固有ベクトルによる回帰係数の推定

井　上　勝　雄

§0

計量経済学的な実証分析において，一つの構造方程式の計測を行うとき，いくつかの説明変数の間に多重共線性が存在すると最小二乗推定が不安定になることが多い．このとき最小二乗推定量を用いないで，構造方程式の計測を行う一つの方法は，主成分回帰推定量を採用することである[1]．この主成分回帰推定量は，平均二乗誤差基準に照らして，最小二乗推定量より好ましい．また，その他の統計学的性質に関する考察や，さらに，構造方程式の計測作業の中でこれを採用することの可否を問う仮説検定方式も明らかにされている[2]．

さて，多重共線性は説明変数間に生じる問題であるが，一つの構造方程式の計測結果に与える影響こそが，実証分析の際に問題になるのである．そして，説明変数間の多重共線性が方程式の計測に与える影響は，説明変数間のデータ構造だけでなく，被説明変数をも含めたデータ全体の構造に焦点を当てなければならない．たとえば，一つの構造方程式の計測結果と，同様の構造方程式に対して標本数を１，２個増加させて行った計測結果とにおいて，係数推定値に大きな違いがでてくることは，しばしば経験されるところである．しかし，このことは説明変数間の多重共線性についての考察だけでなく，各々の説明変数と被説明変数との関係をも含めた考察をしなければならないだろう．

主成分回帰推定は一つの多重共線性に対する有効な方法である．しかし，主

1)　参考文献[３]，[６]を参照.
2)　参考文献[４]を参照.

成分回帰推定の原理は，説明変数間だけの主成分を抽出し，これらに被説明変数を回帰させることであった．他方，上述のように，説明変数間だけのデータ構造だけでなく，被説明変数をも含めたデータ構造全体に焦点を当てることも重要であろう[1)].

本稿においては，説明変数と被説明変数とを含めた，変数全体の主成分と，一つの構造方程式モデルの回帰分析との関係を考察する．

§1

1.1 最初にわれわれが考察する単一構造方程式モデルの定式化をしておこう．モデルは p 個の説明変数 X によって被説明変数 y を説明するもので，標本数は T 個あるとする．つまり，

$$(1.1) \quad y = X\beta + u, \quad u \sim N(0, \ \sigma^2 I_T)$$

で表現できる標準的な回帰モデルである．(1.1) において，y は $T\times 1$ の被説明変数の標本ベクトル，X は $T\times p$ の説明変数の標本行列であり，β は $p\times 1$ の推定すべき回帰係数ベクトル，u は $T\times 1$ の攪乱項ベクトルである．また，確率変数ベクトル u は期待値が 0 で，互いに無相関であり，分散は一定 σ^2 とする．

さらに，以下の考察のため，被説明変数，説明変数ともに各変数は基準化されているとする．つまり，被説明変数 y と説明変数 X がそれぞれ原データの平均からの偏差を標本標準偏差で除した変量であるとする．したがって，それらの積和は，原データの相関係数になる．このとき，基準化された変量で推定された回帰係数に，原データの標準偏差の比によって調整をすれば，原データに対する回帰係数が得られる[2)].

いま，被説明変数ベクトルと説明変数行列を並べた $T\times(p+1)$ 行列 A を，

1) 参考文献[9]を参照.
2) 参考文献[5]を参照.

(1.2)　$A = [y\ X]$

とする．一般に，行列 A に対して，

(1.3)　$A'AQ = Q\Pi$

となる Q が存在する．ここで Q は

(1.4)　$Q'Q = QQ' = I$

を満たす．また，Π は対角行列である．このとき，(1.3)，(1.4) より，

(1.5)　$Q'A'AQ = \Pi$

は容易に導ける．

上に述べた行列 Q の各列は行列 $A'A$ の固有ベクトルを表わし，対角行列 Π の要素は，それら固有ベクトルに対応する固有値である．周知のように，$A'A$ の固有ベクトル，つまり Q の各列は $A = [y\ X]$ の主成分に対応する係数を意味する．換言すると，AQ が被説明変数と説明変数とを含めた変数全体 A の $(p+1)$ 個の主成分を表わしている[1]．

1.2　以上の行列 A，Q を用いて，構造方程式モデルを定式化してみよう．

まず，構造方程式モデル，あるいは回帰モデル (1.1) を書き変えると，

(1.6)　$y - X\beta = A\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix} = u$

と表現することができる．

モデルを推定するということは，(1.6) を参考にすれば，推定すべき係数ベクトルを

(1.7)　$\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix}$

1)　主成分の意味，あるいはその分析方法については，参考文献[1]，[2]，[4]，[6]を参照．

とし，また，推定残差を，

$$(1.8)\quad \hat{u}=y-X\hat{\beta}=A\begin{bmatrix}1\\-\hat{\beta}\end{bmatrix}$$

と定義して，何らかの基準から $\hat{\beta}$，$\hat{u}$ を決定することである．

いま，以下の考察のために，推定すべき係数ベクトル（1.7）を Q の一次結合で表現すると，つまり，

$$(1.9)\quad \begin{bmatrix}1\\-\hat{\beta}\end{bmatrix}=Qa$$

とすると，推定残差は，

$$(1.10)\quad \hat{u}=AQa$$

となる．被説明変数および説明変数のデータ $A=[y\ X]$ が与えられたもとでは，Q は既知であるから，回帰モデル（1.1）あるいは（1.6）を推定するということは，上の式（1.9）あるいは（1.10）における係数 a を求めることである．

1.3　さて，構造方程式モデル，あるいは回帰モデル（1.6）にたいして，周知の最小二乗推定法は，

$$(1.11)\quad \hat{u}'\hat{u}$$

が最小になるよう（1.10）における Qa を，あるいは単に a を求めることに他ならない．

以下で，β の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ を実際に求めておこう．

求める最小二乗推定量に対応する a は（1.9）より明らかなように，ベクトル Qa の第1要素が1になるよう決定されなければならない．したがって，Q の第1行を $q_{1\cdot}'$ とすると，a は，

(1.12)　$q_{1\cdot}'a=1$

を満たさなければならない．これより，

(1.13)　$f=\hat{u}'\hat{u}-2\psi(q_{1\cdot}'a-1)$

を最小にする a が最小二乗推定に対応する．ここで，ψ はスカラーのラグランジェ未定乗数である．他方，(1.10)，(1.5) より，

(1.14)　$\hat{u}'\hat{u}=a'Q'A'AQa=a'\Pi a$

が得られるから，結局，

(1.15)　$f=a'\Pi a-2\psi(q_{1\cdot}'a-1)$

を最小にする数学的問題を解くことに帰着する．

1.4　上の (1.15) に与えられた最小問題の必要条件は，

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2a'\Pi-2\psi q_{1\cdot}'=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi}=q_{1\cdot}'a-1=0$$

である．これらの必要条件より，ただちに，

(1.16)　$a'\Pi=\psi q_{1\cdot}'$

(1.17)　$q_{1\cdot}'a=1$

が得られる．(1.16) から，

$$a'=\psi q_{1\cdot}'\Pi^{-1}$$

が導かれ，すなわち，

(1.18) $a=\psi\Pi^{-1}q_{1\cdot}$

が得られる．また，(1.17)，(1.18) より，

$$\psi q_{1\cdot}'\Pi^{-1}q_{1\cdot}=1$$

が成立する．さらに，これと，(1.16) (1.17) より，

(1.19) $\psi=\dfrac{1}{q_{1\cdot}'\Pi^{-1}q_{1\cdot}}=a'\Pi a$

が導ける．そして，(1.18)，(1.19) から，求めるべき係数 a は，

(1.20) $a=\dfrac{\Pi^{-1}q_{1\cdot}}{q_{1\cdot}'\Pi^{-1}q_{1\cdot}}$

である．したがって，β の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ は，(1.9)，(1.20) より

(1.21) $\begin{bmatrix}1\\-\hat{\beta}\end{bmatrix}=Q\dfrac{\Pi^{-1}q_{1\cdot}}{q_{1\cdot}'\Pi^{-1}q_{1\cdot}}$

であることが分かる．したがって，モデル (1.1) における個々の説明変数にかかる回帰係数は，

(1.22) $-\hat{\beta}_{i-1}=\dfrac{q_{i\cdot}'\Pi^{-1}q_{1\cdot}}{q_{1\cdot}'\Pi^{-1}q_{1\cdot}}\ (i=2,3,\cdots,p+1)$

である．(1.22) において，$q_{i\cdot}'$ は Q の第 i 行を表わしている．

§2

2.1 次に，行列 A および，その固有ベクトル Q との間についての関係を用いて，主成分と回帰係数との関係を考察する．

以下では，$A'A$ の第 i 固有ベクトル，つまり，Q の第 i 列を $q_{\cdot i}$ とすると，その定義（1.3）より，

$$(2.1)\quad A'Aq_{\cdot i}=\pi_i q_{\cdot i}$$

が明らかである．

さて，被説明変数と説明変数とを含めた変数全体 A の第 i 主成分は，

$$(2.2)\quad \mathrm{A}q_{\cdot i}=q_{1i}y+Xq_{*i}=[q_{1i}y_t+\Sigma_j X_{tj}q_{ji}]$$

である．ここで，$q_{\cdot i}$ の第 1 要素を q_{1i} とし，$(p+1)$ 次元ベクトル $q_{\cdot i}$ の第 1 要素以外からなる p 次部分ベクトルを q_{*i} としている．また，第 i 主成分の第 t 要素が $q_{1i}y_t+\Sigma_j X_{tj}q_{ji}$ であることを示している．さらに，(1.4)，(1.5) からも分かるように，第 i 主成分の分散は，

$$(2.3)\quad q_{\cdot i}'A'Aq_{\cdot i}=(Aq_{\cdot i})'(Aq_{\cdot i})=\pi_i$$

である．

いま，固有値がゼロのとき，すなわち，$\pi_i=0$ の場合を考えよう．

このとき説明変数と被説明変数との間に完全な一次結合の関係がある．すなわち，(2.2)，(2.3) より，

$$(2.4)\quad q_{1i}y+Xq_{*i}=0$$

である．

$\pi_i=0$ の場合であって，さらに $q_{1i}\neq 0$ のとき，完全な予測式が存在することになる．つまり，(2.4) から直ちに，

$$(2.5)\quad y=-\frac{1}{q_{1i}}\cdot Xq_{*i}$$

が得られる．これは，被説明変数 y を，説明変数 X によって完全に，誤差な

く予測できるケースである．

他方，$\pi_i=0$ であって，$q_{1i}=0$ のとき，説明変数間に完全な多重共線性が存在する．つまり，(2.4) から直ちに，

$$Xq_{*i}=0$$

が得られ，これは，説明変数間に完全な一次結合関係が成り立つことを示している．

2.2　通常は説明変数と被説明変数との間に完全な一次結合の関係がある，つまり $\pi_i=0$ となることは，ほとんどないと考えてよい．むしろ実証分析の実際では，固有値がゼロに十分近い値となるものが存在するということであろう．しかし，固有値がゼロとならない実際的な場合であっても，(2.5) の類推より，$q_{1i}\neq 0$ として，

$$(2.6)\quad \hat{y}^{(i)}=-\frac{1}{q_{1i}}\cdot Xq_{*i}$$

を被説明変数 y の第 i 予測式と定義することができる.[1]

また，この予測式に対応して，推定すべき回帰係数 β の第 i 固有ベクトルによる推定量 $\hat{\beta}^{(i)}$ を，

$$(2.7)\quad \hat{\beta}^{(i)}=-\frac{1}{q_{1i}}\cdot q_{*i}$$

と定義できる．したがって，y の予測式（予測量），および，それに対応して定義できる固有ベクトルによる β の推定量は，それぞれ $(p+1)$ 個存在する．

さて，上で考えた $(p+1)$ 個の y の予測式 $\hat{y}^{(i)}$ あるいは，β の推定量 $\hat{\beta}^{(i)}$ のそれぞれを比較するため，第 i 予測式の残差 $y-\hat{y}^{(i)}$，あるいは，第 i 推定量 $\hat{\beta}^{(i)}$ による被説明変数 y の推定誤差を評価しておこう．

1)　参考文献［9］を参照．

上述の (2.2) と (2.6), (2.7) より,

$$(2.8)\quad y-\hat{y}^{(i)}=y-X\hat{\beta}^{(i)}$$
$$=y+\frac{1}{q_{1i}}\cdot Xq_{*i}=\frac{1}{q_{1i}}(q_{1i}y+Xq_{*i})=\frac{1}{q_{1i}}Aq_{\cdot i}$$

が導出できる. これより, 第 i 予測式の残差平方和は, (2.3) を参考にして,

$$(2.9)\quad (y-\hat{y}^{(i)})'(y-\hat{y}^{(i)})=\frac{1}{q_{1i}^2}q_{\cdot i}'A'Aq_{\cdot i}=\frac{1}{q_{1i}^2}\pi_i$$

である.

2.3 さて, 前節では, モデルの回帰係数 β の推定量として, $(p+1)$ 個の固有ベクトルによる推定量 $\hat{\beta}^{(i)}$ を考えたが, これらの推定量の一次結合, つまり,

$$(2.10)\quad \hat{\beta}=\Sigma\delta_i\hat{\beta}^{(i)}$$
$$(2.11)\quad \Sigma\delta_i=1$$

が, 一つ一つの推定量 $\hat{\beta}^{(i)}$ よりも, 望ましいと考えられる. また, このことと同等であるが, 通常, 一つ一つの予測式 $\hat{y}^{(i)}$ は, それ自身だけでは y の最良の予測式にはならないであろう. そこで $(p+1)$ 個の予測式の一次結合を採用するということが自然な考え方といえる.

ここに, $(p+1)$ 個の予測式の一次結合 $\hat{y}^{(c)}$ は,

$$(2.12)\quad \hat{y}^{(c)}=X\hat{\beta}=X\Sigma\delta_i\hat{\beta}^{(i)}=\Sigma\delta_iX\hat{\beta}^{(i)}=\Sigma\delta_i\hat{y}^{(i)}$$

と表現できる.

そして, 結合予測式 $\hat{y}^{(c)}$ の残差は,

$$(2.13)\quad y-\hat{y}^{(c)}=y-\Sigma\delta_i\hat{y}^{(i)}=\Sigma\delta_i(y-\hat{y}^{(i)})=\Sigma\frac{\delta_i}{q_{1i}}Aq_{\cdot i}$$

である. いま,

$$(2.14)\quad a_i = \frac{\delta_i}{q_{1i}}$$

と書くと，結合予測式 $\hat{y}^{(c)}$ の残差は，

$$(2.15)\quad y - \hat{y}^{(c)} = \Sigma a_i A q_{\cdot i}$$

と表現できる．

ここで，Qの各列は直交していることから，つまり，$i \neq j$のとき，

$$\begin{aligned}(a_i A q_{\cdot i})'(a_j A q_{\cdot j}) &= a_i a_j q_{\cdot i}' A' A q_{\cdot j} = a_i a_j q_{\cdot i}' \pi_j q_{\cdot j} \\ &= a_i a_j \pi_j q_{\cdot i}' q_{\cdot j} = 0\end{aligned}$$

であることに注意して，結局，結合予測式の残差平和方和は，

$$\begin{aligned}(2.16)\quad (y - \hat{y}^{(c)})'(y - \hat{y}^{(c)}) \\ &= (\Sigma a_i A q_{\cdot i})'(\Sigma a_i A q_{\cdot j}) \\ &= \Sigma a_i q_{\cdot i}' A' \cdot \Sigma a_i A q_{\cdot j} \\ &= \Sigma a_i^2 q_{\cdot i}' A' A q_{\cdot i} \\ &= \Sigma \frac{\delta_i^2}{q_{1i}^2} q_{\cdot i}' A' A q_{\cdot i} \\ &= \Sigma \delta_i^2 (y - \hat{y}^{(i)})'(y - \hat{y}^{(i)}) \\ &= \Sigma a_i^2 \pi_i = \mathrm{a}' \Pi a\end{aligned}$$

になることが導ける．

他方，δ_iに関する制約条件については，これをa_iに関する制約条件に変換することができる．つまり，(2.11)，(2.14) を参考に，

$$(2.17)\quad a' q_{1\cdot} = q_{1\cdot}' a = \Sigma a_i q_{1i} = \Sigma \frac{\delta_i}{q_{1i}} q_{1i} = \Sigma \delta_i = 1$$

が満たされなければならない．

以上のことから，残差平方和（2.16）が最小になる結合予測式を求めることは，

$$f=a'\Pi a-2\psi(q_{1\cdot}'a-1)$$

を最小にする数学的問題になる．

これは§1における1.3の議論と全く同等になる．

つまり，回帰モデルの係数βの推定量として，(2.7) に与えられたように，$A'A$の第i固有ベクトルによる推定量$\hat{\beta}^{(i)}$を採用し得る．換言すると，変数全体Aの主成分を導出するときの係数Qから，モデルの係数βの推定量$\hat{\beta}^{(i)}$を導出できるのである．そして，個々の推定量$\hat{\beta}^{(i)}$の一次結合の一つが周知の最小二乗推定量なのである．さらに，一次結合の際，$\hat{\beta}^{(i)}$にかかる係数δ_iは，(1.20)，(2.14) より，

$$(2.18)\qquad \delta_i=\frac{\dfrac{q_{1i}^2}{\pi_i}}{\sum_k \dfrac{q_{1k}^2}{\pi_k}}$$

となる．このδ_iは最小二乗推定量への寄与率でもある．

§3

3.1 われわれは，§2で考察した$A'A$の固有ベクトルによる推定量$\hat{\beta}^{(i)}$と，主成分回帰推定量との関係をみなければならないだろう．それに関連する諸考察をこの節において行う．

いま，説明変数行列Xの積和行列$X'X$について，もし説明変数間に完全な多重共線性がなければ，

$$(3.1)\qquad X'XP=P\Lambda$$

となる正則行列Pが存在し，そして，

(3.2) $P'P = PP' = I$

とできる．また，Λ は説明変数の積和行列 $X'X$ の固有値を要素にする対角行列とできる．

さて，上述の行列 P を用いて，われわれの構造方程式モデル，あるいは回帰モデル（1.1）を，

(3.3) $y = XP \cdot P'\beta + u = Z\alpha + u$

と変換し得る．ここで，

(3.4) $\alpha = P'\beta$

(3.5) $Z = XP$

である．(3.5) における変数行列 Z の各列は説明変数 X の p 個の主成分となっている．そして，

(3.6) $Z'Z = P'X'XP = \Lambda$

であることを利用して，モデル（3.3）における α の最小二乗推定量は，

(3.6) $\hat{\alpha} = (Z'Z)^{-1}Z'y = \Lambda^{-1}Z'y$

となり，その統計学的性質として，

(3.7) $E(\hat{\alpha}) = \alpha$

(3.8) $V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \cdot \Lambda^{-1}$

が容易に導出できる．α の最小二乗推定量は不偏推定量であるが，その分散は説明変数の相関係数行列 $X'X$ の固有値の大きさに反比例する．したがって，その固有値の中に0に近いものがあるときは，対応する最小二乗推定量の分散は非常に大きくなる．これがモデルの計測を不安定にさせる原因である．

他方，モデル（1.1）の回帰係数βの最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ は，母パラメタα，β間の関係（3.4）と同様に，

$$(3.9)\quad \hat{\beta}=P\hat{\alpha}$$

となる．したがって，説明変数の相関係数行列 $X'X$ の 0 に近い固有値に対応する固有ベクトルの方向には，回帰係数βの最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ の分散が大きく，したがって，その推定精度が落ちるのである.[1)]

以下では，説明変数の相関係数行列 $X'X$ の固有値を，

$$(3.10)\quad \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_{p-1} \leqq \lambda_p$$

とし，たとえばλ_1が 0 に近い固有値であるとしよう.[2)] このとき，主成分回帰推定量 $\tilde{\beta}$ は，

$$(3.11)\quad \tilde{\beta}=P[I-J_1]\,\hat{\alpha}$$

と定義される．ここにJ_1は 1 － 1 要素だけが 1 であり，その他はすべて 0 であるような行列である．つまり，モデル（3.3）の係数αの推定量は分散の非常に大きくなる$\hat{\alpha}_1$については最小二乗推定値を採用しないで，それを 0 とし，他の係数については最小二乗推定値を採用するのである．主成分回帰推定量 $\tilde{\beta}$ はこのことを反映している．換言すれば，主成分回帰推定量は，説明変数の主成分のうち寄与率の極めて低いものを無視して，寄与率の高い主成分にだけ，被説明変数を回帰させるのである．

3.2　さて，$(p+1)$ 次正方行列 $\widetilde{P}$ を

$$(3.12)\quad \widetilde{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}$$

1）参考文献[8]，[3]を参照.

2）固有値の大小関係の定式化が，文献[3]，[4]，[5]と異なっていることに注意．さらに，本稿 p. 14の脚注も参照されたい.

とすると,

$$(3.13)\quad \widetilde{P}'\widetilde{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P'P\end{bmatrix}=\widetilde{P}\widetilde{P}'=I$$

である．また，§1の（1.2）で定義したように，$A=[y\ X]$ であるから,

$$(3.14)\quad A'A=\begin{bmatrix}y'y & y'X\\ X'y & X'X\end{bmatrix}$$

であるが，これを参考に，上の行列 $\widetilde{P}$ を用いて，(1.5）を次のように表現できる.

$$\begin{aligned}(3.15)\quad Q'A'AQ &= Q'\widetilde{P}\cdot\widetilde{P}'A'A\widetilde{P}\cdot\widetilde{P}'Q\\ &=(\widetilde{P}'Q)'\cdot\widetilde{P}'A'A\widetilde{P}\cdot\widetilde{P}'Q=\Pi\end{aligned}$$

上式において,

$$(3.16)\quad \widetilde{P}'A'A\widetilde{P}=\begin{bmatrix}y'y & y'XP\\ P'X'y & P'X'XP\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & y'XP\\ P'X'y & \Lambda\end{bmatrix}$$

である．ここで，変数の基準化を前提にしているので,

$$(3.17)\quad y'y=1$$

であること，また，(3.6）に示した

$$P'X'XP=\Lambda$$

を利用している.

つぎに,

$$(3.18)\quad S=\widetilde{P}'Q$$

とすると，

$$(3.19)\quad S'S = Q'\widetilde{P}\cdot\widetilde{P}'Q = Q'Q = I$$

である．さらに，p 次ベクトル r を，

$$(3.20)\quad r = P'X'y$$

とすると，

$$(3.21)\quad \Lambda^{-1/2}P'X'y = \Lambda^{-1/2}r$$

は，説明変数 X の主成分 $Z = XP$ と被説明変数 y の相関係数を要素にもつベクトルとなる．

上に定義した S，r を用いて，(3.15) は結局，

$$(3.22)\quad Q'A'AQ = S'\widetilde{P}'A'A\widetilde{P}S = S'\begin{bmatrix} 1 & r' \\ r & \Lambda \end{bmatrix}S = \Pi$$

と書き換えることができる．これと同値であるが，

$$\begin{bmatrix} 1 & r' \\ r & \Lambda \end{bmatrix}S = S\Pi$$

と表現することもできる．

3.3 上述のことから，以下の展開が可能である．

被説明変数と説明変数の変数全体 $A = [y\ X]$ の積和行列 $A'A$ について，§1 に述べたように，その固有値が π_i であることから，その固有方程式は，

$$(3.23)\quad |A'A - \pi I| = 0$$

と書ける．これより，(3.12) に定義した $\widetilde{P}$ を用いて，

$$|\widetilde{P}'|\cdot|A'A - \pi I|\cdot|\widetilde{P}| = 0$$

が得らる．すなわち，

$$(3.24)\quad |\widetilde{P}'A'A\widetilde{P}-\pi I|=0$$

が導ける．さらに，(3.16)，(3.20) を利用して，

$$(3.25)\quad \left|\begin{bmatrix}1 & r' \\ r & \Lambda\end{bmatrix}-\pi I\right|=\begin{vmatrix}1-\pi & r' \\ r & \Lambda-\pi I\end{vmatrix}=0$$

が得られる．

したがって，$A'A$ の固有方程式は，

$$(3.26)\quad f(\pi)=(\pi-1)\cdot\prod_{i=1}^{p}(\pi-\lambda_i)-\sum_{i=1}^{p}r_i^2\prod_{k\neq i}(\pi-\lambda_k)=0$$

である．$f(\pi)$ を具体的に表現すると，

$$\begin{aligned}f(\pi)=&(\pi-1)(\pi-\lambda_1)(\pi-\lambda_2)\cdots\cdots(\pi-\lambda_{p-1})(\pi-\lambda_p)\\&-r_1^2(\pi-\lambda_2)(\pi-\lambda_3)\cdots\cdots(\pi-\lambda_{p-1})(\pi-\lambda_p)\\&-r_2^2(\pi-\lambda_1)(\pi-\lambda_3)\cdots\cdots(\pi-\lambda_{p-1})(\pi-\lambda_p)\\&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\&-r_p^2(\pi-\lambda_1)(\pi-\lambda_2)\cdots\cdots(\pi-\lambda_{p-2})(\pi-\lambda_{p-1})\end{aligned}$$

である．いま，$f(\pi)=0$ の $(p+1)$ 個の固有根について，次の定理が成立する．

定　理：説明変数の積和行列 $X'X$ の p 個の固有値を，(3.10) のように，

$$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\cdots\leqq\lambda_{p-1}\leqq\lambda_p$$

とし，被説明変数，説明変数の変数全体の積和行列 $A'A$ の固有値を，

$$(3.27)\quad \pi_1\leqq\pi_2\leqq\cdots\leqq\pi_p\leqq\pi_{p+1}$$

であるとしても，一般性を失うことはない．このとき，λ_i，π_i の間に，

(3.28) $\pi_1 \leqq \lambda_1 \leqq \pi_2 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \pi_p \leqq \lambda_p \leqq \pi_{p+1}$

が成立する.

証明：例えば$f(\pi)$にλ_1を代入すると,

$$f(\lambda_1) = -r_1^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots\cdots(\lambda_1-\lambda_p)$$

が得られるが, λ_iの大小関係から判断して, $f(\lambda_1)$の符号は

$$(-1)\cdot(-1)^{p-1}=(-1)^p$$

と同符号である. また$f(\lambda_2)$の符合は, $(-1)\cdot(-1)^{p-2}=(-1)^{p-1}$と同符号であることがわかる. これらのことから, $f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)$は, $(-1)^{2p-1}=-1$と同符号であることが分かる. ゆえに,

$$f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)<0$$

が導ける. このことと, $f(\pi)$は連続関数であることから, $f(\pi)=0$は, λ_1とλ_2との間に必ず根を持つ.

一般的に, $f(\lambda_i)\cdot f(\lambda_{i+1})$は$(-1)^{2(p-i)-1}$と同符号になる. つまり,

$$f(\lambda_i)\cdot f(\lambda_{i+1})<0$$

が導け, したがって, $f(\pi)=0$は, λ_iとλ_{i+1}との間に必ず固有根π_iが存在するといえる.

一方, $f(\pi)$はπに関する$(p+1)$次式で最高次の係数は$+1$であるから,

$$\lim_{\pi\to\infty} f(\pi)=\infty$$

であり, $f(\pi)$の次数を問わず,

$$f(\lambda_p) = -r_p^2(\lambda_p-\lambda_1)(\lambda_p-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda_p-\lambda_{p-1})<0$$

が導ける．したがって，$\lambda_p \leqq \pi_{p+1}$ を満たす根が存在する．

他方，上述のように $f(\lambda_1)$ の符合は，$(-1)^p$ と同符合であるから，p が奇数のとき，$f(\lambda_1)<0$ となるが，$f(\pi)$ は偶数次式となり，したがって，

$$\lim_{\pi\to-\infty} f(\pi)=\infty$$

である．故に $\pi_1 \leqq \lambda_1$ を満たす根が存在しなければならない．p が偶数のとき，$f(\lambda_1)>0$ となるが，$f(\pi)$ は奇数次式となり，

$$\lim_{\pi\to-\infty} f(\pi)=-\infty$$

である．この場合もやはり，$\pi_1 \leqq \lambda_1$ を満たす根が存在するといえる．

さて，$f(\pi)=0$ は $(p+1)$ 次の対称行列の固有方程式であるから，高々 $(p+1)$ 個の実根をもつ．したがって，以上に示したことから，(3.28) が成立する．

3.4 上述の定理から次のことが分かる．モデルの説明変数間に多重共線性が存在するため，説明変数行列 $X'X$ の最小固有値 λ_1 がゼロに近いとすると，被説明変数と説明変数を含む変数全体の積和行列 $A'A$ の最小固有値 π_1 もゼロに近いものとなる．このことは必ず結論できることであるけれども，さらに，$A'A$ の第２固有値 π_2 もゼロに近いものとなる場合も考えられる．つまり，π_2 は λ_1 より大きいけれども充分それに近いときである．

しかし，積和行列 $A'A$ の最小固有値 π_1，あるいは第２固有値 π_2 がゼロに近いとしても，その固有値に対応する固有ベクトルの，被説明変数にかかる要素がゼロに近いかどうかは一義的ではない．一般的には§２の考察の通りであるが，次の節で様々なケースをとり挙げることにしたい．

§4

被説明変数，および説明変数を含めた変数全体の積和行列 $A'A$ から導かれる，固有ベクトル推定量 $\hat{\beta}^{(i)}$ を§２で考察した．これと，§３の3.1で概略を与

えた，主成分回帰推定量 $\tilde{\beta}$ との関係をみるため，しかも，説明変数間の多重共線性の存在を背景において，若干の考察を前節で行ってきた．しかし，最小二乗推定量を含めて，両者の関係をより明確にするためには，固有ベクトル推定量 $\hat{\beta}^{(i)}$ の精密分布を導出する必要があろう．

この節においては，いくつかのシミュレーション実験結果によって，最小二乗推定量（OLS），主成分回帰推定量 $\tilde{\beta}$（RCR），および，固有ベクトル推定量 $\hat{\beta}^{(i)}$ とを比較してみよう．

それぞれの実験では，まづ，説明変数を乱数発生させ，モデルの真の構造を前提に，被説明変数を生成する．その生成されたデータをもとに，被説明変数，説明変数間の積和行列，およびその固有値等を算出し，各種の推定方法を適応する．それぞれの実験結果はデータと共に本稿末の表に掲げている．

ケース（i）

$X'X$ の最小固有値は $\lambda_1=0.044509$ であるから，説明変数間に多重共線性があると認められる．また，$A'A$ の第2固有値が $\pi_2=0.044518$ であり，これに対応する固有ベクトルについて $q_{12}=-0.0128$ であるから被説明変数，および説明変数の変数全体の積和行列によっても，多重共線性の存在が認められる．

また，このケースの場合，λ_1－主成分[1)]と被説明変数 y との相関が0.0034と極めて低く，相関なしとみてよいので，多重共線性を示す主成分が被説明変数に及ぼす効果がない．したがって，多重共線性がモデルの推定に悪影響を与えないとみられる．しかも，λ_3－主成分と被説明変数 y との相関が0.9124と相対的に高いので，これだけで被説明変数 y に対する説明が充分になされる．このことは，$\pi_1=0.00952$ であり，また，これに対応する固有ベクトルの第1係数が，$q_{11}\neq 0$ であることからも分かる．最小二乗推定値（OLS），主成

1）一般に，主成分分析では，最大固有値に対応する主成分を第1主成分と言う．そして，第2固有値に対応する主成分を第2主成分と言う．以下，同様の呼び方をしている．本稿では，最大固有値よりも，むしろ最小固有値の方に関心があるので，固有値の大きさについても（3.10）に示した大小関係を前提した．したがって，λ_1－主成分という呼び方は一般的ではないが，これを第1主成分と言うことはできないので，この様な表現をした．

分回帰推定値（RCR），および，固有ベクトル推定値（$\beta^{(1)}$）とは，ほぼ同様の結果を示しており，いずれもよい推定が得られている．

ケース（ii）

$X'X$ の最小固有値は $\lambda_1 = 0.02655$ であるから，説明変数間には多重共線性があると認められる．また，$A'A$ の最小固有値は $\pi_1 = 0.023218$ であり，これに対応する固有ベクトルについて $q_{11} = -0.09789$ であるから被説明変数，および説明変数の変数全体の積和行列によっても，多重共線性の存在が認められる．

他方，λ_3ー主成分と被説明変数 y との相関が0.6356であり，また λ_2ー主成分と被説明変数 y との相関が0.4610であるので，ケース（i）のように，被説明変数 y への説明力は充分ではない．しかも多重共線性の存在を示す λ_1ー主成分と被説明変数 y との相関が0.2076であるので，必ずしもこれを無視できない．事実，$A'A$ の第１固有ベクトル推定（$\beta^{(1)}$）の OLS への寄与率は0.1404であることからも OLS への λ_1ー主成分の影響は無視できないだろう．したがって，OLS 推定値より PCR 推定値の方が良い計測結果となっている．

$A'A$ の第１固有ベクトルは多重共線性の存在を示しているので，これを除外し，また，寄与率が0.0215の第４固有ベクトルによる推定をも無視して，第２，３固有ベクトルによる推定値だけの結合推定を行うと，

$$\begin{bmatrix} 0.03448 \\ 0.65077 \\ -9.973 \end{bmatrix}$$

が得られる[1]．この計測結果は，OLS推定値より良好であり，PCR 推定値と代

1） 結合推定値を算出するとき，OLS への寄与率を参考に，

$$\frac{0.6043}{0.6043+0.2337}\beta^{(2)} + \frac{0.2337}{0.6043+0.2337}\beta^{(3)}$$

とした．

替的なものとみられる.

ケース（iii）

$X'X$ の最小固有値は，$\lambda_1 = 0.01711$ であるから，説明変数間には多重共線性があるとみてよい．また，$A'A$ の固有値 $\pi_1 = 0.01695$ であり，これに対応する固有ベクトルについて $q_{11} = -0.014024$ であるから被説明変数，および説明変数の変数全体の積和行列によっても，多重共線性の存在が認められる.

他方，多重共線性を示す λ_1 ー主成分と被説明変数 y との相関が0.0870である．したがって，ケース(i)の際に述べたように，多重共線性が回帰モデルの推定に及ぼす悪い影響は無視できる程度であるといえる．しかし，ケース(iii)は，ケース(i)と異なり，λ_3 ー主成分と被説明変数 y との相関が−0.11445であり，また λ_2 主成分と被説明変数 y との相関が−0.39247であるので，ケース(i)のように被説明変数 y への説明力は，どの主成分も充分ではない．したがって，OLS, PCR 及び，固有ベクトルによる推定のいずれによっても，好ましい計測結果が得られていない.

ケース（iv）

$X'X$ の最小固有値は，$\lambda_1 = 0.02824$ であるから，説明変数間には多重共線性があるとみてよい．他方，$A'A$ の最小固有値は $\pi_1 = 0.00703$ であり，これに対応する固有ベクトルについて $q_{11} = -0.698$ である．また，第 2 固有値は $\pi_2 = 0.0342$ であって，これに対応する固有ベクトルについて $q_{12} = -0.3709$ である．これらのことから被説明変数，および説明変数の変数全体の積和行列 $A'A$ によっては，多重共線性の存在が検出できないことになる.

さて，推定値間の違いをみてみよう．説明変数間だけの積和行列 $X'X$ によって判断して，多重共線性の存在を示す λ_1 ー主成分と被説明変数 y との相関が0.08527と低いので，ケース(i)と同様，多重共線性が推定に悪影響を及ぼさないとみてよい．しかも，説明変数全体の変動を充分に反映した λ_3 ー主成分と被説明変数 y との相関が0.8930と相対的に高いので，これだけで被説明変数 y の変動を充分説明されるとみなせる．したがって，OLS, PCR あるいは，

固有ベクトルによる推定のいずれも良い計測値を得るであろう．ここで，寄与率の高い２つの固有ベクトルの結合推定を，以下に示しておこう．

$$\begin{bmatrix} 0.11216 \\ 0.18997 \\ -7.07238 \end{bmatrix}$$

表４に挙がっているOLS, PCR, および個々の固有ベクトルによる推定の計測結果は，相対的に良好であるが，多重共線性を示すλ_1－主成分を除くPCRが最も好ましい推定となっている．

ケース（v）

$X'X$の最小固有値は，$\lambda_1 = 0.04241$であるから，説明変数間には多重共線性があるとみてよい．他方，$A'A$の最小固有値は$\pi_1 = 0.02359$であり，これに対応する固有ベクトルについて$q_{11} = -0.4826$である．また，第２固有値は$\pi_2 = 0.0752$であって，これに対応する固有ベクトルについて$q_{12} = -0.6326$である．これらのことから被説明変数，および説明変数の変数全体の積和行列$A'A$によっては，多重共線性の存在が検出できないことになる．$X'X$によっては多重共線性の存在が検出でき，$A'A$によっては多重共線性が検出できないという点は，ケース(iv)と同様である．他方，多重共線性の存在を示すλ_1－主成分と被説明変数yとの相関が0.1514である．したがって，ケース(iv)と異なって，多重共線性がモデル推定に若干悪影響を与えるのではないかとみられる．

第１，および第２固有ベクトルによる結合推定は，

$$\begin{bmatrix} 0.10390 \\ 0.20206 \\ -5.8743 \end{bmatrix}$$

である．他方，表５から分かるように，第１，第２パラメタについては，

PCRが，第3パラメタについてはOLSが良い計測結果を得ている．

ケース（vi）

$X'X$の最小固有値は，$\lambda_1=0.07619$であり，他方，$A'A$の最小固有値は$\pi_1=0.03462$であり，これに対応する固有ベクトルについて$q_{11}=0.4912$である．そして，第2固有値は$\pi_2=0.1472$であるので充分ゼロに近いとはいえない．したがって，$X'X$によっては多重共線性が検出できるが，$A'A$によっては多重共線性の存在が検出できない．この点，ケース(iv)，ケース(v)と同様である．

推定結果については，説明変数全体の変動を充分に反映したλ_3－主成分と被説明変数yとの相関が0.9148と比較的高いが，多重共線性の存在を示すλ_1－主成分と被説明変数yとの相関が－0.2535であるので，ケース(iv)やケース(v)と異なって，多重共線性モデル推定に悪影響を与えるとみられる．計測結果は表6の通りである．ここでも，OLSよりPCRが相対的によい推定となっている．

ケース（vii）

説明変数間の積和行列$X'X$からは，多重共線性があるとみられるが，被説明変数，および説明変数の変数全体の積和行列$A'A$によっては，多重共線性の存在が検出できない．この点は，ケース(iv)～ケース(vi)と同様である．しかし，上述のこれらのケースとの違いは，説明変数全体の変動を充分に反映したλ_3－主成分と被説明変数yとの相関が0.0510と無視できる程度であり，相対的に低い寄与率のλ_2－主成分と被説明変数yとの相関が0.988と高いという点である．しかも，多重共線性の存在を示すλ_1－主成分と被説明変数yとの相関が－0.1196であるのでモデル推定が非常に困難な状況といえる．しかし，表7からみて，PCRの方がOLSより若干良い計測結果を得ている．

（関西学院大学経済学部教授）

参 考 文 献

〔1〕 Anderson, T. W., *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons, 1958.

〔2〕 Girshick, M. A., "Principal Components," *Journal of American Statistical Association*, Vol. 31, 1936, pp. 332—36.

〔3〕 井上勝雄　多重共線性とバイアス推定，経済学論究35巻４号，1982年１月．

〔4〕 ————，計量経済学の理論と応用，有斐閣，1983年．

〔5〕 ————，主成分回帰に関する覚書，経済学論究38巻３号，1984年10月．

〔6〕 Kendall, M. G., *A Course in Multivariate Analysis*, Charles Griffin and Co., 1957.

〔7〕 Mayer, L. S. and Willke, T. A., "On Biased Estimation in Linear Models," *Technometrics*, Vol. 15, 1973, pp. 497—508.

〔8〕 Silvey, S. D., "Multicollinearity and Imprecise Estimation," *Journal of the Royal Statistical Society*, ser. B, Vol. 32, 1969, pp. 539—52.

〔9〕 Webster J. T., Gunst R. F., and Mason R. L., "Latent Root Regression Analysis," *Technometrics*, Vol. 16, No. 4, Nov. 1974.

表1　ケース(i)シミュレーション結果

真の構造：$y = 24.0 + 0.06X_1 + 0.5X_2 - 5.4X_3 + u$,　$u \sim N(0, 3.4^2)$

標　本：	Y	X_1	X_2	X_3
1	62.234	813.986	65.596	7.623
2	109.369	1051.620	125.248	8.120
3	96.120	1031.370	93.111	7.520
4	63.038	914.932	80.311	9.699
5	57.181	642.287	50.452	7.277
6	61.413	729.950	66.606	7.068
7	24.566	562.425	32.010	8.612
8	23.868	635.920	25.177	9.402
9	60.850	799.099	71.300	9.020
10	19.335	386.644	22.242	6.617
$E(x)$：	57.7972	756.8230	63.2054	8.0957
Std. x	28.1657	198.9010	30.6251	0.9934
$A'A$：	1.000000	0.923024	0.973048	−0.069653
	0.923024	1.000000	0.933765	0.265804
	0.973048	0.933765	1.000000	0.065159
	−0.069653	0.265804	0.065159	1.000000
λ：	0.04450926	0.96579613	1.98969461	
P：	0.71209241	0.05710203	0.69975978	
	−0.68558013	0.27140015	0.67551598	
	−0.15134158	−0.96077121	0.23241001	
$y'PX$：	0.00071733	0.38371208	1.28701662	
Zyの相関	0.003400	0.390448	0.912412	
OLS：	0.068934	0.490868	−6.629407	
PCR：	0.067308	0.501029	−6.560254	
π：	0.00952029	0.04451847	1.04736061	2.89860063
Q：	−0.79458633	−0.01283451	−0.20001305	0.57311659
	0.39119171	−0.70575038	0.13732385	0.57448029
	0.42422814	0.69267635	−0.07074098	0.57898677
	−0.18876467	0.14815922	0.96753948	0.07927226

固有ベクトル回帰の結果

	X_1の係数	X_2の係数	X_3の係数	誤差の2乗和	寄与率
$\hat{\beta}^{(1)}$	0.069716	0.491022	−6.735476	0.015079	0.997665
$\hat{\beta}^{(2)}$	−7.786729	49.635636	327.293975	270.259837	0.000056
$\hat{\beta}^{(3)}$	0.097223	−0.325278	137.151017	26.180600	0.000575
$\hat{\beta}^{(4)}$	−0.141943	−0.929112	−3.921633	8.824750	0.001705

表2　ケース（ii）シミュレーション結果

真の構造：$y = 34.0 + 0.06\,X_1 + 0.5\,X_2 - 5.4\,X_3 + u,\ \ u \sim N(0,\ 21.5^2)$

標　本：	Y	X_1	X_2	X_3
1	69.997	820.595	88.496	7.049
2	83.600	762.136	66.891	7.416
3	118.096	788.186	73.895	6.542
4	81.680	797.722	68.530	7.948
5	114.578	821.037	90.811	6.860
6	92.191	793.831	85.416	7.819
7	121.357	1329.490	139.154	9.436
8	136.912	1147.060	128.089	7.947
9	111.312	944.097	88.031	8.231
10	72.758	541.025	51.488	7.154
$E(x)$：	100.2480	874.5170	88.0801	7.6401
Std. x	21.8949	208.7090	25.6815	0.7902
$A'A$：	1.000000	0.717887	0.722220	0.304923
	0.717886	1.000000	0.960730	0.763547
	0.722220	0.960730	1.000000	0.656326
	0.304923	0.763551	0.656326	1.000000
λ：	0.02655926	0.37943216	2.59400858	
P：	0.75528480	0.24171946	0.60919337	
	−0.63435749	0.50324008	0.58680490	
	−0.16472836	−0.82965121	0.53342614	
$y'PX$：	0.03383336	0.28399703	1.02378771	
Zy の相関	0.207605	0.461049	0.635659	
OLS：	0.145138	−0.170370	−17.186978	
PCR：	0.044203	0.518575	−11.372627	
π：	0.02321831	0.17653947	0.69995166	3.10029056
Q：	−0.09789140	−0.55993485	−0.69341121	0.44279920
	0.79137764	0.23850383	0.05350359	0.56033448
	−0.56672867	0.61370085	−0.06715041	0.54560123
	−0.20726149	−0.50295144	0.71540833	0.43848996

固有ベクトル回帰の結果

	X_1 の係数	X_2 の係数	X_3 の係数	誤差の２乗和	寄与率
$\hat{\beta}^{(1)}$	0.848089	−4.935742	−58.664807	2.422934	0.140436
$\hat{\beta}^{(2)}$	0.044685	0.934418	−24.888122	0.563076	0.604303
$\hat{\beta}^{(3)}$	0.008095	−0.082562	28.586877	1.455748	0.233741
$\hat{\beta}^{(4)}$	−0.132753	−1.050486	−27.438249	15.812070	0.021520

表3　ケース(iii)シミュレーション結果

真の構造：$y = 25.0 + 0.10 X_1 + 0.5 X_2 - 0.3 X_3 + u$,　$u \sim N(0, 20.0^2)$

標　本：	Y	X_1	X_2	X_3
1	66.101	66.887	52.320	38.044
2	27.532	71.365	64.206	45.683
3	55.331	102.133	89.430	63.270
4	88.283	63.313	66.678	54.603
5	60.736	82.263	65.713	43.023
6	31.933	105.288	80.998	47.609
7	52.869	79.662	65.532	43.718
8	60.302	118.306	86.311	50.756
9	69.269	87.653	70.808	40.395
10	38.550	88.156	67.520	39.429
$E(x)$：	55.0905	86.5026	70.9516	46.6531
Std. x	17.4851	16.8201	10.7600	7.3843
$A'A$：	1.000000	−0.290316	−0.144608	0.167199
	−0.290315	1.000000	0.876393	0.341119
	−0.144606	0.876395	1.000000	0.721477
	0.167199	0.341119	0.721472	1.000000
λ：	0.01711312	0.66657819	2.31630869	
P：	0.54623507	0.61810774	0.56530529	
	−0.7543170	0.06961154	0.65278084	
	0.36413712	−0.78300514	0.50428871	
$y'PX$：	0.01138540	−0.32042943	−0.17419621	
Zyの相関	0.087033	−0.392470	−0.114457	
OLS：	0.024709	−0.949689	1.375115	
PCR：	−0.353072	−0.134152	0.801466	
π：	0.01695342	0.46767188	1.17533354	2.34004116
Q：	−0.01402427	0.52670147	0.83915340	0.13494612
	0.54129157	0.55978938	−0.24975399	−0.57555385
	−0.75542414	0.08142290	0.04061831	−0.64888738
	0.36897307	−0.63450116	0.48145059	−0.47903287

固有ベクトル回帰の結果

	X_1の係数	X_2の係数	X_3の係数	誤差の2乗和	寄与率
$\hat{\beta}^{(1)}$	40.122865	−87.531953	62.298353	86.197874	0.009574
$\hat{\beta}^{(2)}$	−1.104844	−0.251211	2.852529	1.685824	0.489547
$\hat{\beta}^{(3)}$	0.309394	−0.078657	−1.358541	1.669085	0.494456
$\hat{\beta}^{(4)}$	4.433703	7.813849	8.405570	128.499877	0.006422

表4 ケース(iv)シミュレーション結果

真の構造：$y = 34.0 + 0.06 X_1 + 0.5 X_2 - 5.4 X_3 + u,\ \ u \sim N(0,\ 4.3^2)$

標 本：	Y	X_1	X_2	X_3
1	98.242	951.471	93.034	7.695
2	88.641	945.519	89.980	8.712
3	77.489	857.672	85.462	8.765
4	88.060	861.435	88.561	8.150
5	43.737	553.849	38.659	8.043
6	70.705	771.649	57.497	8.203
7	107.979	1047.430	111.084	8.078
8	123.828	1153.650	120.422	8.181
9	107.144	980.429	106.855	7.687
10	98.097	1040.160	104.835	9.577
11	73.390	763.692	62.849	7.488
12	70.695	705.898	68.240	6.518
13	68.387	817.915	72.815	8.769
14	89.261	814.418	87.989	6.789
15	79.036	887.086	80.721	8.961
$E(x)$:	85.6460	876.8190	84.6003	8.1077
Std. x	19.1863	145.8100	21.2246	0.7806
$A'A$:	1.000000	0.945543	0.965441	0.060477
	0.945543	1.000000	0.955509	0.359645
	0.965440	0.955509	1.000000	0.189267
	0.060477	0.359645	0.189267	1.000000
λ :	0.02824810	0.87765074	2.09410116	
P :	0.71953362	0.14206188	0.67977187	
	−0.68149221	0.33270693	0.65182395	
	−0.13356548	−0.93226848	0.33620789	
$y'PX$:	0.01433301	0.39915339	1.29238321	
Zy の相関	0.085279	0.426068	0.893084	
OLS :	0.111745	0.187847	−6.986769	
PCR :	0.063705	0.500426	−5.321116	
π :	0.00703079	0.03427812	0.98459486	2.97409622
Q :	−0.69844122	−0.37096051	−0.24778334	0.55961735
	0.67896057	−0.45125283	0.06214611	0.57577886
	0.06692797	0.81099530	−0.11702950	0.56930780
	−0.21613204	0.03233905	0.95971109	0.17662320

固有ベクトル回帰の結果

	X_1 の係数	X_2 の係数	X_3 の係数	誤差の2乗和	寄 与 率
$\hat{\beta}^{(1)}$	0.127915	0.086622	−7.605565	0.014413	0.943150
$\hat{\beta}^{(2)}$	−0.160065	1.976251	2.142603	0.249093	0.054571
$\hat{\beta}^{(3)}$	0.033003	−0.426948	95.194226	16.036639	0.000848
$\hat{\beta}^{(4)}$	−0.135385	−0.919618	−7.757089	9.496699	0.001431

表5　ケース(v)シミュレーション結果

真の構造：$y = 34.0 + 0.06X_1 + 0.5X_2 - 5.4X_3 + u,\quad u \sim N(0,\ 4.3^2)$

標　本：	Y	X_1	X_2	X_3
1	87.784	844.702	90.405	7.637
2	71.149	662.972	72.051	6.587
3	83.711	869.577	81.250	7.486
4	82.977	852.776	77.499	8.239
5	74.424	789.693	81.779	7.675
6	87.345	956.714	91.572	8.299
7	111.329	1087.430	102.995	8.829
8	83.278	777.220	76.248	6.725
9	89.210	824.646	94.029	6.744
10	58.114	632.679	54.405	7.708
$E(x)$：	82.9329	829.8410	82.2233	7.5928
Std. x	13.1027	124.8610	12.8908	0.7046
$A'A$：	1.000000	0.924823	0.921257	0.444957
	0.924819	1.000000	0.867608	0.694990
	0.921257	0.867608	1.000000	0.350914
	0.444957	0.694994	0.350914	1.000000
λ：	0.04241695	0.65953754	2.29804551	
P：	0.75516775	0.08453634	0.65005790	
	—　—	0.60253753	0.57026547	
	0.55834203			
	−0.34347612	−0.79360074	0.50221710	
$y'PX$：	0.03118513	0.28015496	1.35001214	
Zyの相関	0.151418	0.344968	0.890550	
OLS：	0.102105	0.183423	−5.478334	
PCR：	0.043843	0.600669	−0.782319	
π：	0.02359459	0.07529591	0.74509911	3.15601039
Q：	−0.48269676	−0.63263088	−0.28308269	0.53539340
	0.80821508	−0.17775177	0.07212818	0.55676765
	−0.15505668	0.73696006	−0.41114040	0.51362523
	−0.29958246	0.15834250	0.86349597	0.37356755

固有ベクトル回帰の結果

	X_1の係数	X_2の係数	X_3の係数	誤差の2乗和	寄与率
$\hat{\beta}^{(1)}$	0.175707	−0.326512	−11.541622	0.101266	0.641704
$\hat{\beta}^{(2)}$	−0.029485	1.184069	4.654488	0.188135	0.345405
$\hat{\beta}^{(3)}$	0.026738	−1.476251	56.724653	9.297955	0.006989
$\hat{\beta}^{(4)}$	−0.109128	−0.975117	−12.975404	11.010125	0.005902

表6 ケース(vi)シミュレーション結果

真の構造：$y = 25.0 + 0.10 X_1 + 0.5 X_2 + 0.3 X_3 + u,\ u \sim N(0,\ 15.0^2)$

標　本：	Y	X_1	X_2	X_3
1	53.182	74.836	56.350	42.127
2	78.078	105.620	61.157	55.178
3	86.460	52.830	56.693	40.702
4	106.945	126.927	101.484	51.654
5	128.987	122.334	95.916	65.496
6	49.903	49.919	43.719	34.502
7	122.209	125.967	96.371	68.263
8	124.153	125.790	92.618	62.033
9	68.666	64.325	51.271	33.478
10	67.861	82.287	54.557	34.085
$E(x)$：	88.6443	93.0836	71.0137	48.7519
Std. x	28.3829	30.1152	21.4037	12.8348
$A'A$：	1.000000	0.835116	0.926724	0.878906
	0.835116	1.000000	0.922177	0.880198
	0.926724	0.922177	1.000000	0.862012
	0.878906	0.880198	0.862012	1.000000
λ：	0.07619617	0.14730522	2.77649861	
P：	0.75807908	0.29232724	0.58297589	
	−0.6400621	0.50489831	0.57913573	
	−0.12504639	−0.81217146	0.56986044	
$y'PX$：	−0.06998138	−0.00179420	1.52440530	
Zyの相関	−0.253522	−0.004675	0.914854	
OLS：	−0.357888	1.193037	0.967746	
PCR：	0.298309	0.413495	0.713772	
π：	0.03462739	0.14722031	0.16524976	3.65290201
Q：	0.49125776	0.04720292	−0.71277143	0.49839200
	0.47002798	0.24036227	0.68802782	0.49791304
	−0.68358891	0.51751880	−0.08154819	0.50816373
	−0.26541610	−0.81986106	0.10919937	0.49543682

固有ベクトル回帰の結果

	X_1の係数	X_2の係数	X_3の係数	誤差の2乗和	寄与率
$\hat{\beta}^{(1)}$	−0.901747	1.845244	1.194777	0.143485	0.688203
$\hat{\beta}^{(2)}$	−4.799189	−14.538701	38.409671	66.073909	0.001494
$\hat{\beta}^{(3)}$	0.909759	−0.151716	0.338797	0.325267	0.303588
$\hat{\beta}^{(4)}$	−0.941571	−1.352075	−2.198297	14.706045	0.006715

表7　ケース(vii)シミュレーション結果

真の構造：$y = 25.0 + 0.10\,X_1 + 0.5\,X_2 - 1.2\,X_3 + u,\quad u \sim N(0,\ 1.5^2)$

標　本：	Y	X_1	X_2	X_3
1	11.334	96.357	83.867	55.431
2	−2.570	138.293	125.814	88.062
3	2.124	60.367	55.580	47.296
4	−6.523	88.120	84.490	69.414
5	23.559	153.484	114.961	60.987
6	30.838	123.097	84.899	42.311
7	5.416	123.221	104.633	70.268
8	7.584	77.619	68.039	49.163
9	−1.306	104.582	100.594	74.325
10	−18.752	57.244	63.466	67.624
11	4.174	113.775	95.137	67.634
12	18.099	67.069	54.114	35.356
13	7.711	64.243	46.087	37.645
14	1.579	119.174	101.776	73.835
15	20.973	160.833	118.639	67.028
$E(x)$：	6.9493	103.1650	86.8063	60.4254
Std. x	12.2494	32.6043	24.1463	14.7464
$A'A$：	1.000000	0.457307	0.138370	−0.510943
	0.457307	1.000000	0.931260	0.518088
	0.138370	0.931260	1.000000	0.779031
	−0.510943	0.518088	0.779033	1.000000
λ：	0.00742776	0.49446189	2.49811035	
P：	0.55844930	0.60001606	0.57281332	
	−0.76869751	0.11473509	0.62923763	
	0.31183090	−0.79171749	0.52530458	
$y'PX$：	−0.01030909	0.69478977	0.08061848	
Zyの相関	−0.119617	0.988068	0.051007	
OLS：	0.032503	0.633318	−1.269523	
PCR：	0.323699	0.092088	−0.910015	
π：	0.00128279	0.01312723	1.48233327	2.50325671
Q：	0.41521492	−0.39663670	−0.81622263	0.06369075
	0.03035212	0.75155328	−0.30415537	0.58458184
	−0.61102213	−0.47770885	−0.02948862	0.63053678
	0.67329583	−0.22280317	0.49030658	0.50658754

固有ベクトル回帰の結果

	X_1の係数	X_2の係数	X_3の係数	誤差の2乗和	寄 与率
$\hat{\beta}^{(1)}$	−0.027463	0.746531	−1.346976	0.007441	0.915309
$\hat{\beta}^{(2)}$	0.711878	−0.610990	−0.466611	0.083442	0.081619
$\hat{\beta}^{(3)}$	−0.139999	−0.018328	0.498983	2.224993	0.003061
$\hat{\beta}^{(4)}$	−3.448322	−5.022245	−6.607009	617.095825	0.000011