凸拡張関数とその特性錐関数

福　尾　洋　一

§0　序

前稿〔6〕では，凸拡張関数の位相的性質のうち，閉凸拡張関数すなわち下方半連続凸拡張関数について検討した．本稿は，前稿の延長線上の議論である．最初に凸拡張関数の特性錐関数を定義し，それとの関連において，凸拡張関数の位相的性質を整理してみたい．稿末の文献を参考にした．

なお，本稿で使用される記号のうち説明のないものは，文献〔1〕—〔6〕で説明されたものである．

§1　凸拡張関数の特性錐関数

文献〔3〕の議論により，次の定理が得られる．

定理1　凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$，$\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ と任意所与の $(\boldsymbol{z}, \sigma) \in \boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ に対して，次の(i)—(v)は同値である．

(i)　$(\boldsymbol{z}, \sigma) \in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$.

(ii)　${}^{\forall}(\boldsymbol{x}, \mu) \in \mathrm{epi}\, f\ {}^{\forall}\theta \in \boldsymbol{R}_{\oplus}: f(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z}) \leqq \mu + \theta\sigma$.

(iii)　${}^{\forall}(\boldsymbol{x}, \mu) \in \mathrm{epi}\, f: f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \leqq \mu + \sigma$.

(iv)　${}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\ {}^{\forall}\theta \in \boldsymbol{R}_{\oplus}: f(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z}) \leqq f(\boldsymbol{x}) + \theta\sigma$.

(v)　${}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n: f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \leqq f(\boldsymbol{x}) + \sigma$.

証明　<u>(i)(ii)(iii)の同値関係の証明</u>．文献〔3〕の定義3と定理1により，

$$(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}} := \{(\boldsymbol{z}, \sigma) \mid \mathrm{epi}\, f + \boldsymbol{R}_{\oplus}(\boldsymbol{z}, \sigma) \subset \mathrm{epi}\, f\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$$
$$= \{(\boldsymbol{z}, \sigma) \mid \mathrm{epi}\, f + (\boldsymbol{z}, \sigma) \subset \mathrm{epi}\, f\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1},$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{z},\sigma)\in(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}\\
&\Longleftrightarrow {}^{\forall}(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\, f\ {}^{\forall}\theta\in \boldsymbol{R}_{\oplus}:(\boldsymbol{x},\mu)+\theta(\boldsymbol{z},\sigma)\in\mathrm{epi}\, f\\
&\Longleftrightarrow {}^{\forall}(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\, f:(\boldsymbol{x},\mu)+(\boldsymbol{z},\sigma)\in\mathrm{epi}\, f.
\end{aligned}
$$

よって，結論を得る．

(ii) ⇒ (iv) の証明．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$, $\theta\in\boldsymbol{R}_{\oplus}$ は任意所与とする．$f(\boldsymbol{x})=\infty$ ならば，自明であり，$f(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}$ ならば，$(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))\in\mathrm{epi}\, f$ であることから，やはり自明である．$f(\boldsymbol{x})=-\infty$ ならば，任意の $\mu\in\boldsymbol{R}$ に対して，$(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\, f$ であるから，(ii) において，$\mu\to-\infty$ とすると，$f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})=-\infty$．よって，結論を得る．

(iv) ⇒ (ii) の証明．$(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\, f$, $\theta\in\boldsymbol{R}_{\oplus}$ は任意所与とする．$f(\boldsymbol{x})\leqq\mu$ であることと (iv) により，直ちに，

$$
f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})\leqq f(\boldsymbol{x})+\theta\sigma\leqq\mu+\theta\sigma,
$$

となって，結論を得る．

(iii)⟺(v) の証明．(ii)⟺(iv) の証明法と全く同様にすればよい．　‖

系　凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ と $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，集合 $\Sigma_{\boldsymbol{z}}:=\{\sigma\mid(\boldsymbol{z},\sigma)\in(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}\}$ は，非空ならば，上に非有界な閉集合である．

証明　$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ は任意所与とする．定理1 (i)(v) により，

$$
\alpha\in\{\alpha\mid {}^{\exists}\sigma\in\Sigma_{\boldsymbol{z}}:\alpha>\sigma\}\Rightarrow f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})\leqq f(\boldsymbol{x})+\alpha\Rightarrow\alpha\in\Sigma_{\boldsymbol{z}},
$$

であるから，$\Sigma_{\boldsymbol{z}}$ は非有界である．次に，$\Sigma_{\boldsymbol{z}}$ の任意の収束点列 $\langle\sigma_\nu\rangle$, $\sigma_\nu\in\Sigma_{\boldsymbol{z}}$, $\sigma_\nu\to\sigma(\nu\to\infty)$，を考えると，定理1 (v) により，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})\leqq f(\boldsymbol{x})+\sigma_\nu$，であるから，$\sigma\in\Sigma_{\boldsymbol{z}}$．よって，$\Sigma_{\boldsymbol{z}}$ は閉である．　‖

注意1　定理1系は，$(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$ がある関数のエピグラフであることを示唆している．

定義1　凸拡張関数の特性錐関数

凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ に対して，

$$(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}} = \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}},$$

となる拡張関数 $f^{\mathrm{R}}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を f の特性錐関数という.

注意 2 凸拡張関数の特性錐関数は凸拡張関数である.

証明 文献〔3〕の定理1により, 明らかである. ‖

定理 2 真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と f の特性錐関数 $f^{\mathrm{R}}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して, 次の(1)－(4)が成立する.

(1) f^{R} は正の1次同次真凸拡張関数である.

(2) $^\forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n : f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) = \sup\{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}\, f\}$.

(3) f が閉ならば,

$$^\forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n\, ^\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}\, f : f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) = \sup\left\{\frac{f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x})}{\theta} \,\middle|\, \theta \in \boldsymbol{R}_+\right\}$$

$$= \lim_{\theta \uparrow \infty} \frac{f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x})}{\theta}.$$

(4) f が閉ならば, f^{R} も閉である.

証明 最初に,

$$\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}} := \{(\boldsymbol{z}, \sigma) \mid f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) \leqq \sigma\}$$

$$\equiv (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}} := \{(\boldsymbol{z}, \sigma) \mid \mathrm{epi}\, f + \boldsymbol{R}_{\oplus}(\boldsymbol{z}, \sigma) \subset \mathrm{epi}\, f\},$$

であることに注目しておく.

<u>(1)(2)の証明</u>. 定理1により,

$$(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}} = \{(\boldsymbol{z}, \sigma) \mid {}^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x}) \leqq \sigma\},$$

であることに注目して, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ は任意所与として,

$$\alpha(\boldsymbol{z}) := \sup\{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\}$$

$$= \sup\{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}\, f\},$$

とおく. $f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) > \alpha(\boldsymbol{z})$ ならば,

$$(\boldsymbol{z}, \alpha(\boldsymbol{z})) \notin \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}, \quad (\boldsymbol{z}, \alpha(\boldsymbol{z})) \in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}},$$

$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) < \alpha(\boldsymbol{z})$ ならば,

$$(\boldsymbol{z}, f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})) \in \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}, \quad (\boldsymbol{z}, f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})) \notin (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}},$$

となって, $\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}} = (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$ に矛盾する. よって, $f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{z})$ となり, (2)

を得る．次に，（2），f の真凸性及び文献〔3〕の定理1により，

$$\begin{cases} \mathbf{0}\in \mathrm{dom}\, f, \quad (\mathbf{0}, f^{\mathrm{R}}(\mathbf{0}))\in \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}, \\ {}^{\forall}\boldsymbol{z}\in \boldsymbol{R}^n : f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) > -\infty, \end{cases}$$

かつ，$\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}=(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$ は凸錐であるから，f^{R} は真凸である．更に，文献〔4〕の定理7により，f^{R} は正の1次同次である．よって，（1）を得る．

<u>（3）の証明</u>．$\boldsymbol{x}\in \mathrm{dom}\, f$ は任意所与とする．<u>前半の等号の証明</u>．f が閉，すなわち，$\mathrm{epi}\, f=\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{a}}=(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}$ であるから，文献〔3〕の定理4により，

$$\begin{aligned}(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}} &= \{(\boldsymbol{z}, \sigma) \mid (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{R}_{\oplus}(\boldsymbol{z}, \sigma)\subset \mathrm{epi}\, f\} \\ &= \{(\boldsymbol{z}, \sigma) \mid {}^{\forall}\theta\in \boldsymbol{R}_{\oplus} : f(\boldsymbol{x}+\theta \boldsymbol{z})\leqq f(\boldsymbol{x})+\theta\sigma\} \\ &= \{(\boldsymbol{z}, \sigma) \mid {}^{\forall}\theta\in \boldsymbol{R}_{+} : \frac{f(\boldsymbol{x}+\theta \boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x})}{\theta}\leqq \sigma\}^{1)},\end{aligned}$$

であることに注目して，$\boldsymbol{z}\in \boldsymbol{R}^n$ は任意所与として，

$$\beta(\boldsymbol{z}) := \sup\left\{\frac{f(\boldsymbol{x}+\theta \boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x})}{\theta}\;\middle|\; \theta\in \boldsymbol{R}_{+}\right\},$$

とおく．$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})>\beta(\boldsymbol{z})$ ならば，

$$(\boldsymbol{z}, \beta(\boldsymbol{z}))\notin \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}, \quad (\boldsymbol{z}, \beta(\boldsymbol{z}))\in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}},$$

$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})<\beta(\boldsymbol{z})$ ならば，

$$(\boldsymbol{z}, f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}))\in \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}, \quad (\boldsymbol{z}, f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}))\notin (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}},$$

となって，$\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}=(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$ に矛盾する．よって，$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})=\beta(\boldsymbol{z})$ となって，結論を得る．<u>後半の等号の証明</u>．$\boldsymbol{z}\in \boldsymbol{R}^n$ は任意所与とする．

① $\quad {}^{\exists}\theta_0\in \boldsymbol{R}_{+} : f(\boldsymbol{x}+\theta_0 \boldsymbol{z})=\infty,$

ならば，

$${}^{\forall}\theta\in\{\theta \mid \theta>\theta_0\} : f(\boldsymbol{x}+\theta_0 \boldsymbol{z})=\infty,$$

である．なぜなら，①のとき，

$${}^{\exists}\bar{\theta}\in\{\theta \mid \theta>\theta_0\} : f(\boldsymbol{x}+\bar{\theta} \boldsymbol{z})<\infty,$$

とすると，$(\boldsymbol{x}+\bar{\theta}\boldsymbol{z}, f(\boldsymbol{x}+\bar{\theta}\boldsymbol{z}))\in \mathrm{epi}\, f$（凸集合）であるが，$(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))\in \mathrm{epi}\, f$

1）$\boldsymbol{x}\in \mathrm{dom}\, f$ は任意所与であったから，$(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$ は $\boldsymbol{x}\in \mathrm{dom}\, f$ と無関係である．

であることを考えると，

$$\frac{\theta_0}{\bar{\theta}}(\boldsymbol{x}+\bar{\theta}\boldsymbol{z},\ f(\boldsymbol{x}+\bar{\theta}\boldsymbol{z}))+\left(1-\frac{\theta_0}{\bar{\theta}}\right)(\boldsymbol{x},\ f(\boldsymbol{x}))$$
$$=\left(\boldsymbol{x}+\theta_0\boldsymbol{z},\ \frac{\theta_0}{\bar{\theta}}f(\boldsymbol{x}+\bar{\theta}\boldsymbol{z})+\left(1-\frac{\theta_0}{\bar{\theta}}\right)f(\boldsymbol{x})\right)\in \mathrm{epi}\ f,$$

すなわち，$f(\boldsymbol{x}+\theta_0\boldsymbol{z})<\infty$ となって，矛盾するからである．よって，①の場合には，結論が得られるので，以下では，

② $\quad {}^{\forall}\theta\in \boldsymbol{R}_+ : f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})<\infty,$

とする．この場合，f は θ に関して実関数であるから，文献〔4〕の定理2により，θ の実関数 $[f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x})]/\theta$ は $\boldsymbol{R}_+$ で単調増加関数となる．なぜなら，任意所与の $\theta_1,\ \theta_2\in\boldsymbol{R}_+,\ \theta_1>\theta_2$，に対して，

$$\frac{f(\boldsymbol{x}+\theta_1\boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x})}{\theta_1}-\frac{f(\boldsymbol{x}+\theta_2\boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x})}{\theta_2}$$
$$=\frac{1}{\theta_2}\left[\frac{\theta_2}{\theta_1}f(\boldsymbol{x}+\theta_1\boldsymbol{z})+\left(1-\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}+\theta_2\boldsymbol{z})\right]$$
$$\geqq\frac{1}{\theta_2}\left[f\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\boldsymbol{x}+\theta_2\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}-\frac{\theta_2}{\theta_1}\boldsymbol{x}\right)-f(\boldsymbol{x}+\theta_2\boldsymbol{z})\right]$$
$$=0.$$

よって，結論を得る．

(4)の証明．epi $f\neq\emptyset$ が閉であるから，文献〔3〕の定理3により，$(\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{R}}$ は閉集合である．よって，

$$(\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{R}}=\mathrm{epi}\ f^{\mathrm{R}}=(\mathrm{epi}\ f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}}=\mathrm{epi}\,(f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}},$$
$$\mathrm{dom}\ f^{\mathrm{R}}=\mathrm{dom}\,(f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}},$$

であるから，任意所与の $\boldsymbol{x}\in\mathrm{dom}\ f^{\mathrm{R}}=\mathrm{dom}\,(f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}}$ に対して，

$$(\boldsymbol{x},\ f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})),\ (\boldsymbol{x},\ (f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}))\in\mathrm{epi}\ f^{\mathrm{R}}=\mathrm{epi}\,(f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}},$$

すなわち，

$$(f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})\leqq f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})\leqq(f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}).$$

よって，

$${}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n : f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})=(f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}),$$

となって，結論を得る．　‖

系 1　真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ に対して，f の特性錐関数 $f^{\mathrm{R}}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ は,

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n : g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \geqq f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}),$$

となる関数 $g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ のうち，最小の関数である．

証明　$g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ は仮定を満たす任意所与の関数とする．定理2 (ii) により,

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n : g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}) \\ &\geqq \sup\{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^n\} \\ &= \sup\{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{w} \in \mathrm{dom}\, f\} \\ &= f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &\geqq f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$
‖

系 2　閉真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ に対して，次の関係 (1) (2) が成立する．

(1)　$\forall \boldsymbol{z} \in \mathrm{dom}\, f : f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) = \lim_{\alpha \downarrow 0} (f\alpha)(\boldsymbol{z}).$

(2)　$\boldsymbol{0} \in \mathrm{dom}\, f$ ならば,

$$\forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n : f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) = \lim_{\alpha \downarrow 0} (f\alpha)(\boldsymbol{z}).$$

証明　(2) の証明．$\boldsymbol{0} \in \mathrm{dom}\, f$ ならば，定理2 (3) と文献〔5〕の定理4 (2) により,

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n : f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) &= \lim_{\theta \uparrow \infty} \frac{f(\theta \boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{0})}{\theta} \\ &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha f(\alpha^{-1}\boldsymbol{z}) = \lim_{\alpha \downarrow 0} (f\alpha)(\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

(1) の証明．$\boldsymbol{z} \in \mathrm{dom}\, f$ は任意所与とする．いま，文献〔5〕の定理4 (2) に注目して，関数 $g: \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を

① $\quad g(\alpha, \boldsymbol{z}) := (f\alpha)(\boldsymbol{z}) = \alpha f(\alpha^{-1}\boldsymbol{z}),$

によって定義すると，g は,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{epi}\, g &= \{(\alpha, \boldsymbol{z}, \sigma) \mid g(\alpha, \boldsymbol{z}) \leqq \sigma\} \\
&= \{(\alpha, \boldsymbol{z}, \sigma) \mid f(\alpha^{-1}\boldsymbol{z}) \leqq \alpha^{-1}\sigma\} \\
&= \{\alpha(1, \boldsymbol{x}, \mu) \mid f(\boldsymbol{x}) \leqq \mu\} \\
&= \boldsymbol{R}_{+}(1, \mathrm{epi}\, f),
\end{aligned}
$$

を満たす正の1次同次真凸拡張関数である．かくして，文献〔3〕の定理3により，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{epi}\, g^{\mathrm{a}} &= (\mathrm{epi}\, g)^{\mathrm{a}} = [\boldsymbol{R}_{+}(1, \mathrm{epi}\, f)]^{\mathrm{a}} \\
&= \boldsymbol{R}_{+}(1, \mathrm{epi}\, f) \cup (\boldsymbol{0}, (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}) = \boldsymbol{R}_{+}(1, \mathrm{epi}\, f) \cup (\boldsymbol{0}, \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}).
\end{aligned}
$$

よって，

$$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}, \sigma) \in \mathrm{epi}\, g^{\mathrm{a}} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}, \sigma) \in (\boldsymbol{0}, \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}),$$

であるが，このとき，

$$
\begin{aligned}
& g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}) < f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) \Rightarrow \\
& \quad (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}, g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z})) \in \mathrm{epi}\, g^{\mathrm{a}}, \ (\boldsymbol{z}, g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z})) \notin \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}, \\
& g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}) > f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) \Rightarrow \\
& \quad (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}, f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})) \notin \mathrm{epi}\, g^{\mathrm{a}}, \ (\boldsymbol{z}, f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})) \in \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}},
\end{aligned}
$$

となるから，結局，

② $$g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}) = f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}).$$

一方，$(1, \boldsymbol{z}) \in \mathrm{dom}\, g^{\mathrm{a}}$ であるから，文献〔6〕の定理10系により，

③ $$
\begin{aligned}
g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} g^{\mathrm{a}}[(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}) + \alpha((1, \boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}))] \\
&= \lim_{\alpha \downarrow 0} g^{\mathrm{a}}(\alpha, \boldsymbol{z}).
\end{aligned}
$$

よって，①②③により，

$$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}) = \lim_{\alpha \downarrow 0} g^{\mathrm{a}}(\alpha, \boldsymbol{z}) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha f(\alpha^{-1}\boldsymbol{z}) = \lim_{\alpha \downarrow 0} (f\alpha)(\boldsymbol{z}),$$

となって，結論を得る． ‖

定理3　真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と $\boldsymbol{z}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係(1)(2)(3)が成立する．

(1)　次の(i)(ii)は同値である．

(i)　$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}_0) \leqq 0.$

（ii） 任意所与の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z}_0)$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上の非増加関数である．

（2） f が閉ならば，上記（i）（ii）と次の（iii）とは同値である．

（iii） ある $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，$f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0)$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上の非増加関数である．

（3） $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$\liminf_{\theta\uparrow\infty} f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0)<\infty,$$

ならば，$f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0)$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上の非増加関数である．

証明 （1）の証明．次の①②③式の同値関係を示せば十分である．

① $f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}_0)\leqq 0$，すなわち，$(\boldsymbol{z}_0, 0)\in\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}=(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$.

② $^\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\ {}^\forall\theta\in\boldsymbol{R}_\oplus : f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z}_0)\leqq f(\boldsymbol{x})$.

③ $^\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\ {}^\forall(\theta_1, \theta_2)\in\{(\theta_1, \theta_2)\mid\theta_1>\theta_2\}\subset\boldsymbol{R}^2$:

$$f(\boldsymbol{x}+\theta_1\boldsymbol{z}_0)\leqq f(\boldsymbol{x}+\theta_2\boldsymbol{z}_0).$$

①⇒②の証明．定理1により直ちに得られる．②⇒③の証明．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$(\theta_1, \theta_2)\in\{(\theta_1, \theta_2)\mid\theta_1>\theta_2\}$ は任意所与とすると，②により，

$$f(\boldsymbol{x}+\theta_1\boldsymbol{z}_0)=f[(\boldsymbol{x}+\theta_2\boldsymbol{z}_0)+(\theta_1-\theta_2)\boldsymbol{z}_0]\leqq f(\boldsymbol{x}+\theta_2\boldsymbol{z}_0),$$

となって，③を得る．③⇒②の証明．③において，特に，$\theta_2=0$ とおくと，直ちに②を得る．

（2）の証明．（1）の結果を考えれば，（iii）⇒（i）を示せば十分である．（iii）により，（1）の証明のときと同様に考えると，

$$^\forall\theta\in\boldsymbol{R}_\oplus : f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0)\leqq f(\boldsymbol{x}_0),\ \text{すなわち，}(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0, f(\boldsymbol{x}_0))\in\mathrm{epi}\, f,$$

であるから，$(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))+\boldsymbol{R}_\oplus(\boldsymbol{z}, 0)\subset\mathrm{epi}\, f$ であるが，f が閉であることから，文献〔3〕の定理4により，

$$(\boldsymbol{z}_0, 0)\in\{(\boldsymbol{z}, \sigma)\mid(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))+\boldsymbol{R}_\oplus(\boldsymbol{z}, \sigma)\subset\mathrm{epi}\, f\}$$
$$=(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}=\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}},$$

となって，結論を得る．

（3）の証明．拡張関数 $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ を $h(\theta):=f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0)$ とおく．

h は真凸である．仮定により，

$$\exists\alpha_0\in\boldsymbol{R}: \liminf_{\theta\uparrow\infty} h(\theta) := \lim_{\theta\to\infty} \inf\{h(\eta)\mid \eta\in(\theta,\infty)\subset\boldsymbol{R}\}<\alpha_0,$$

であるが，

$$\forall\nu\in\boldsymbol{N}: \inf\{h(\eta)\mid \eta\in(\nu,\infty)\subset\boldsymbol{R}\}<\alpha_0,$$

であるから，

$$\forall\nu\in\boldsymbol{N}\ \exists\eta_\nu\in(\nu,\infty)\subset\boldsymbol{R}: h(\eta_\nu)<\alpha_0.$$

よって，epi h の点列 $\langle(\eta_\nu, \alpha_0)\rangle, \eta_\nu\in\boldsymbol{R}_+, \eta_\nu\to\infty\,(\nu\to\infty)$ が存在する．そして，この点列の凸包 $C\langle(\eta_\nu, \alpha_0)\rangle$[1] については，明らかに，

$$C\langle(\eta_\nu, \alpha_0)\rangle=(\eta_1, \alpha_0)+\boldsymbol{R}_\oplus(1,0)\subset(\mathrm{epi}\ h)^{\mathrm{a}}=\mathrm{epi}\ h^{\mathrm{a}},$$

が成立する．よって，文献〔3〕の定理4 により，$(1,0)\in(\mathrm{epi}\ h^{\mathrm{a}})^{\mathrm{R}}=\mathrm{epi}\,(h^{\mathrm{a}})^{\mathrm{R}}$, すなわち，$(h^{\mathrm{a}})^{\mathrm{R}}(1)=(h^{\mathrm{a}})^{\mathrm{R}}(0+1\cdot1)\leqq0$ となり，先に得た結果(2)(ii)を h^{a} に適用すると，h^{a} は $\theta\in\boldsymbol{R}$ に関して非増加関数である．ところで，h についての仮定によって，dom $h\neq\emptyset$ は上に非有界であるから，$\theta_0:=\inf\mathrm{dom}\ h$ とおくと，単調増加数列 $\langle\theta_\nu\rangle, \theta_\nu\in(\theta_0,\infty)\cap\mathrm{dom}\ h\subset\boldsymbol{R}, \theta_\nu\to\infty\,(\nu\to\infty)$, が存在する．dom h は凸であるから，この数列については，任意の $\nu\in\boldsymbol{N}$ に対して，$(\theta_0, \theta_\nu]\subset\mathrm{dom}\ h\subset\boldsymbol{R}$ が成立し，結局，$(\theta_0,\infty)=(\mathrm{dom}\ h)^{\mathrm{I}}$. よって，文献〔2〕の定理19と文献〔6〕の定理10により，

$$\begin{cases}\forall\theta\in(-\infty,\theta_0)=[(\mathrm{dom}\ h)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{C}}: h(\theta)=h^{\mathrm{a}}(\theta)=\infty,\\ \forall\theta\in(\theta_0,\infty)=(\mathrm{dom}\ h)^{\mathrm{I}}: h(\theta)=h^{\mathrm{a}}(\theta),\end{cases}$$

となり，結論を得る． ‖

系1　真凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ と $z_0\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係(1)(2)が成立する．

(i)　次の(i)(ii)は同値である．

(i)　$f^{\mathrm{R}}(z_0)\leqq0$ かつ $f^{\mathrm{R}}(-z_0)\leqq0$.

(ii)　任意所与の $x\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，$f(x+\theta z_0)$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上で定数値関数である．

1）(η_1, α_0) を端点とする $(1,0)$ 方向への射線.

（2）　f が閉ならば，上記（i）（ii）と次の（iii）は同値である．

（iii）　ある $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，$f(\boldsymbol{x}_0+\theta \boldsymbol{z}_0)$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上の上に有界な関数である．

証明　(1)の証明．(i)⇒(ii)の証明．定理3により，

$$^{\forall}\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n\ {}^{\forall}(\theta_1, \theta_2)\in\{(\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1>\theta_2\}\subset \boldsymbol{R}^2:$$

$$f(\boldsymbol{x}+\theta_1\boldsymbol{z}_0)\leqq f(\boldsymbol{x}+\theta_2\boldsymbol{z}_0),\ f[\boldsymbol{x}-\theta_1\cdot(-\boldsymbol{z}_0)]\geqq f[\boldsymbol{x}-\theta_2\cdot(-\boldsymbol{z})],$$

となって，結論を得る．(ii)⇒(i)の証明．

$$^{\forall}\theta\in \boldsymbol{R}^n: f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z}_0)=f[\boldsymbol{x}+\theta\cdot(-\boldsymbol{z}_0)]=\text{const.},$$

であるから，定理3により，直ちに結論を得る．

(2)の証明．仮定により，

$$^{\exists}\alpha_0\in \boldsymbol{R}\ {}^{\forall}\theta\in \boldsymbol{R}: f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0)\leqq\alpha_0,$$

であるから，この α_0 に対して，

$$\lim_{\theta\uparrow\infty}\inf f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0)\leqq\alpha_0,$$

$$\lim_{\theta\downarrow-\infty}\inf f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{z}_0)=\lim_{\theta\uparrow\infty}\inf f[\boldsymbol{x}_0+\theta\cdot(-\boldsymbol{z}_0)]\leqq\alpha_0.$$

よって，定理3(2)により，直ちに結論を得る．　‖

系2　$f: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ は真凸拡張関数，$\boldsymbol{A}$ はアフィン集合とする．f は，$\boldsymbol{A}$ 上で上に有界ならば，$\boldsymbol{A}$ 上で定数値関数である．

証明　必要ならば，$f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{C}})=\{\infty\}$ と見なすことにより，一般性を失うことなく，$\boldsymbol{A}=\mathrm{dom}\, f$ と考えることができる．そうすると，文献〔6〕の定理8系により，f は閉であり，また，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\in \boldsymbol{A}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上で上に有界である．よって，定理3系1により，$f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上の定数値関数である．ところで，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\in \boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}\subset \boldsymbol{A}$ であるから，結局，f は $\boldsymbol{A}$ 上で定数値関数である．　‖

§2　凸拡張関数の特性錐・直系空間

定義2　凸拡張関数の特性錐

凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ の特性錐関数 $f^{\mathrm{R}}: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$

に対して，f^{R} の 0-準位集合

$$S(f^{R},0):=\{z \mid f^{R}(z)\leqq 0\}=\{z \mid (z,0)\in(\mathrm{epi}\,f)^{R}\},$$

を，特に，f の特性錐という．また，任意所与の $z\in S(f^{R},0)$ を f の無限の方向という[1)]．

注意 3　凸拡張関数 $f: R^{n}\to R\cup\{-\infty,\infty\}$, $\mathrm{dom}\,f\neq\emptyset$, の特性錐 $S(f^{R},0)$ に対して，次の関係が成立する．

（1）　$S(f^{R},0)$ は凸錐である．

（2）　f が閉ならば，$S(f^{R},0)$ は閉である．

証明　文献〔3〕の定理1により，$(\mathrm{epi}\,f)^{R}$ は凸錐であるから，（1）は自明である．また，f が閉ならば，$\mathrm{epi}\,f=\mathrm{epi}\,f^{a}=(\mathrm{epi}\,f)^{a}$ であるから，文献〔3〕の定理3により，（2）を得る．　‖

定義 3　凸拡張関数の定数空間

凸拡張関数 $f: R^{n}\to R\cup\{-\infty,\infty\}$ に対して，集合

$$\begin{aligned}&[-S(f^{R},0)]\cap S(f^{R},0)\\&=\{-z \mid f^{R}(z)\leqq 0\}\cap\{z \mid f^{R}(z)\leqq 0\}\\&=\{-z \mid (z,0)\in(\mathrm{epi}\,f)^{R}\}\cap\{z \mid (z,0)\in(\mathrm{epi}\,f)^{R}\}\\&=\{z \mid (z,0)\in[-(\mathrm{epi}\,f)^{R}]\cap(\mathrm{epi}\,f)^{R}\},\end{aligned}$$

を f の定数空間という．また，任意所与の $z\in[-S(f^{R},0)]\cap S(f^{R},0)$ を f が定数である方向という．

注意 4　f の定数空間の由来は，定理3系1による．文献〔2〕の定理10により，f の定数空間は $S(f^{R},0)$ に含まれる最大の線形部分空間である．

定理 4　閉真凸拡張関数 $f: R^{n}\to R\cup\{\infty\}$ と集合

$$S(f,\mu):=\{x \mid f(x)\leqq\mu\}\text{——}f\text{ の }\mu\text{-準位集合——},$$

$$S(f^{R},0):=\{z \mid f^{R}(z)\leqq 0\}\text{——}f\text{ の特性錐——},$$

$$[S(f,\mu)]^{R}:=\{z \mid R_{\oplus}z+S(f,\mu)\subset S(f,\mu)\}$$

$$\text{——}S(f,\mu)\text{ の特性錐——},$$

1）任意の $z\in S(f^{R},0)$ に対して，$(z,0)$ を $\mathrm{epi}\,f$ の無限の方向と呼ぶのに対応している．

$$[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{L}} := \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{R}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{S}(f, \mu) \subset \boldsymbol{S}(f, \mu)\}$$

——$\boldsymbol{S}(f, \mu)$ の直系空間——,

に対して，$\boldsymbol{S}(f, \mu) \neq \emptyset$ であるような任意所与の $\mu \in \boldsymbol{R}$ に関して，次の関係(1)(2)が成立する．

(1)　$[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{S}(f^{\mathrm{R}}, 0)$.

(2)　$[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{L}} = [-\boldsymbol{S}(f^{\mathrm{R}}, 0)] \cap \boldsymbol{S}(f^{\mathrm{R}}, 0)$.

証明　(1)の証明．$\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{R}}$ ならば,

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}(f, \mu) \subset \boldsymbol{R}^n \ \forall \theta \in \boldsymbol{R}_{\oplus} : f(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z}) \leqq \mu,$$

であるから，定理3系1(iii)が成立している．よって，定理3系1により，$\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{S}(f^{\mathrm{R}}, 0)$．一方，$\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{S}(f^{\mathrm{R}}, 0)$ ならば，定理3(ii)により,

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}(f, \mu) \subset \boldsymbol{R}^n \ \forall \theta \in \boldsymbol{R}_{\oplus} :$$

$$f(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z}) \leqq f(\boldsymbol{x}) \leqq \mu, \text{ すなわち, } \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{S}(f, \mu).$$

よって，$\boldsymbol{S}(f, \mu) + \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{z} \subset \boldsymbol{S}(f, \mu)$ となって，$\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{R}}$.

(2)の証明．$[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{L}} = [-\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{R}} \cap [\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{R}}$ であることから，(1)により，直ちに結論を得る．‖

系　閉真凸拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ とある $\mu_0 \in \boldsymbol{R}$ に対して，f の μ_0-準位集合 $\boldsymbol{S}(f, \mu_0)$ が非空・有界ならば，任意所与の $\mu \in \boldsymbol{R}$ に対して，f の μ-準位集合 $\boldsymbol{S}(f, \mu)$ は有界である．

証明　$\mu \in \boldsymbol{R}$ は任意所与とする．$\boldsymbol{S}(f, \mu) = \emptyset$ ならば，結論は自明であるから，$\boldsymbol{S}(f, \mu) \neq \emptyset$ とする．仮定と文献〔6〕の定理11により,

$$\boldsymbol{S}(f, \mu_0) = \boldsymbol{S}(f^{\mathrm{a}}, \mu_0) = [\boldsymbol{S}(f, \mu_0)]^{\mathrm{a}} \ (\text{有界閉}),$$

であるから，文献〔3〕の定理5により,

①　$[\boldsymbol{S}(f, \mu_0)]^{\mathrm{R}} = \{\boldsymbol{0}\}$.

一方，定理4(1)によれば,

②　$[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{R}} = [\boldsymbol{S}(f, \mu_0)]^{\mathrm{R}} = \boldsymbol{S}(f^{\mathrm{R}}, 0)$.

よって，①②及び文献〔3〕の定理5により，$[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{R}}$ は有界である．‖

定理5　真凸拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と $(\boldsymbol{z}_0, \sigma_0) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{n+1}$ に対して，次の関係(1)(2)が成立する．

（1） 次の（i）（ii）（iii）は同値である．

（i） $(\boldsymbol{z}_0, \sigma_0) \in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{L}} := [-(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}] \cap (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$.

（ii） $^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\, ^\forall \theta \in \boldsymbol{R} : f(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z}_0) = f(\boldsymbol{x}) + \theta \sigma_0$.

（iii） $-f^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{z}_0) = f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}_0) = \sigma_0$.

（2） f が閉ならば，特に $\sigma_0 := f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})$ とおくとき，次の（iv）は上記（i）（ii）（iii）と同値である．

（iv） ある $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{dom}\, f$ に対して，$f(\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{z}_0)$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上のアフィン関数である．

証明 <u>（1）の証明</u>．<u>（i）⇒（ii）の証明</u>．定理1により，

$$^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\, ^\forall \theta \in \boldsymbol{R}_{\oplus} : f(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z}_0) \leqq f(\boldsymbol{x}) + \theta \sigma_0,$$
$$f(\boldsymbol{x} - \theta \boldsymbol{z}_0) \leqq f(\boldsymbol{x}) - \theta \sigma_0,$$

であるから，

$$^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\, ^\forall \theta \in \boldsymbol{R} : f(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z}_0) \leqq f(\boldsymbol{x}) + \theta \sigma_0,$$

すなわち，$f[(\boldsymbol{x} - \theta \boldsymbol{z}_0) + \theta \boldsymbol{z}_0] \leqq f(\boldsymbol{x} - \theta \boldsymbol{z}_0) + \theta \sigma_0$,

すなわち，$f(\boldsymbol{x}) - \theta \sigma_0 \leqq f(\boldsymbol{x} - \theta \boldsymbol{z}_0)$,

すなわち，$f(\boldsymbol{x}) + \theta \sigma_0 \leqq f(\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{z}_0)$,

となって，結論を得る．<u>（ii）⇒（iii）の証明</u>．

$$^\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}\, f : f(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{z}_0) - f(\boldsymbol{x}) = \pm \sigma_0 \quad (\text{複合同順}),$$

であるから，定理2により，

$$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}_0) = \sigma_0,\ f^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{z}_0) = -\sigma_0,$$

となって，結論を得る．<u>（iii）⇒（i）の証明</u>．$\pm(\boldsymbol{z}_0, \sigma_0) \in \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}} = (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}$ により，結論を得る．

<u>（2）の証明</u>．（ii）⇒（iv）は自明であるから，（iv）⇒（iii）を示す．

$$h(\theta) := f(\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{z}_0),\ h(0) = f(\boldsymbol{x}_0),$$
$$g(\theta) := h(\theta) - h(0),\ g(0) = 0,$$

とおくと，仮定により，$g(\theta)$ は θ に関して $\boldsymbol{R}$ 上の線形関数であるから，

$$\theta^{-1} g(\theta) + \theta^{-1} g(-\theta) = g(1-1) = g(0) = 0.$$

よって，定理2により，結論を得る． ‖

定義4 真凸拡張関数の直系空間

真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と射影 $pr: (\text{epi } f)^{\text{L}} \to \boldsymbol{R}^n$ に対して，$(\text{epi } f)^{\text{L}}$ の pr による像 $pr[(\text{epi } f)^{\text{L}}]$ を，特に，f の直系空間という．

注意5 真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ の直系空間 $pr[(\text{epi } f)^{\text{L}}]$ に対して，次の関係(1)(2)(3)が成立する．

(1) $$\begin{aligned} pr[(\text{epi } f)^{\text{L}}] &= \{\boldsymbol{z} \mid -f^{\text{R}}(-\boldsymbol{z}) = f^{\text{R}}(\boldsymbol{z}) < \infty\} \\ &= \{\boldsymbol{z} \mid (\boldsymbol{z}, f^{\text{R}}(\boldsymbol{z})) \in (\text{epi } f)^{\text{L}}\} \\ &\subset [pr(\text{epi } f)]^{\text{L}} = (\text{dom } f)^{\text{L}}. \end{aligned}$$

(2) $pr[(\text{epi } f)^{\text{L}}]$ は線形部分空間である．

(3) $f^{\text{R}}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ は $pr[(\text{epi } f)^{\text{L}}]$ 上で線形関数である．

証明 <u>(1)の証明</u>．定理5により，

$$^\forall(\boldsymbol{z}, \sigma) \in (\text{epi } f)^{\text{L}}: -f^{\text{R}}(-\boldsymbol{z}) = f^{\text{R}}(\boldsymbol{z}) = \sigma,$$

であるから，

$$^\forall\boldsymbol{x} \in \text{dom } f: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{z} \subset \text{dom } f.$$

よって，文献〔3〕の定理6(ii)により，$\boldsymbol{z} \in (\text{dom } f)^{\text{L}} = [pr(\text{epi } f)]^{\text{L}}$．<u>(2)の証明</u>．文献〔3〕の定理6により，$(\text{epi } f)^{\text{L}}$ は線形部分空間であるから，直ちに結論を得る．<u>(3)の証明</u>．$\theta_1, \theta_2 \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in pr[(\text{epi } f)^{\text{L}}]$ は任意を所与とする．$(\text{epi } f)^{\text{L}}$ が線形部分空間であることと(1)とにより，

$$(\theta_1\boldsymbol{z}_1 + \theta_2\boldsymbol{z}_2, \theta_1 f^{\text{R}}(\boldsymbol{z}_1) + \theta_2 f^{\text{R}}(\boldsymbol{z}_2)) \in (\text{epi } f)^{\text{L}}.$$

よって，定理5により，

$$f^{\text{R}}(\theta_1\boldsymbol{z}_1 + \theta_2\boldsymbol{z}_2) = \theta_1 f^{\text{R}}(\boldsymbol{z}_1) + \theta_2 f^{\text{R}}(\boldsymbol{z}_2),$$

となって，結論を得る． ‖

注意6 一般に，注意5(1)の関係において，

$pr[(\text{epi } f)^{\text{L}}] \subset [pr(\text{epi } f)]^{\text{L}} = (\text{dom } f)^{\text{L}}$,

あるいは，$\text{dom } f^{\text{R}} \subset (\text{dom } f)^{\text{R}}$,

ということだけしか主張できない[1)]．この結果，定義4は，文献〔3〕の定義4とは，完全には対応しない——同様のことは，以下の定義5についてもいえる——．ところで，$z \in pr[(\mathrm{epi}\, f)^L]$, $z \neq 0$，を f のアフィン方向ということがある．z が f のアフィン方向であるとき，

$$^\forall x \in \mathrm{dom}\, f : x + Rz \subset \mathrm{dom}\, f,$$

すなわち，方向 z の直線が $\mathrm{dom}\, f$ に含まれる．しかし，z のこの性質は，一般に，任意の $z \in (\mathrm{dom}\, f)^L$ について成立する．したがって，$pr[(\mathrm{epi}\, f)^L] \subsetneqq (\mathrm{dom}\, f)^L = [pr(\mathrm{epi}\, f)]^L$ の場合には，‘f のアフィン方向’ が $pr[(\mathrm{epi}\, f)^L]$ の点に限られて使用されることに若干の注意を払っておく必要がある．

定義5　真凸拡張関数の次元・直系・階数

真凸拡張関数 $f : R^n \to R \cup \{\infty\}$ に対して，

$$\dim f := \dim\{pr(\mathrm{epi}\, f)\} = \dim\{\mathrm{dom}\, f\},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{lin}\, f &:= \dim\{pr[(\mathrm{epi}\, f)^L]\} \\ &\leqq \dim\{[pr(\mathrm{epi}\, f)]^L\} = \dim\{(\mathrm{dom}\, f)^L\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}\, f &:= \dim f - \mathrm{lin}\, f \\ &= \dim\{pr(\mathrm{epi}\, f)\} - \dim\{pr[(\mathrm{epi}\, f)^L]\}. \end{aligned}$$

を，それぞれ，f の次元，f の直系，f の階数という．

注意7　真凸拡張関数 $f : R^n \to R \cup \{\infty\}$ に対して，$\mathrm{rank}\, f = 0$ ならば，$\mathrm{dom}\, f$ はアフィン集合であり，更に，次の関係が成立する．

$$\begin{aligned} \dim f &:= \dim\{\mathrm{dom}\, f\} = \dim\{(\mathrm{dom}\, f)^L\} \\ &= \dim\{pr(\mathrm{epi}\, f)\} = \dim\{pr[(\mathrm{epi}\, f)^L]\}. \end{aligned}$$

証明　$\overline{pr(\mathrm{epi}\, f)} := pr(\mathrm{epi}\, f) \cap ([pr(\mathrm{epi}\, f)]^L)^\perp$ とおくと，注意5，文献〔3〕の注意7及び文献〔3〕の定理6 (iv) により，

$$\dim\{\mathrm{dom}\, f\} = \dim\{pr(\mathrm{epi}\, f)\}$$

1）$z \in \mathrm{dom}\, f^R \Rightarrow f^R(z) = \sup\{f(z+x) - f(x) \mid x \in \mathrm{dom}\, f\} < \infty$
$\overset{*}{\Rightarrow} {}^\forall x \in \mathrm{dom}\, f : f(z+x) < \infty$，すなわち，$z + x \in \mathrm{dom}\, f$
$\Rightarrow z \in (\mathrm{dom}\, f)^R$（文献〔3〕の定理1）．

しかし，＊部分に関して，逆は成立しない．

$$=\dim\{[pr(\mathrm{epi}\,f)]^{\mathrm{L}}\}+\dim\{\overline{pr(\mathrm{epi}\,f)}\}$$

$$=\dim\{(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{L}}\}+\dim\{\mathrm{dom}\,f\cap((\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{L}})^{\perp}\},$$

である．よって，仮定により，

$$\dim\{\mathrm{dom}\,f\cap((\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{L}})^{\perp}\}\leqq\dim\{\overline{pr(\mathrm{epi}\,f)}\}=0,$$

すなわち，

$$\dim\{\mathrm{dom}\,f\cap((\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{L}})^{\perp}\}=0,$$

であるから，文献〔3〕の定理6とその系1により，$\mathrm{dom}\,f$ はアフィン集合である．なお，$\dim f$ の関係式の成立は自明である．　‖

注意8　閉真凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　$\mathrm{rank}\,f=\dim f$，すなわち，$\mathrm{lin}\,f=0$.

(ii)　$pr[(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{L}}]=\{\boldsymbol{0}\}$，すなわち，$pr[(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{L}}]\subset(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{L}}$は，いかなる f のアフィン方向も含まない．

証明　注意6，定義5により，自明である．　‖

§3　諸定理 I

定理6　閉真凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$，線形変換 $\boldsymbol{M}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ に対して，関数 $f_{*\boldsymbol{M}}:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ を，

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{y}}:=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{y}\}\subset\boldsymbol{R}^n,$$

とおいて，

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{y}}\neq\emptyset\Rightarrow f_{*\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{y}):=\inf\{f(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{y}\},\\ \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{y}}=\emptyset\Rightarrow f_{*\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{y}):=\infty,\end{cases}$$

によって定義するとき，集合

$$\boldsymbol{A}:=\{\boldsymbol{x}\mid f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})\leqq0<f^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x})\}$$

$$=\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{x},0)\in\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}}\cap(-[(\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}}])\}\subset\boldsymbol{R}^n,$$

に関して，

$$^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}:\boldsymbol{Mx}\neq0,$$

ならば，f_{*M} は，

$$(f_{*M})^{\mathrm{R}} \doteq f^{\mathrm{R}}_{*M},$$

を満たす閉真凸拡張関数である．

証明　線形変換 $\mathcal{M}$：epi $f \to \boldsymbol{R}^{m+1}$ を，

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \mu) := (\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}, \mu),$$

によって定義する．最初に3つの関係，

① $[\mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f)]^{\mathrm{a}} = \mathcal{M}((\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}) = \mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{a}}) = \mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f),$

② $[\mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f)]^{\mathrm{R}} = \mathcal{M}((\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}}) = \mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}),$

③ $\mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f) = \mathrm{epi}\, f_{*M},$

を示そう．①②の証明．epi f＝epi f^{a}＝(epi $f)^{\mathrm{a}}$，epi f^{R}＝(epi $f)^{\mathrm{R}}$，(epi $f)^{\mathrm{L}}$＝(−epi f^{R})∩epi f^{R} であるから，

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{R}} \cap \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid \mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \mu) = (\boldsymbol{0}, 0)\} \\
&\quad = (\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}) \cap \{(\boldsymbol{x}, 0) \mid \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \\
&\quad = (\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}) \cap \{(\boldsymbol{x}, 0) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\} \\
&\quad \subset (\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}) \cap (-\mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}) \\
&\quad = (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{L}}.
\end{aligned}$$

よって，文献〔3〕の定理7により，凸集合 $\mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f)$ に関して，①②が成立する．③の証明．$\mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f) \subset \mathrm{epi}\, f_{*M}$ であること．$(\boldsymbol{y}, \rho) \in \mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f)$ は任意所与とする．

$$^{\exists}(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) \in \mathrm{epi}\, f : (\boldsymbol{y}, \rho) = \mathcal{M}(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0, \mu_0),$$

であるから，

$$f_{*M}(\boldsymbol{y}) := \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\} \leqq f(\boldsymbol{x}_0) < \mu_0 = \rho,$$

となって，$(\boldsymbol{y}, \rho) \in \mathrm{epi}\, f_{*M}$．epi $f_{*M} \subset \mathcal{M}(\mathrm{epi}\, f)$ であること．$(\boldsymbol{y}, \rho) \in \mathrm{epi}\, f_{*M}$ は任意所与とする．

$$f_{*M} := \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\} \leqq \rho,$$

であるから，

$$^{\forall}\nu \in \boldsymbol{N}\ ^{\exists}\boldsymbol{x}_{\nu} \in \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{y}} : f_{*M}(\boldsymbol{y}) \leqq f(\boldsymbol{x}_{\nu}) < \rho + \frac{1}{\nu},$$

となり，epi f 上の点列 $\langle(\boldsymbol{x}_\nu, \rho+\frac{1}{\nu})\rangle$，$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_\nu=\boldsymbol{y}$，が存在する．この点列については，

$$(\boldsymbol{y}, \rho+\frac{1}{\nu})=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_\nu, \rho+\frac{1}{\nu})=\mathcal{M}(\boldsymbol{x}_\nu, \rho+\frac{1}{\nu})\in\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f),$$

$$(\boldsymbol{y}, \rho+\frac{1}{\nu}) \rightarrow (\boldsymbol{y}, \rho)\ (\nu\rightarrow\infty),$$

であるが，①により，$\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f)$ は閉であるから，結局，$(\boldsymbol{y}, \rho)\in\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f)$．かくして，①②③の成立が示された．①③及び文献〔5〕の定理3により，epi f_{*M} は閉であり，f_{*M} が閉であることが示され，更に，②③により，

$$\mathrm{epi}\,(f_{*M})^{\mathrm{R}}=[\mathrm{epi}\,f_{*M}]^{\mathrm{R}}=[\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f)]^{\mathrm{R}}=\mathcal{M}((\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{R}})$$
$$=\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}})=\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}}_{*M},$$

となって，$(f_{*M})^{\mathrm{R}}=f^{\mathrm{R}}_{*M}$ が示される．<u>f_{*M} が真であること</u>．

④ $\quad {}^{\exists}\boldsymbol{y}_0\in\{\boldsymbol{y}\mid X_{\boldsymbol{y}}\neq\emptyset\}：f_{*M}(\boldsymbol{y}_0)\coloneqq\inf\{f(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_0\}=-\infty,$

を仮定して，矛盾することを示す．④ならば，③①に注目すると，

$${}^{\forall}\rho\in\boldsymbol{R}：(\boldsymbol{y}_0, \rho)\in\mathrm{epi}\,f_{*M}=\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f)=[\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f)]^{\mathrm{a}},$$

であるから，特に，

$${}^{\forall}\mu\in\boldsymbol{R}：(\boldsymbol{y}_0, 0)+\boldsymbol{R}_{\oplus}(\boldsymbol{0}, \mu)\subset\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f),\ (\boldsymbol{y}_0, 0)\in\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f),$$

となり，文献〔3〕の定理4と②により，

$${}^{\forall}\mu\in\boldsymbol{R}：(\boldsymbol{0}, \mu)\in[\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f)]^{\mathrm{R}}=\mathcal{M}(\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}}),$$

が成立する．特に，

$${}^{\forall}\mu\in\boldsymbol{R},\ \mu<0\ {}^{\exists}(\boldsymbol{x}_0, \mu_0)\in\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}}：(\boldsymbol{0}, \mu)=\mathcal{M}(\boldsymbol{x}_0, \mu_0)=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0, \mu_0),$$

であるから，

⑤ $\quad {}^{\exists}\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^n：f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_0)<0,\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}.$

ところで，上記 $\boldsymbol{x}_0$ を固定すると，定理2（1）（2）と文献〔4〕の定理8により，

$$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_0)+f^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x}_0)\geqq f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0)=f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{0})=0,$$

であるから，

⑥　$-f^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x}_0) \leqq f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_0)$.

⑤⑥によれば,

$$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_0) < 0 < f^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x}_0),\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0},$$

であるが，これは，$\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{A}$ かつ $\boldsymbol{x}_0 \notin \boldsymbol{A}$ を意味し，矛盾である．　‖

系 1　k 個の閉真凸拡張関数 $f_i: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, $i=1, \cdots, k$, に対して,

$$\boldsymbol{A} := \left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k)\ (nk \text{ 次列ベクトル}), \\ \sum_{i=1}^{k} f_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_i) \leqq 0 \leqq \sum_{i=1}^{k} f_i^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x}_i),\ \boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{R}^n \end{array} \right\} \subset \boldsymbol{R}^{nk},$$

とおくとき,

$$^{\forall}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k) \in \boldsymbol{A} : \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0},$$

ならば，$f_1, \cdots, f_n$ の下限たたみ込み関数 $\bigoplus_{i=1}^{k} f_i := f_1 \oplus \cdots \oplus f_k : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k} f_i\right)(\boldsymbol{y}) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{k} f_i(\boldsymbol{x}_i) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y} \right\},$$

は,

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k} f_i\right)^{\mathrm{R}} = \bigoplus_{i=1}^{k} f_i^{\mathrm{R}},$$

を満たす閉真凸拡張関数である．

証明　k 個の n 次単位行列を横に並べた行列を $\boldsymbol{M}$ とおく．線形変換 $\boldsymbol{M}: \boldsymbol{R}^{nk} \to \boldsymbol{R}$ については,

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k) = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i,$$

が成立している．次に，拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^{nk} \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k) := \sum_{i=1}^{k} f_i(\boldsymbol{x}_i),$$

によって定義すると，文献〔6〕の定理12により，f は閉真凸である．よって,

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k} f_i\right)(\boldsymbol{y}) = f_{*\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{y}) := \inf\{ f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y} \},$$

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k} f_i^{\mathrm{R}}\right)(\boldsymbol{y}) = f^{\mathrm{R}}_{*\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{y}) := \inf\{ f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y} \},$$

とおくと，定理 6 により，$f_{*\boldsymbol{M}}$ は閉真凸であり,

$$(\bigoplus_{i=1}^{k} f_i)^{\mathrm{R}} = (f_{*M})^{\mathrm{R}} = f_{*M}^{\mathrm{R}} = \bigoplus_{i=1}^{k} f_i^{\mathrm{R}},$$

となって，結論を得る． ‖

系 2　2 つの閉真凸拡張関数 $f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, $i=1, 2$ に対して，

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} : f_1^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}) + f_2^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x}) > 0,$$

ならば，下限たたみ込み関数 $f_1 \oplus f_2 : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$\begin{aligned}(f_1 \oplus f_2)(\boldsymbol{x}) &:= \inf\{f_1(\boldsymbol{x}_1) + f_2(\boldsymbol{x}_2) \mid \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}\} \\ &= \inf\{f_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + f_2(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n\},\end{aligned}$$

は，閉真凸である．

証明　系 1 に注目すれば，$\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ の集合

$$A := \{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mid f_1^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_1) + f_2^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_2) \leqq 0 \leqq f_1^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x}_1) + f_2^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x}_2)\},$$

に対して，

① $\quad \forall (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in A : \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$，すなわち，$\boldsymbol{x}_2 \neq -\boldsymbol{x}_1$,

であることを示せばよい．そこで，今，①を否定して，

$$\exists (\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0) \in A : \boldsymbol{x}_2^0 = -\boldsymbol{x}_1^0,$$

とすると，

$$0 \geqq f_1^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_1^0) + f_2^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_2^0) = f_1^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x}_2^0) + f_2^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}_2^0) > 0,$$

となって，矛盾する．したがって，結局，①が成立する． ‖

系 3　閉真凸拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と表示関数 $\delta(\cdot \mid -C) : \boldsymbol{R}^n \to \{0, \infty\}$，ただし，$C$ は非空・凸集合，によって定義される下限たたみ込み関数

$$\begin{aligned}[f \oplus \delta(\cdot \mid -C)](\boldsymbol{x}) &:= \inf\{f(\boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid -C) \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n\} \\ &= \inf\{f(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{x} + C\},\end{aligned}$$

は，$\boldsymbol{S}(f^{\mathrm{R}}, 0) \cap C^{\mathrm{R}} = \{\boldsymbol{0}\}$，すなわち，$f$ の無限の方向と C の無限の方向が共通部分を持たないならば，閉真凸拡張関数である．

証明　系 2 に注目すれば，$\boldsymbol{S}(f^{\mathrm{R}}, 0) \cap C^{\mathrm{R}} = \{\boldsymbol{0}\}$ であるとき，

① $\quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} : f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}) + \delta^{\mathrm{R}}(-\boldsymbol{x} \mid -C) > 0$,

であることを示せばよい．さて，定理 2 により，任意所与の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\delta^{R}(-\boldsymbol{x}\mid -C)\\&\quad=\sup\{\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\mid -C)-\delta(\boldsymbol{y}\mid -C)\mid \boldsymbol{y}\in\operatorname{dom}\delta(\cdot\mid -C)\}\\&\quad=\sup\{\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\mid -C)\mid \boldsymbol{y}\in -C\},\end{aligned}$$

であるが，文献〔3〕の定理4により，$-\boldsymbol{y}\in C$ のとき，

$$\boldsymbol{x}\in C^{R}\Longleftrightarrow \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in C\Longleftrightarrow \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in -C\Longleftrightarrow \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\mid -C)=0,$$

であるから，

$$② \quad \begin{cases}\boldsymbol{x}\in C^{R}\Rightarrow \delta^{R}(-\boldsymbol{x}\mid -C)=0,\\ \boldsymbol{x}\notin C^{R}\Rightarrow \delta^{R}(-\boldsymbol{x}\mid -C)=\infty.\end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{x}\notin C^{R}$ ならば，定理2（2）と②により，①の左辺$=\infty>0$ であり，また，$\boldsymbol{x}\in C^{R}$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば，仮定により $\boldsymbol{x}\notin \boldsymbol{S}(f^{R},0):=\{\boldsymbol{z}\mid f^{R}(\boldsymbol{z})\leqq 0\}$ であることと②により，①の左辺$=f^{R}(\boldsymbol{x})>0$ となって，結論を得る． ‖

系4 閉真凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^{n}\to\{\infty\}$ に対して，

$$\boldsymbol{S}(f^{R},0)\cap \boldsymbol{R}^{n}_{\oplus}=\{\boldsymbol{0}\},$$

ならば，拡張関数 $g:\boldsymbol{R}^{n}\to\{-\infty,\infty\}$,

$$g(\boldsymbol{x}):=\inf\{f(\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{x}\}=\inf\{f(\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}^{n}_{\oplus}\},$$

は閉真凸であり，次の（†）を満たすすべての拡張関数 $h:\boldsymbol{R}^{n}\to\{-\infty,\infty\}$ のうち最大の拡張関数である．

$$(\dagger)\quad \begin{cases}{}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}: h(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{x}),\\ {}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}\,{}^{\forall}\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^{n}_{\oplus}: h(\boldsymbol{x})\leqq h(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}).\end{cases}$$

証明 g が閉真凸であることは，系3により明らかである．次に，

$$\begin{cases}g(\boldsymbol{x})=\min\{f(\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}^{n}_{\oplus}\}\leqq f(\boldsymbol{x}),\\ {}^{\forall}\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^{n}_{\oplus}: g(\boldsymbol{x})=\min\{f(\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{x}\}\\ \qquad\qquad\leqq\min\{f(\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\}=g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}),\end{cases}$$

であるから，g は（†）を満たす．最後に，（†）を満たすある拡張関数 $\bar{h}:\boldsymbol{R}^{n}\to\{-\infty,\infty\}$ に対して，

$${}^{\exists}\boldsymbol{x}_{0}\in\boldsymbol{R}^{n}: g(\boldsymbol{x}_{0})<\bar{h}(\boldsymbol{x}_{0}),$$

ならば，（†）の後半の関係により，

$$g(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{y}_0):=\min\{f(\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{x}_0\},\ \boldsymbol{y}_0\geqq\boldsymbol{x}_0,$$
$$<\bar{h}(\boldsymbol{x}_0)\leqq\bar{h}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0)=\bar{h}(\boldsymbol{y}_0),$$

となるが，これは(†)の前半の関係に矛盾する．　‖

定理 7　真凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ と線形変換 $\boldsymbol{M}:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ に対して，拡張関数 $f\circ\boldsymbol{M}:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ を

$$(f\circ\boldsymbol{M})(\boldsymbol{x}):=f(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}),$$

によって定義するとき，次の関係(1)(2)が成立する．

(1)　f が閉かつ $\mathrm{dom}(f\circ\boldsymbol{M})\neq\emptyset$ ならば，

(a)　$f\circ\boldsymbol{M}$ は閉真凸である．したがって，

$$f\circ\boldsymbol{M}=(f\circ\boldsymbol{M})^{\mathrm{a}}=f^{\mathrm{a}}\circ\boldsymbol{M}.$$

(b)　$(f\circ\boldsymbol{M})^{\mathrm{R}}=f^{\mathrm{R}}\circ\boldsymbol{M}.$

(2)　$\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}\in(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}}\}\neq\emptyset$ ならば，

$$(f\circ\boldsymbol{M})^{\mathrm{a}}=f^{\mathrm{a}}\circ\boldsymbol{M}.$$

証明　文献〔5〕の定理3(2)により，(1)の下では，$f\circ\boldsymbol{M}$ は真凸である．ここで，線形変換 $\mathcal{M}:\boldsymbol{R}^{m+1}\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ を

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{x},\mu):=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x},\mu),$$

によって定義する．文献〔1〕の定理14，文献〔2〕の注意4(iv)により，$\mathcal{M}$ は $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 上で連続である．また，

$$(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\,(f\circ\boldsymbol{M})\subset\boldsymbol{R}^{n+1}\Leftrightarrow(f\circ\boldsymbol{M})(\boldsymbol{x})\leqq\mu$$
$$\Leftrightarrow f(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x})\leqq\mu\Leftrightarrow(\boldsymbol{M}\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\,f$$
$$\Leftrightarrow\mathcal{M}(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\,f\Leftrightarrow(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathcal{M}^{-1}(\mathrm{epi}\,f)\subset\boldsymbol{R}^{n+1},$$

であるから，

①　$\mathrm{epi}\,(f\circ\boldsymbol{M})=\mathcal{M}^{-1}(\mathrm{epi}\,f).$

よって，条件(1)の下では，文献〔2〕の注意(iv)により，$\mathrm{epi}\,(f\circ\boldsymbol{M})$ は閉となって，(a)を得る．次に，(1)の下では，①と文献〔3〕の定理4系3により，

$$\mathrm{epi}\,(f\circ\boldsymbol{M})^{\mathrm{R}}=[\mathrm{epi}\,(f\circ\boldsymbol{M})]^{\mathrm{R}}=[\mathcal{M}^{-1}(\mathrm{epi}\,f)]^{\mathrm{R}}$$

$$=\mathcal{M}^{-1}[(\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{R}}]=\mathcal{M}^{-1}(\mathrm{epi}\ f^{\mathrm{R}})=\mathrm{epi}\,(f^{\mathrm{R}}\circ \boldsymbol{M}),$$

となって，（b）を得る．最後に，条件（2）の下では，①と文献〔3〕の定理24により，

$$\mathrm{epi}\,(f\circ \boldsymbol{M})^{\mathrm{a}}=[\mathrm{epi}\,(f\circ \boldsymbol{M})]^{\mathrm{a}}=[\mathcal{M}^{-1}(\mathrm{epi}\ f)]^{\mathrm{a}}$$
$$=\mathcal{M}^{-1}[(\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{a}}]=\mathcal{M}^{-1}(\mathrm{epi}\ f^{\mathrm{a}})=\mathrm{epi}\,(f^{\mathrm{a}}\circ \boldsymbol{M}),$$

となって，（C）を得る．　‖

§4　諸定理 II

定理 8　k 個の真凸拡張関数 $f_i：\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$, $i=1,\cdots,k$, に対して，拡張関数 $\sum_{i=1}^{k} f_i：\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ を，

$$\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right)(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{k} f_i(\boldsymbol{x}),$$

によって定義するとき，次の関係（1）（2）が成立する．

（1）　すべての f_i が閉かつ $\mathrm{dom}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right)\equiv\bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{dom}\ f_i\neq\emptyset$ ならば，

（a）　$\sum_{i=1}^{k} f_i$ は閉真凸である．したがって，

$$\sum_{i=1}^{k} f_i=\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right)^{\mathrm{a}}=\sum_{i=1}^{k} f_i^{\mathrm{a}}.$$

（b）　$\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right)^{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{k} f_i^{\mathrm{R}}.$

（2）　$\bigcap_{i=1}^{k}(\mathrm{dom}\ f_i)^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ ならば，

（c）　$\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right)^{\mathrm{a}}=\sum_{i=1}^{k} f_i^{\mathrm{a}}.$

証明　$\Sigma:=\sum_{i=1}^{k}$ とおく．Σf_i が真凸であることは，文献〔4〕の定理4系2により，明らかである．また，もし Σf_i が閉ならば，定理2（iii）により，

$$(\Sigma f_i^{\mathrm{R}})(\boldsymbol{z})=\Sigma f_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z})=\Sigma\lim_{\theta\uparrow\infty}\frac{f_i(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})-f_i(\boldsymbol{x})}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\uparrow\infty}\Sigma\frac{f_i(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})-f_i(\boldsymbol{x})}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\uparrow\infty}\frac{(\Sigma f_i)(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{z})-(\Sigma f_i)(\boldsymbol{x})}{\theta}=(\Sigma f_i)^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{z}),$$

となって，(b)が得られる．そこで，あとは，(1)または(2)の下では，(c)が成立することを示せば十分である．(1)ならば，文献〔2〕の定理19系2により，$(\mathrm{dom}\ \Sigma f_i)^{\mathrm{I}}\equiv(\bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{dom}\ f_i)^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ であり，(2)ならば，文献〔2〕の定理21により，$\bigcap_{i=1}^{k}(\mathrm{dom}\ f_i)^{\mathrm{I}}=(\bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{dom}\ f_i)^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ であることを考えて，$\boldsymbol{x}_0,\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathrm{dom}\ \Sigma f_i$, $\boldsymbol{x}_0\neq\overline{\boldsymbol{x}}$, を固定すると，文献〔6〕の定理10により，

$$\begin{aligned}{}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0:\ (\Sigma f_i)^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})&=\lim_{\xi\downarrow 0}(\Sigma f_i)[\boldsymbol{x}+\xi(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x})]\\&=\Sigma\lim_{\xi\downarrow 0}f_i[\boldsymbol{x}+\xi(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x})]\\&=\Sigma f_i^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

$$(\Sigma f_i)^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{\xi\downarrow 0}(\Sigma f_i)[\boldsymbol{x}_0+\xi(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)]=\Sigma f_i^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0).$$

よって結論を得る．　‖

定理9　真凸拡張関数 $f_i:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ の任意の族 $\{f_i\mid i\in\boldsymbol{\Lambda}$ (添数集合)$\}$ に対して，拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ を

$$f(\boldsymbol{x}):=\sup\{f_i(\boldsymbol{x})\mid i\in\boldsymbol{\Lambda}\}\equiv\sup_{i\in\Lambda}f_i(\boldsymbol{x}),$$

によって定義する．このとき，次の関係(1)(2)が成立する．

(1)　すべての f_i が閉かつ $\mathrm{dom}\ f\neq\emptyset$ ならば，

(a)　f は閉真凸である．したがって，

$$f(\boldsymbol{x})=f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})=\sup\{f_i^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})\mid i\in\boldsymbol{\Lambda}\}.$$

(b)　$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})=\sup\{f_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})\mid i\in\boldsymbol{\Lambda}\}\equiv\sup_{i\in\Lambda}f_i^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}).$

(2)　$\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{dom}\ f_i)^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ ならば，

(c)　$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})=\sup\{f_i^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})\mid i\in\boldsymbol{\Lambda}\}.$

証明　$\cap:=\bigcap_{i\in\Lambda}$ とおく．f が真凸であることは，文献〔4〕の定理6により，明らかである．また，条件(1)の下では，

$$\emptyset\neq\mathrm{epi}\ f=\cap\ \mathrm{epi}\ f_i=\cap\ (\mathrm{epi}\ f_i)^{\mathrm{a}},$$

であるから，文献〔3〕の定理4系2により，

$$\{(z, \sigma) \mid f^{R}(z) \leqq \sigma\} = \mathrm{epi}\, f^{R} = (\cap\, \mathrm{epi}\, f_i)^{R} = \cap\, \mathrm{epi}\, f_i^{R}$$
$$= \cap \{(z, \sigma) \mid f_i^{R}(z) \leqq \sigma\} = \{(z, \sigma) \mid \sup_{i \in \Lambda} f_i^{R}(z) \leqq \sigma\},$$

となって，(b)を得る．次に，条件(1)ならば，文献〔2〕の定理19系2により，$(\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}} \neq \emptyset$ であるが，今，$x_0 \in (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}}$ とすると，

$$^{\exists}\delta_0 \in R_+ : B(x_0; \delta_0) \subset \mathrm{dom}\, f = \{x \mid \sup_{i \in \Lambda} f_i(x) < \infty\} = \cap\, \mathrm{dom}\, f_i,$$

であるから，

$$^{\exists}\delta_0 \in R_+ \, {}^{\forall}i \in \Lambda : B(x_0; \delta_0) \subset \mathrm{dom}\, f_i,$$

すなわち，

$$^{\forall}i \in \Lambda : x_0 \in \mathrm{dom}\, f_i, \text{ すなわち，} x_0 \in \cap\, (\mathrm{dom}\, f_i)^{\mathrm{I}},$$

となり，条件(2)が成立している．そこで，以下，条件(2)の下で(c)を証明する．文献〔6〕の定理7と(2)により，

$$\cap\, (\mathrm{epi}\, f_i)^{\mathrm{I}} = \cap \{(x, \mu) \mid x \in (\mathrm{dom}\, f_i)^{\mathrm{I}}, f_i(x) < \mu\}$$
$$= \{(x, \mu) \mid x \in \cap\, (\mathrm{dom}\, f_i)^{\mathrm{I}}, {}^{\forall}i \in \Lambda : f_i(x) < \mu\} \neq \emptyset,$$

であるから，文献〔2〕の定理21により，

$$\mathrm{epi}\, f^{a} = (\mathrm{epi}\, f)^{a} = (\cap\, \mathrm{epi}\, f_i)^{a} = \cap\, (\mathrm{epi}\, f_i)^{a} = \cap\, \mathrm{epi}\, f_i^{a}.$$

よって，

$$\{(x, \mu) \mid f^{a}(x) \leqq \mu\} = \mathrm{epi}\, f^{a} = \cap\, \mathrm{epi}\, f_i^{a}$$
$$= \{(x, \mu) \mid \sup_{i \in \Lambda} f_i^{a}(x) \leqq \mu\},$$

であるから，

$$f^{a}(x) = \sup_{i \in \Lambda} f_i^{a}(x) \equiv \sup\{f_i^{a}(x) \mid i \in \Lambda\},$$

となって，結論を得る．　‖

定理10　閉真凸拡張関数 $f : R^n \to R \cup \{\infty\}$, $f(0) > 0$，と拡張関数 $fR_{\oplus} : R^n \to R \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$(fR_{\oplus})(x) := \inf\{\mu \mid (x, \mu) \in R_{\oplus}\mathrm{epi}\, f\},$$

に対して，次の関係(1)(2)(3)が成立する．

(1)　$fR_{\oplus}$ は真凸である．

(2)　$(fR_{\oplus})^{a}(x) = \min\{(fR_{\oplus})(x),\ f^{R}(x)\} > -\infty.$

（3）　$\mathbf{0}\in\mathrm{dom}\,f$ ならば，$f\boldsymbol{R}_{\oplus}$ は閉真凸である．したがって，

$$f\boldsymbol{R}_{\oplus}=(f\boldsymbol{R}_{\oplus})^{\mathrm{a}}.$$

証明　(1)の証明．文献〔5〕の定理5により，$f\boldsymbol{R}_{\oplus}$ は凸であり，また，f が真凸であるという仮定により，$\mathrm{dom}(f\boldsymbol{R}_{\oplus})\neq\emptyset$ は自明であるから，あとは，

①　$$^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}:(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})=\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x},\mu)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\,\mathrm{epi}\,f\}>-\infty,$$

を示せばよい．結論を否定して，

$$^{\exists}\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^{n}:(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x}_0)=\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x}_0,\mu)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f\}=-\infty,$$

とする．ここで，この $\boldsymbol{x}_0$ を固定すると，

$$^{\forall}\nu\in\boldsymbol{N}:(\boldsymbol{x}_0,-\nu)=\nu(\nu^{-1}\boldsymbol{x}_0,-1)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f,$$

すなわち，$(\nu^{-1}\boldsymbol{x}_0,-1)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f$,

であるから，$(\mathbf{0},-1)\in(\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{a}}$ である．ところで，文献〔2〕の定理22と文献〔3〕の定理3により，

②　$$(\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f\cup(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f\cup\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}},$$

であることから，$(\mathbf{0},-1)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f\cup\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}}$．しかし，$f^{\mathrm{R}}(\mathbf{0})=0$ であるから，$(\mathbf{0},-1)\notin\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{R}}$ であり，結局，$(\mathbf{0},-1)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f$．そこで，今，

$$^{\exists}\theta_0\in\boldsymbol{R}_{+}:(\mathbf{0},-1)\in\theta_0\mathrm{epi}\,f,\ \text{すなわち，}\ (\mathbf{0},-\theta_0^{-1})\in\mathrm{epi}\,f,$$

とすると，この θ_0 に対して，$f(\mathbf{0})\leqq-\theta<0$ となる．しかし，これは仮定に反する．よって，①が成立する．

(2)の証明．任意所与の $(\boldsymbol{x}_0,\mu_0)\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ に対して，$(\boldsymbol{x}_0,\mu_0)$ に収束する点列を $\langle(\boldsymbol{x}_\nu,\mu_\nu)\rangle$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}_0,\mu_0)\in[\mathrm{epi}(f\boldsymbol{R}_{\oplus})]^{\mathrm{a}}=\mathrm{epi}(f\boldsymbol{R}_{\oplus})^{\mathrm{a}}\\&\Longleftrightarrow{}^{\exists}\langle(\boldsymbol{x}_\nu,\mu_\nu)\rangle:(\boldsymbol{x}_\nu,\mu_\nu)\in\mathrm{epi}(f\boldsymbol{R}_{\oplus})\\&\Longleftrightarrow{}^{\exists}\langle(\boldsymbol{x}_\nu,\mu_\nu)\rangle:\ \mu_\nu\geqq(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})=\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x}_\nu,\mu)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f\}\\&\Longleftrightarrow{}^{\exists}\langle(\boldsymbol{x}_\nu,\mu_\nu)\rangle:(\boldsymbol{x}_\nu,\mu_\nu)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f\\&\Longleftrightarrow(\boldsymbol{x}_0,\mu_0)\in(\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{a}},\end{aligned}$$

であるから，

$$[\mathrm{epi}(f\boldsymbol{R}_{\oplus})]^{\mathrm{a}}=\mathrm{epi}(f\boldsymbol{R}_{\oplus})^{\mathrm{a}}=(\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{a}},$$

であるが，②により，

$$\mathrm{epi}\,(f\boldsymbol{R}_\oplus)^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{R}_\oplus \mathrm{epi}\, f \cup \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{R}}.$$

よって，(2)の等号が成立する．また，定理2により，f^{R} は真凸であるから，(1)と併せて，(2)の不等号を得る．

(3)の証明．$\boldsymbol{0}\in \mathrm{dom}\, f$ であるから，定理2，文献〔5〕の定理4，定理5により，

$$f^{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x})=\lim_{\theta\uparrow\infty}\theta^{-1}f(\theta\boldsymbol{x})=\lim_{\alpha\downarrow 0}\alpha f(\alpha^{-1}\boldsymbol{x})=\lim_{\alpha\downarrow 0}(f\alpha)(\boldsymbol{x})$$
$$\geqq \inf\{(f\alpha)(\boldsymbol{x}) \mid \alpha\in\boldsymbol{R}_\oplus\}=(f\boldsymbol{R}_\oplus)(\boldsymbol{x}).$$

よって，(2)は，$f\boldsymbol{R}_\oplus=(f\boldsymbol{R}_\oplus)^{\mathrm{a}}$ を意味する． ‖

系　閉凸集合 $C\subset\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{0}\in C$, 上のミンコフスキー関数 $\mu(\cdot\mid C):C\to\boldsymbol{R}$,

$$\mu(\boldsymbol{x}\mid C):=\inf\{\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{R}_\oplus,\ \boldsymbol{x}\in\alpha C\}<1,$$

に対して，次の関係(1)(2)が成立する．

(1)　$\mu(\cdot\mid C)$ は閉凸実関数である．したがって，

$$\mu(\cdot\mid C)=\mu^{\mathrm{a}}(\cdot\mid C).$$

(2)
$$\begin{cases}\forall\theta\in\boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{S}(\mu(\cdot\mid C),\theta):=\{\boldsymbol{x}\mid \mu(\boldsymbol{x}\mid C)\leqq\theta\}=\theta C.\\ \{\boldsymbol{x}\mid \mu(\boldsymbol{x}\mid C)=0\}=C^{\mathrm{R}}.\end{cases}$$

証明　文献〔5〕の注意3により，

$$f(\boldsymbol{x}):=\delta(\boldsymbol{x}\mid C)+1,$$

に対して，

$$(f\boldsymbol{R}_\oplus)(\boldsymbol{x})=\mu(\boldsymbol{x}\mid C),$$

であるから，定理10により，直ちに(1)を得る．次に，$\boldsymbol{0}\in C$ であるから，任意所与の $\alpha_1,\alpha_2\in\boldsymbol{R}_+$, $\alpha_1<\alpha_2$ に対して，$\alpha_1 C\subset\alpha_2 C$ であることと，C が閉であることを考えると，任意所与の $\theta\in\boldsymbol{R}_+$ に対して，

$$\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}\mid\mu(\boldsymbol{x}\mid C)\leqq\theta\}$$
$$\Longleftrightarrow \mu(\boldsymbol{x}\mid C):=\inf\{\alpha\mid\alpha\in\boldsymbol{R}_\oplus,\ \boldsymbol{x}\in\alpha C\}\leqq\theta$$
$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{x}\in\theta C.$$

最後に，文献〔3〕の定理4と $\boldsymbol{0}\in C$ により，

$$C^{\mathrm{R}}=\{x \mid R_{\oplus}x\subset C\},$$

であるから,

$$x\in C^{\mathrm{R}} \Leftrightarrow R_{\oplus}x\subset C$$

$\Leftrightarrow {}^{\forall}\beta\in R_{+} : \beta x\in C$, すなわち, $x\in\beta^{-1}C$

$$\Leftrightarrow \inf\{\alpha \mid \alpha\in R_{\oplus},\ x\in\alpha C\}=\mu(x \mid C)=0$$

$$\Leftrightarrow x\in\{x \mid \mu(x \mid C)=0\}. \quad \|$$

定理11　k 個の閉真凸拡張関数 $f_i : R^n\to R\cup\{\infty\}$, $i=1,\cdots,k$ に対して, $f_1^{\mathrm{R}}=\cdots=f_k^{\mathrm{R}}$ ならば, 次の関係(1)(2)が成立する.

(1)　$f_i\mathcal{C}\bigcup_{i=1}^{k}$ は閉真凸である.

(2)　$(f_i\mathcal{C}\bigcup_{i=1}^{k})^{\mathrm{R}}=f_1^{\mathrm{R}}=\cdots=f_k^{\mathrm{R}}$.

証明　$f\mathcal{C}\cup := f_i\mathcal{C}\bigcup_{i=1}^{k}$ とおく. (1)の証明. 文献〔5〕の定理7により, $f\mathcal{C}\cup$ は凸であるが, f_i は真凸であることから, $(f\mathcal{C}\cup)(x)>-\infty$, $\mathrm{dom}(f\mathcal{C}\cup)\neq\emptyset$, である. よって, あとは, $f\mathcal{C}\cup$ が閉であることを示せばよい.

$$\mathrm{epi}\,(f\mathcal{C}\cup)=\mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{epi}\,f_i),$$

であるが, 文献〔3〕の定理8′系1′により, $\mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{epi}\,f_i)$ は非空・閉凸であるから,

$$\mathrm{epi}\,(f\mathcal{C}\cup)=[\mathrm{epi}\,(f\mathcal{C}\cup)]^{\mathrm{a}}=\mathrm{epi}\,(f\mathcal{C}\cup)^{\mathrm{a}}.$$

すなわち, $f\mathcal{C}\cup$ は閉である. (2)の証明. 文献〔3〕の定理8′系1′により,

$$\begin{aligned}\mathrm{epi}\,(f\mathcal{C}\cup)^{\mathrm{R}}&=[\mathrm{epi}\,(f\mathcal{C}\cup)]^{\mathrm{R}}=[\mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{epi}\,f_i)]^{\mathrm{R}}\\&=(\mathrm{epi}\,f_1)^{\mathrm{R}}=\cdots=(\mathrm{epi}\,f_k)^{\mathrm{R}}\\&=\mathrm{epi}\,f_1^{\mathrm{R}}=\cdots=\mathrm{epi}\,f_k^{\mathrm{R}}.\end{aligned}$$

よって, (2)を得る.　$\|$

(関西学院大学経済学部教授)

参考文献

〔1〕 福尾洋一「アフィン集合」『経済学論究（関西学院大学）』**33**（3）（1979），pp. 97－122.
〔2〕 ―――「凸集合」『同上』**34**（1）（1980），pp. 29－52.
〔3〕 ―――「凸集合の特性錐・直系空間」『同上』**34**（4）（1981），pp. 19－42.
〔4〕 ―――「凸拡張関数」『同上』**35**（4）（1982），pp. 53－73.
〔5〕 ―――「凸拡張関数の生成と凸集合の部分加法」『同上』**36**（2）（1982），pp. 29－46.
〔6〕 ―――「閉凸拡張関数」『同上』**38**（3）（1984），pp. 113－136.
〔7〕 Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
〔8〕 Stoer, J. - Witzgall, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer - Verlag, Berlin, 1970.