bar{\pi}}^e] = 0 \tag{33}$$

の解とすると，(32)式を m について解いて

$$m = \bar{\bar{m}}(k),\ \bar{\bar{m}}' = l_1 f' + l_2 f'' > 0,\ k > \underline{\underline{k}} \tag{34}$$

を得る．特に，$\bar{\bar{\pi}}^e = \mu - n$ の場合，(32)式は

$$m = l[f(k),\ f'(k) + \mu - n]$$

となり，仮定2，及び(21)式より，

$$\underline{\underline{k}} = \underline{k}$$

となる．ここで，$\partial \underline{\underline{k}} / \partial \bar{\bar{\pi}}^e$ を求めると

$$\frac{\partial \underline{\underline{k}}}{\partial \bar{\bar{\pi}}^e} = \frac{1 - \alpha\, l_2}{\alpha\,(l_1 f' + l_2 f'')} > 0,\ for\ \bar{\bar{\pi}}^e \geqq \mu - n$$

を得る．[1)]

他方，$\bar{\bar{\pi}}^e < \mu - n$ の場合，(32)式は仮定1より，

$$m = \frac{1}{\alpha}\{\mu - n - \bar{\bar{\pi}}^e + \alpha\, l[f(k),\ f'(k) + \bar{\bar{\pi}}^e]\} > 0 \tag{35}$$
$$for\ all\ 0 < \varepsilon \leqq k < \infty$$

となる．最後に，$\bar{\bar{\pi}}^e$ を

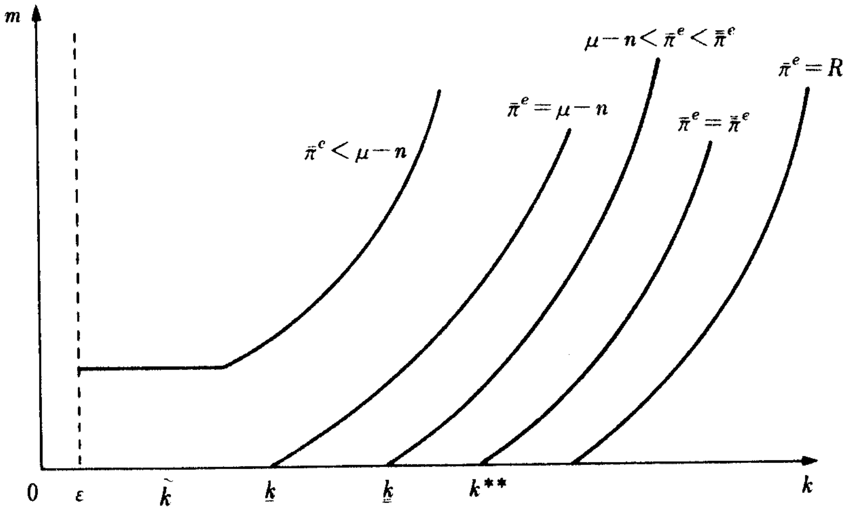
$$\bar{\bar{\pi}}^e = \mu - n + \alpha\, l[f(k^{**}),\ f'(k^{**}) + \bar{\bar{\pi}}^e] \tag{36}$$

と定義しよう．[2)] 以上のことから，$\dot{m} = 0$ 線を図示すると第2図のようになる．

---

1) $\underline{\underline{k}}$ は(33)式の解であり，また仮定1より $l[f(k),\ f'(k) + \bar{\bar{\pi}}^e] \geqq 0$ であるので，(33)式は $\bar{\bar{\pi}}^e \geqq \mu - n$ においてのみ成立する．

2) k^{**} は $sf(k) = nk,\ k > 0$ を満足する解である．



第2図

② $\dot{k}=0$ 線

$m=0$ の場合，動学方程式は

$$\dot{k}=sf(k)-nk$$

となり，$k=k^{**}$ で $\dot{k}=0$ となる．次に，$m>0$ の場合，

$$\dot{k}=0 \Longleftrightarrow sf(k)-nk=(1-s)(\mu-\bar{\pi}^e)m$$

となり，これより

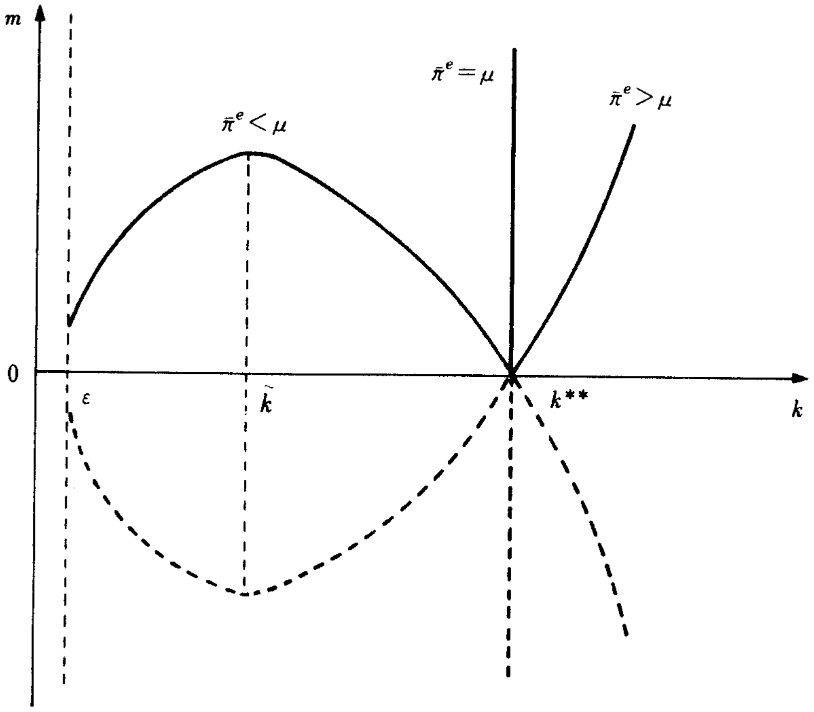
$$m=\underline{\underline{m}}(k),\ \ \underline{\underline{m}}'=\frac{sf'-n}{(1-s)(\mu-\bar{\pi}^e)} \tag{37}$$

を得る．ただし，

$$\begin{cases} \mu>\bar{\pi}^e \text{ の場合} \\ \quad \underline{\underline{m}}' \gtreqless 0 \ \ as\ k \gtreqless \tilde{k} \\ \mu<\bar{\pi}^e \text{ の場合} \\ \quad \underline{\underline{m}}' \lesseqgtr 0 \ \ as\ k \gtreqless \tilde{k} \end{cases}$$

となる.[1] また，$\mu=\bar{\pi}^e$ の場合は $k=k^{**}$ となる.

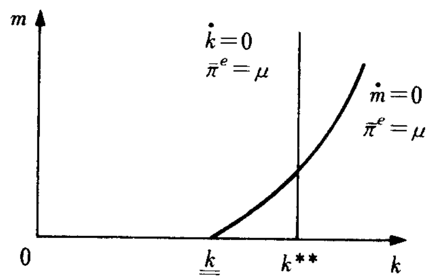
これより，$\dot{k}=0$ 線を図示すると第3図のようになる.

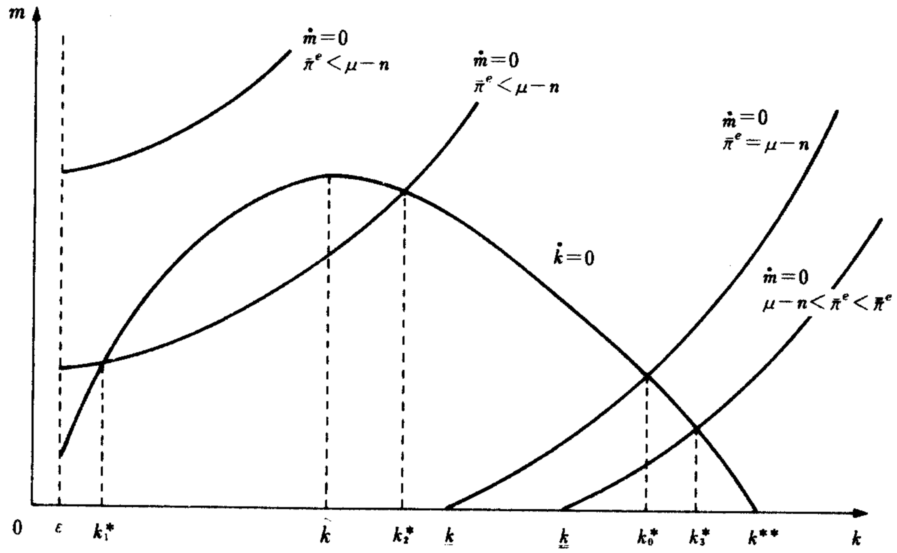


第3図

さらに，$\bar{\pi}^e<\mu$ の場合第2図と第3図をあわせると第4図のようになる.[2] 図からも分かるように，$\mu-n\leqq\bar{\pi}^e<\bar{\bar{\pi}}^e$ においては，$m>0$，$k>0$ の一意の均衡が存在するが，$\bar{\pi}^e<\mu-n$ では均衡が存在するかどうか不明であり，かつ一意性も保証されない．また，$\bar{\bar{\pi}}^e\leqq\bar{\pi}^e\leqq\mu$ の場合には均衡は存在しな

1) ただし，$\tilde{k}$ は $sf'(k)-n=0$ の解である．
2) ただし，第4図では $\mu\geqq\bar{\bar{\pi}}^e$ を仮定している．
$\mu<\bar{\bar{\pi}}^e$ の場合，右図のような均衡が存在する．





第4図

い.[1]

他方，$\bar{\pi}^e > \mu$ の場合，特に $\bar{\pi}^e \geqq R$ ならば，$m>0$，$k>0$ において均衡は存在しない．このことは次のようにして分かる．いま，$\bar{\pi}^e \geqq R$ ならば

$$f'(k)+\bar{\pi}^e \geqq R \geqq \bar{r}(k)$$

が成立する.[2] よって，仮定2より

$$l[f(k),\ f'(k)+\bar{\pi}^e]=0$$

となり，(7)式は

1) $\bar{\bar{\pi}}^e \leqq \bar{\pi}^e \leqq \mu$ を満たす $\bar{\pi}^e$ においては(37)式より，$\dot{k}=0$ を満足する軌跡は $0<\varepsilon \leqq k < k^{**}$ において，$(k,\ m)>(0,\ 0)$ である．他方，$\bar{\bar{\pi}}^e \leqq \bar{\pi}^e \leqq \mu$，$0<\varepsilon \leqq k < k^{**}$ なる $\bar{\pi}^e$，k に対しては，(35)(36)式より

$$m=\frac{1}{\alpha}\{\mu-n-\bar{\pi}^e+\alpha\, l[f(k),\ f'(k)+\bar{\pi}^e]\}$$
$$<\frac{1}{\alpha}\{\mu-n-\bar{\bar{\pi}}^e+\alpha\, l[f(k^{**}),\ f'(k^{**})+\bar{\bar{\pi}}^e]\}=0$$

となり，$0<\varepsilon \leqq k < k^{**}$ において，$(k,\ m)>(0,\ 0)$ を満たす $\dot{m}=0$ 線は存在しない．また，$\bar{\pi}^e \leqq \mu$ の場合 $k \geqq k^{**}$ においては，$\dot{k}=0$ 線の軌跡は $m>0$ を満足しない．よって，$\bar{\bar{\pi}}^e \leqq \bar{\pi}^e \leqq \mu$ のとき，均衡は存在しない．

2) 等号は $k=\infty$ のときに成立する．

$$\pi = \alpha m + \bar{\pi}^e$$

となる．上式と仮定4より，$m > 0$ においては，

$$\pi > \bar{\pi}^e \geqq R > \mu > \mu - n,$$

すなわち，$\pi > \mu - n$ となり，均衡は存在しないことが分かる．また，$\mu < \bar{\pi}^e < R$ においては，均衡が存在するかどうか不明である.[1]

以上のように，静学期待の場合，均衡の存在と一意性は保証されないのである.[2]

ii）安定性

(27)式を考慮して，(30)(31)式を均衡点 (k^*, m^*) の近傍で線型化すると

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sf' - n & -(1-s)(\mu - \bar{\pi}^e) \\ -m\varphi_1 & -m\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - k^* \\ m - m^* \end{bmatrix}$$

となり，これより係数行列を Δ とすると

$$Det.\ \Delta = -m(sf' - n)\varphi_2 - m(1-s)(\mu - \bar{\pi}^e)\varphi_1$$

$$trace\ \Delta = sf' - n - m\varphi_2$$

を得る．よって，第4図の k_2^*, k_0^*, k_3^* は安定的，k_1^* は不安定となる．

(3) 近視眼的完全予見，及び合理的完全予見

完全予見は，実際の物価上昇率が予想物価上昇率に等しくなるものであり[3]，適応期待において調整係数 β が ∞ の場合である[4]．従って，

1) 第4図のように，$\mu \geqq \bar{\bar{\pi}}^e$ の場合，$\bar{\bar{m}}'(k) > \underline{\underline{m}}'(k)$ なら均衡は存在するが，$\bar{\bar{m}}'(k) < \underline{\underline{m}}'(k)$ なら均衡は存在しない．

2) $\bar{\pi}^e < \mu$，かつ $\mu - n \leqq \bar{\pi}^e < \bar{\bar{\pi}}^e$ の場合には，$(k, m) > (0, 0)$ において一意の均衡が存在する．

3) 近視眼的完全予見の場合，経済主体はインフレ率に関してのみ正確に予見しうると仮定されているが，合理的完全予見の場合は主体が経済モデルを完全に知っていると仮定されている．

4) Burmeister-Dobell〔2, p. 187〕参照．

$$\pi^e = \pi \tag{38}$$

と定式化される．

ｉ）存在と一意性

仮定１～５の下で適応期待の場合と全く同様に証明できる．

ii）安定性

(38)式を(7)式に代入すると

$$m = l[f(k),\ f'(k) + \pi] \tag{39}$$

を得，これより

$$\pi = g(k,\ m) \tag{40}$$

$$g_1 = \frac{\partial\pi}{\partial k} = -\frac{1}{l_2}(l_1 f' + l_2 f'') > 0$$

$$g_2 = \frac{\partial\pi}{\partial m} = \frac{1}{l_2} < 0$$

を得る．よって，動学方程式は

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1-s)(\mu - g(k,\ m))m \tag{41}$$

$$\dot{m} = [\mu - n - g(k,\ m)]m \tag{42}$$

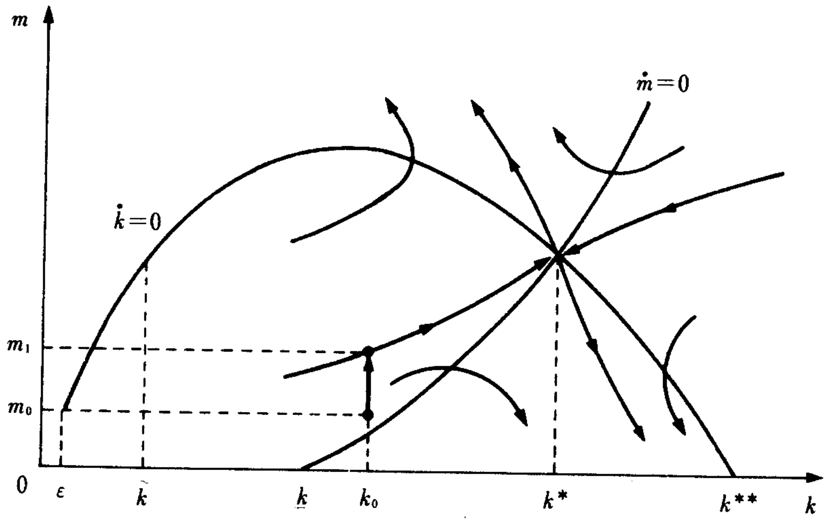
となる．上式を均衡点（k^*，m^*）の近傍で線型化すると，

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sf' - n + (1-s)mg_1 & (1-s)(mg_2 - n) \\ -mg_1 & -mg_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - k^* \\ m - m^* \end{bmatrix}$$

となり，これより，

$$Det.\ \Delta = -(sf' - n)mg_2 - (1-s)mng_1 < 0$$

$$trace\ \Delta = sf' - n + (1-s)mg_1 - mg_2 \gtreqless 0$$



第5図

となり，均衡点は鞍点となる.[1]

従って，期待形成が近視眼的完全予見の場合，存在と一意性は保証されるが安定性は保証されないのである.[2]

他方，合理的完全予見の場合，経済主体の合理性[3]を考慮するなら，体系はむしろ鞍点均衡でなくてはならない．われわれのモデルでは，(38)式を考慮すると，$m = M/P^{*}L$, $k = K/L$であるので，mはforward looking variableとなる．他方，kはある時点において歴史的に与えられた変数であるので，backward looking variableとなる.[4]これを図示すると，第5図のようになる.[5]

(4) 漸近的合理的期待

Stein, J. L. によれば漸近的合理的期待は

---

1) 仮定5により，均衡においては$sf'(k^{*}) - n < 0$である.

2) この結果は多くのMonetary Growth Modelにみられるものである．Burmeister-Dobel〔2，pp. 177～80〕参照.

3) モデルに関する完全情報.

4) 従って，特性根の1つは負の実根，他の1は正の実根となり，体系は鞍点でなければならない.

5) 初期時点で経済が（k_0, m_0）に与えられたとしよう．経済主体はモデルを完全に知っているため，合理的なインフレ率を予想し，経済は（k_0, m_1）へとジャンプし，その後，収束経路に沿って進むのである.

$$\dot{\pi}^e = \lambda(\mu - n - \pi^e), \quad \lambda > 0 \tag{43}$$

と定式化される.[1] 上式の意味は次のように考えられる.つまり,経済主体は均衡において物価上昇率が$\pi^* = \mu - n$となることを知っており,この均衡物価上昇率と予想物価上昇率の差に従って,予想を改善すると考えられる.[2]

i)存在と一意性

まず,次の関数を定義しよう.[3]

$$E = \dot{k}\,|_{\dot{\pi}^e = 0} = sf(k) - nk - (1 - s)nm \tag{44}$$

$$F = \dot{m}\,|_{\dot{\pi}^e = 0} = (\pi^e - \pi)m \tag{45}$$

① $E = 0$ 線[4]

$m = 0$ の場合,(44)式は

$$E = sf(k) - nk$$

となり,$k = k^{**}$ で $\dot{k} = 0$ となる.次に,$m > 0$ の場合,

$$\dot{k} = 0 \Longleftrightarrow sf(k) - nk = (1 - s)nm$$

となり,これより $E = 0$ 線として,

$$m = \underset{\sim}{m}(k), \quad \underset{\sim}{m}'(k) = \frac{sf' - n}{(1 - s)n}, \quad m > 0 \tag{46}$$

---

1) Stein〔18, pp. 51~54〕参照.

2) ここで,経済主体は均衡におけるインフレ率$\pi^* = \mu - n$のみを知っているのであって,モデルの全体系を知っているわけではない.その意味で,漸近的合理的期待においては経済主体の部分的な合理性が仮定されていると考えられる.

3) 漸近的合理的期待の場合,動学方程式は次の3本となる.

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1 - s)(\mu - \pi^e)m$$
$$\dot{m} = (\mu - n - \pi)m$$
$$\dot{\pi}^e = \lambda(\mu - n - \pi^e)$$

4) $E = 0$ 線上では $\dot{k} = 0$,$\dot{\pi}^e = 0$ が満たされている.

を得る．ただし，

$$\underset{\sim}{m}' \gtreqless 0 \ as \ k \lesseqgtr \tilde{k}$$

である．[1]

② $F=0$ 線[2]

$m=0$ の場合，(7)式より

$$\pi=-\alpha\, l[f(k),\ f'(k)+\pi^e]+\pi^e$$

となり，

$$\pi^e-\pi=\alpha\, l[f(k),\ f'(k)+\pi^e]$$

となる．よって，$0<\varepsilon\leqq k<\infty$ においては，$\pi^e-\pi$ は有界となり[3]

$$F|_{m=0}=0$$

を得る．次に，$m>0$ の場合，

$$\pi^e-\pi=0 \Longleftrightarrow F=0$$

であり，(7)式を考慮するなら，

$$\pi^e-\pi=-\alpha\,\{m-l[f(k),\ f'(k)+\pi^e]\}=0$$

を得る．これより，

$$m=l[f(k),\ f'(k)+\mu-n]=\tilde{m}(k)$$

$$\tilde{m}'(k)=l_1 f'+l_2 f''>0$$

1) これを図示すると，第3図の $\bar{\pi}^e<\mu$ の場合と同じになる．

2) $F=0$ 線上では $\dot{m}=0$，$\dot{\pi}^e=0$ が成立している．

3) 生産関数の性質により，$f(k)$，$f'(k)$ は $0<\varepsilon\leqq k<\infty$ において有界である．

を得る.[1] 上式が意味を持つのは $k \geqq \underline{k}$ の場合に限られる．ここで，$\underline{k}$ は

$$f'(\underline{k}) + \mu - n = \bar{r}(\underline{k}) \tag{21}$$

の解である．よって，$F=0$ 線として

$$m = \tilde{m}(k), \quad \tilde{m}' > 0, \quad k > \underline{k} \tag{47}$$

を得る.[2] 最後に次の関数を定義しよう.

$$J = E|_{\dot{m}=0,\ m>0} = sf(k) - nk - (1-s)\,nl[f(k),\ f'(k) + \mu - n]$$

ここで,

$$sf(k) - nk > 0, \quad 0 < \varepsilon \leqq k < k^{**}$$
$$l[f(\underline{k}), f'(\underline{k}) + \mu - n] = 0$$
$$\tilde{k} \leqq \underline{k} < k^{**}$$

であるので,

$$J(\underline{k}) > 0$$

が成立する．他方,

$$\begin{aligned} J(k^{**}) &= -(1-s)\,l[f(k^{**}),\ f'(k^{**}) + \mu - n] \\ &< -(1-s)\,l[f(\underline{k}),\ f'(\underline{k}) + \mu - n] = 0 \end{aligned}$$

であるので,[3] $\underline{k} < k < k^{**}$ において,

$$J(k^*) = 0$$

---

1) l 関数の中の π^e が $\mu - n$ になるのは F 関数が $\dot{\pi}^e = 0$ を満足しているためである.
2) これを図示すると第２図の $\dot{\pi}^e = \mu - n$ のケースと全く同じになる.
3) 不等号は，$\underline{k} < k^{**}$（仮定５），及び $l_1 f' + l_2 f'' > 0$ より明らか.

なる k^* が存在する．また，$(\tilde{k} \leqq)\ \underline{k} < k$ においては，

$$J'(k) = sf'(k) - n - (1-s)n\tilde{m}'(k) < 0$$

であるので，[1] 均衡の一意性が証明される．

ii）安定性

(27)式を考慮すると，動学方程式は次の3本である．

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1-s)(\mu - \pi^e)m$$

$$\dot{m} = [\mu - n - \varphi(k,\ m,\ \pi^e)]m$$

$$\dot{\pi}^e = \lambda(\mu - n - \pi^e),\quad \lambda > 0$$

上式を均衡点 $(k^*,\ m^*,\ \pi^{e*})$ の近傍で線型化すると，

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{m} \\ \dot{\pi}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf' - n & -(1-s)n & (1-s)m \\ -m\varphi_1 & -m\varphi_2 & -m\varphi_3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ m - m^* \\ \pi^e - \pi^{e*} \end{pmatrix}$$

となる．上式の係数行列を Δ とすると，

$$Det.\ \Delta = m\lambda[(sf' - n)\varphi_2 + (1-s)n\varphi_1] < 0$$

$$trace\ \Delta = sf' - n - m\varphi_2 - \lambda < 0$$

$$\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = -(sf' - n)(m\varphi_2 + \lambda) + m[\lambda\varphi_2 - (1-s)n\varphi_1] > 0$$

$$trace\ \Delta \times [\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}] - Det.\ \Delta = (sf' - n - m\varphi_2)[(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}) + \lambda^2] < 0$$

となり，一意の均衡解の存在が保証されるなら，体系は安定的となる．[2][3]

1） $\tilde{k} < k$ においては $sf'(k) - n < 0$ である．

2） 仮定5により，$sf'(k^*) - n < 0$ となる．

3） λ の大きさが安定性と無関係なのは次のように考えられよう．つまり，(43)式において $\lambda = 0$ とすると $\pi^e = \bar{\pi}^e = const.$，また $\lambda = \infty$ とすると $\pi^e = \mu - n$ となり，双方とも静学期待の形になるためと考えられる．

(5) 外挿的期待

外挿的期待は

$$\pi^e = \pi + \eta \dot{\pi}, \quad \eta > 0 \tag{48}$$

と定式化される.[1] よって，動学方程式は(4)(8)(48)式の３本となる.

i）存在と一意性

仮定１～５の下で，適応期待の場合と全く同様に均衡の存在と一意性が証明される.

ii）安定性

(7)式を π^e について解くと

$$\pi^e = h(k, \ m, \ \pi) \tag{49}$$

$$h_1 = \frac{\partial \pi^e}{\partial k} = \frac{\alpha\ (l_1 f' + l_2 f'')}{1 - \alpha\ l_2} > 0$$

$$h_2 = \frac{\partial \pi^e}{\partial m} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha\ l_2} < 0$$

$$h_3 = \frac{\partial \pi^e}{\partial \pi} = \frac{1}{1 - \alpha\ l_2} > 0$$

となり，動学方程式は,

$$\dot{k} = sf(k) - nk - (1-s)\left[\mu - h(k, \ m, \ \pi)\right] m$$

$$\dot{m} = (\mu - n - \pi) m$$

$$\dot{\pi} = \frac{1}{\eta}\left[h(k, \ m, \ \pi) - \pi\right], \quad \eta > 0$$

の３本になる．上式を均衡点（k^*，m^*，π^*）の近傍で線型化すると

---

1) 定差形で書けば

$$\pi_t^e = \pi_{t-1} + \eta\ (\pi_{t-1} - \pi_{t-2})$$

となる．つまり，予想インフレ率は前期のインフレ率，及び前々期から前期にかけてのインフレ率の変化に依存するのである.

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{m} \\ \dot{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf' - n + (1-s)mh_1 & (1-s)(mh_2 - n) & (1-s)mh_3 \\ 0 & 0 & -m \\ \frac{1}{\eta} h_1 & \frac{1}{\eta} h_2 & \frac{1}{\eta}(h_3 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ m - m^* \\ \pi - \pi^* \end{pmatrix}$$

となり，これより，

$$Det.\ \Delta = \frac{m}{\eta}[(sf' - n)h_2 + (1-s)nh_1] > 0$$

$$trace\ \Delta = sf' - n + (1-s)mh_1 + \frac{1}{\eta}(h_3 - 1) \gtreqless 0$$

$$\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = \frac{1}{\eta}[(sf' - n)(h_3 - 1) + mh_2 - m(1-s)h_1] \gtreqless 0$$

$$\begin{aligned} &trace\ \Delta \times [\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}] - Det.\ \Delta \\ &\quad = [(1-s)mh_1 + \frac{1}{\eta}(h_3 - 1)][\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}] \\ &\quad + \frac{1}{\eta}(sf' - n)^2(h_3 - 1) - \frac{m}{\eta}(1-s)sf'h_1 \gtreqless 0 \end{aligned}$$

となる．よって，均衡点は鞍点か不安定になる．[1)]

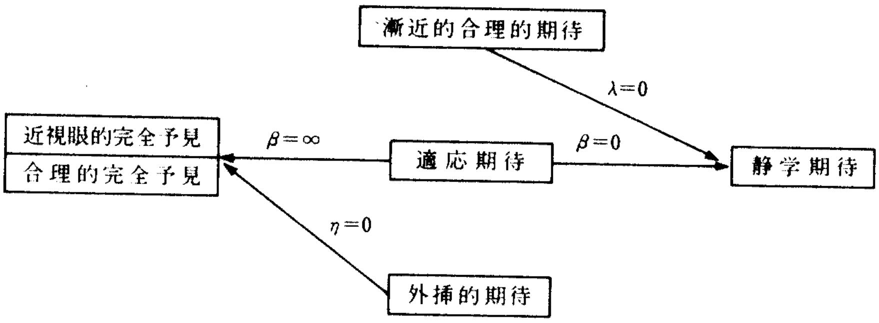
結　語

以上，6つの期待形成の方式を同一の貨幣的成長モデルの枠組で分析してき

期待形成	存在と一意性	安定条件
適応期待	○	$\beta < \frac{\alpha m}{1 - \alpha l_2}$
静学期待	?	?
近視眼的完全予見	○	鞍点
合理的完全予見	○	鞍点
漸近的合理的期待	○	安定
外挿的期待	○	鞍点 不安定

第1表

1)　特に，$\eta < \frac{-l_2}{(1-s)m(l_1 f' + l_2 f'')}$ の場合，$trace\ \Delta < 0$ となり必ず鞍点となる．



第6図

たわけであるが，期待形成の方式により，均衡の存在，一意性，安定条件が異ってくることが分かる．上の分析の結果を表にしたのが第1表である．また，個々の期待形成の定式化の形式的な関係を図式化すると第6図のようになる．

本稿では期待形成の方式そのものを吟味することはしなかった．それは，期待形成の方式と経済モデルの定性的性質との関係を考察することが本稿の目的であったためである．

参考文献

〔1〕 Benhabib, J., and Miyao, T., "Some New Results on the Dynamics of the Generalized Tobin Model," *International Economic Review*, vol. 22, no. 3, 1981, pp. 589〜96.

〔2〕 Burmeister, E., and Dobell, A. R., *Mathematical Theories of Economic Growth*, New York : Macmillan 1970.

〔3〕 Burmeister, E., and Phelps, E. S., "Money, Public Debt, Inflation and Real Interest," *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 3, 1971, pp. 153〜82.

〔4〕 Burmeister, E., and Turnovsky, S. J., "Price Expectations, Disequilibrium Adjustments and Macroeconomic Price Stability," *Journal of Economic Theory*, vol. 17, 1978, pp. 287〜311.

〔5〕 Cagan, P., "The Monetary Dynamics of Hyperinflation," *Studies in the Quantity Theory of Money*, ed. by M. Friedman, Chicago : University of Chicago Press, 1956, pp. 25〜117.

〔6〕 Fischer, S., "Keynes-Wicksell and Neoclassical Models of Money and Growth," *American Economic Review*, vol. 62, 1972, pp. 880〜90.

〔7〕 Frenkel, J. A., "Inflation and the Formation of Expectations," *Journal of Monetary Economics*, vol. 1, 1975, pp. 403〜21.

〔8〕 Hadjimichalakis, M., "Money, Expectations and Dynamics —— an Alternative

View," *Internationl Economic Review*, vol. 12, no. 3, 1971, pp. 381～402.
〔9〕 ――――, "Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money――the Tobin Models," *Review of Economic Studies*, vol. 38, no. 116, 1971, pp. 457～79.
〔10〕 Hayakawa, H., "A Dynamic Generalization of the Tobin Model," *Journal of Economic Dynamics and Control* vol. 7, 1984, pp. 209～31.
〔11〕 Levhari, D., and Patinkin, D., "The Role of Money in a Simple Growth Model," *American Economic Review*, vol. 58, no. 4, 1968, pp. 713～53.
〔12〕 森本好則,「適応期待と不均衡調整」,『経済学論究』, 第38巻, 第３号, 昭和59年, pp. 85～111.
〔13〕 Nagatani, K., "A Monetary Growth Model with Variable Employment," *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 1, no. 2, 1969, pp. 188～206.
〔14〕 Sidrauski, M., "Inflation and Economic Growth," *Journal of Political Economy*, vol. 75, no. 6, 1967, pp. 769～810.
〔15〕 Stein, J. L., "Money and Capacity Growth," *Journal of Political Economy*, vol. 84, no. 5, 1966, pp. 451～65.
〔16〕 ――――, "Neoclassical and Keynes-Wicksell Monetary Growth Models," *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 1, no. 2, 1969, pp. 153～71.
〔17〕 ――――, "Monetary Growth Theory in Perspective," *American Economic Review*, vol. 60, 1970, pp. 85～106.
〔18〕 ――――, *Monetaris, Keynesian & New Classical Economics*, Oxford : Basil Blackwell, 1982.
〔19〕 Tobin, J., "Money and Economic Growth," *Econometrica*, vol. 33, no. 4, 1965, pp. 671～84.
〔20〕 ――――, "The Neutrality of Money in Growth Models : a Comment," *Economica*, vol. 34, no. 133, 1967, pp. 69～72.