閉凸拡張関数

福尾洋一

§0 序

経済モデルは，制約条件付最大《最小》値問題であることが多い．制約の有無にかかわりなく，最大《最小》値問題は典型的な最適問題である．したがって，多くの経済モデルは最適問題である．ここでは，経局のところ，最大《最小》値問題に帰着するような経済モデルを最適経済モデルと呼び，その最大《最小》値解を最適解と呼ぶことにする．最適経済モデルは，

① 最適条件——最適解の必要条件であり，これに経済的意味付けが与えられることが多い——の導出，

② 最適解存在の検討ないしは最適解の十分条件の提示，

③ 最適解の安定性の検討，

といった分析手続が採られることが多い．

ところで，一口に最適経済モデルと言っても，そのカバーする領域は極めて広範である．そこで，通常は，各個別の経済モデルに対応して，各モデルに固有の定義・与件・行動仮定——これらがしばしば制約式を与える——及び（最適化のための）関数ないし積分が特定化される．そして，最適経済モデルにおいて頻繁に特定化されるのが凸集合や凸《凹》拡張関数である．実際，ミクロ経済理論や規範経済理論におけるモデルは，非常に多くの場合，凸集合や凸《凹》拡張関数と関係を持っている．

もっとも，凸集合や凸《凹》拡張関数が仮定されたからといって，すべて

の最適経済モデルが同様の方法によって解析されるというわけではない．線形モデルと非線形モデル，微分可能モデルと微分不能モデル，等式条件モデルと不等式条件モデル，静態モデルと動態モデル等々の相違によって，またそれらの各種組合せによって，当然のことながら，解析法も異なってくる．それにもかかわらず，凸集合や凸《凹》拡張関数の仮定——効用関数や生産関数はしばしば凹関数であることが仮定される——は，提示された最適経済モデルを解くための道筋を大いに単純化するとともに，かなり明確な結論を導く，という利点を持っている．

以上のように考えるとき，最適経済モデルを構成するに際して，凸集合や凸《凹》拡張関数に関連する諸論に精通することは非常に有益なことのように思われる．我々は，このような観点から，これまで，凸集合や凸《凹》拡張関数の諸性質についてその研究を進めてきた．本稿では特に，閉凸拡張関数すなわち下方半連続凸拡張関数の諸性質について検討する．稿末の文献を参考にした．随所に工夫を凝らしたつもりではあるが，特に新しい論点はないことを断っておく．

なお，本稿で使用される記号のうち説明のないものは，〔4〕〔5〕で説明されたものである．

§1　下極限・上極限

定義1　下極限・上極限（1）

拡張された実数の列 $\langle \xi_\nu \rangle_{\nu\in N}$，$\xi_\nu \in \boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ に対して，最初の $\nu-1$ 項を省いた部分列を $\langle \xi_i \rangle_{i\in N\setminus\{1,\cdots,\nu-1\}}$ によって表すとき，

$$\liminf_{\nu\to\infty} \xi_\nu := \lim_{\nu\to\infty} \inf \langle \xi_i \rangle_{i\in N\setminus\{1,\cdots,\nu-1\}},$$

$$\limsup_{\nu\to\infty} \xi_\nu := \lim_{\nu\to\infty} \sup \langle \xi_i \rangle_{i\in N\setminus\{1,\cdots,\nu-1\}},$$

をそれぞれ $\langle \xi_\nu \rangle_{\nu\in N}$ の下極限，上極限という．一般に，

$$\liminf_{\nu\to\infty} \xi_\nu \leqq \limsup_{\nu\to\infty} \xi_\nu,$$

であるが，特に，上式が等号で成立するとき，下極限・上極限は $\langle\xi_\nu\rangle_{\nu\in N}$ の極限である．すなわち，

$$\lim_{\nu\to\infty}\xi_\nu=\liminf_{\nu\to\infty}\xi_\nu=\limsup_{\nu\to\infty}\xi_\nu.$$

定義 2　下極限・上極限(2)

$\boldsymbol{R}$ の区間 $\boldsymbol{I}$ 上の実関数 $\varphi: \boldsymbol{I}\subset\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ と所与の $\xi_0\in\boldsymbol{I}$ について考える．$\boldsymbol{I}\cap(\xi_0,\infty)\neq\emptyset$ であるとき，

$$\liminf_{\xi\downarrow\xi_0}\varphi(\xi):=\lim_{\xi\to\xi_0}\inf\{\varphi(\eta)\mid\eta\in(\xi_0,\xi)\subset\boldsymbol{I}\}\in\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\},$$

$$\limsup_{\xi\downarrow\xi_0}\varphi(\xi):=\lim_{\xi\to\xi_0}\sup\{\varphi(\eta)\mid\eta\in(\xi_0,\xi)\subset\boldsymbol{I}\}\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\},$$

をそれぞれ φ の ξ_0 における右方下極限，右方上極限という．一般に，

$$\liminf_{\xi\downarrow\xi_0}\varphi(\xi)\leqq\limsup_{\xi\downarrow\xi_0}\varphi(\xi),$$

であるが，特に，上式が等号で成立するとき，右方下極限・右方上極限をまとめて，φ の ξ_0 における右方極限といい，

$$\lim_{\xi\downarrow\xi_0}\varphi(\xi):=\liminf_{\xi\downarrow\xi_0}\varphi(\xi)=\limsup_{\xi\downarrow\xi_0}\varphi(\xi),$$

によって表す．また，$\boldsymbol{I}\cap(-\infty,\xi_0)\neq\emptyset$ であるとき，

$$\liminf_{\xi\uparrow\xi_0}\varphi(\xi):=\lim_{\xi\to\xi_0}\inf\{\varphi(\eta)\mid\eta\in(\xi,\xi_0)\subset\boldsymbol{I}\}\in\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\},$$

$$\limsup_{\xi\uparrow\xi_0}\varphi(\xi):=\lim_{\xi\to\xi_0}\sup\{\varphi(\eta)\mid\eta\in(\xi,\xi_0)\subset\boldsymbol{I}\}\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\},$$

をそれぞれ φ の ξ_0 における左方下極限，左方上極限という．一般に，

$$\liminf_{\xi\uparrow\xi_0}\varphi(\xi)\leqq\limsup_{\xi\uparrow\xi_0}\varphi(\xi),$$

であるが，特に，上式が等号で成立するとき，左方下極限・左方上極限をまとめて，φ の ξ_0 における左方極限といい，

$$\lim_{\xi\uparrow\xi_0}\varphi(\xi):=\liminf_{\xi\uparrow\xi_0}\varphi(\xi)=\limsup_{\xi\uparrow\xi_0}\varphi(\xi),$$

によって表す．右方極限と左方極限が一致するとき，右方極限・左方極限をまとめて，φ の ξ_0 における極限といい，

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\varphi(\xi):=\lim_{\xi\downarrow\xi_0}\varphi(\xi)=\lim_{\xi\uparrow\xi_0}\varphi(\xi),$$

によって表す．

$\boldsymbol{R}$ 上の拡張関数 $h: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，右方下極限・右方上極限，左方下極限・左方上極限，そして極限についても上と全く同様に定義する．

定義 3　下極限・上極限（3）

実関数 $\phi: \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ と所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ に対して，

$$\liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}) := \lim_{\delta \to 0} \inf\{\phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \delta) \cap \boldsymbol{S}\} \in \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\},$$

$$\limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}) := \lim_{\delta \to 0} \sup\{\phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \delta) \cap \boldsymbol{S}\} \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\},$$

をそれぞれ ϕ の $\boldsymbol{x}_0$ における下極限，上極限という．一般に，

$$\liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}) \leqq \limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}),$$

であるが，特に，上式が等号で成立するとき，下極限・上極限をまとめて，ϕ の $\boldsymbol{x}_0$ における極限といい，

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}) := \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}) = \limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}),$$

によって表す．

定義 4　下極限・上極限（4）

拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ と所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$\liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) := \lim_{\delta \to 0} \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \delta)\} \in \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

$$\limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) := \lim_{\delta \to 0} \sup\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \delta)\} \in \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

をそれぞれ f の $\boldsymbol{x}_0$ における下極限，上極限という．一般に，

$$\liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \leqq \limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}),$$

であるが，特に，上式が等号で成立するとき，下極限・上極限をまとめて，f の $\boldsymbol{x}_0$ における極限といい，

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) := \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}),$$

によって表す．

§2　半連続拡張関数

定義5　半連続実関数

実関数 $\phi: \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ について考える．ϕ は，所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ に対して，

$$\phi(\boldsymbol{x}_0) = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}),$$

ならば，$\boldsymbol{x}_0$ において下方半連続であるといい，

$$\phi(\boldsymbol{x}_0) = \limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}),$$

ならば，$\boldsymbol{x}_0$ において上方半連続であるという．ϕ は，任意所与の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ において下《上》方半連続ならば，$\boldsymbol{S}$ において下《上》方半連続であるとか，($\boldsymbol{S}$ 上の) 下《上》方半連続実関数であるという．

注意1　実関数 $\phi: \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ と所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　ϕ が $\boldsymbol{x}_0$ において連続である．

(ii)　ϕ が $\boldsymbol{x}_0$ において下方半連続かつ上方半連続である．

定理1　実関数 $\phi: \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　ϕ が ($\boldsymbol{S}$ 上の) 下《上》方半連続実関数である．

(ii)　$-\phi$ が ($\boldsymbol{S}$ 上の) 上《下》方半連続実関数である．

証明　定義から明らかである．　‖

定義6　半連続拡張関数

拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ について考える．f は，所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}),$$

ならば，$\boldsymbol{x}_0$ において下方半連続であるといい，

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \limsup_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}),$$

ならば，$\boldsymbol{x}_0$ において上方半連続であるという．f は，任意所与の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ において下《上》方半連続ならば，下《上》方半連続拡張関数であるという．

注意 2　拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ と所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　f が $\boldsymbol{x}_0$ において連続である．

(ii)　f が $\boldsymbol{x}_0$ において下方半連続かつ上方半連続である．

定理 2　拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　f が下《上》方半連続拡張関数である．

(ii)　$-f$ が上《下》方半連続拡張関数である．

証明　定義から明らかである．　‖

注意 3　定理1と定理2により，上《下》方半連続な実関数・拡張関数は，符号を変更することにより，下《上》方半連続な実関数・拡張関数となるので，上《下》方半連続な実関数・拡張関数の議論は，結局のところ，下《上》方半連続な実関数・拡張関数の議論に帰着する．そこで，以下においては，下方半連続な実関数・拡張関数のみを主として取り扱うことにする．

定理 3　実関数 $\phi: \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　ϕ が下方半連続実関数である．

(ii)　$\forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S} \, \forall \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+ \, \exists \bar{\delta} \in \boldsymbol{R}_+, \ \bar{\delta} \leqq \varepsilon \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \bar{\delta}) \cap \boldsymbol{S}:$

$$-\varepsilon < \phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}_0).$$

証明　(i)⇒(ii)．(ii)の成立を否定して，

$$\exists \bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{S} \, \exists \bar{\varepsilon} \in \boldsymbol{R}_+ \, \forall \delta \in \boldsymbol{R}_+, \ \delta \leqq \bar{\varepsilon} \ \exists \tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}}; \delta) \cap \boldsymbol{S}:$$
$$\phi(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\varepsilon} \geqq \phi(\tilde{\boldsymbol{x}}),$$

と仮定すると，この $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{S}$, $\bar{\varepsilon} \in \boldsymbol{R}_+$ に対して，

$$\forall \delta \in \boldsymbol{R}_+, \ \delta \leqq \bar{\varepsilon}: \phi(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\varepsilon} \geqq \inf\{\phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}}; \delta) \cap \boldsymbol{S}\},$$

すなわち，

$$\phi(\bar{\boldsymbol{x}}) - \bar{\varepsilon} \geqq \lim_{\delta \to 0} \inf\{\phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}}; \delta) \cap \boldsymbol{S}\} = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \bar{\boldsymbol{x}}} \phi(\boldsymbol{x}),$$

となって，(i)と矛盾する．

(ii)⇒(i)．(ii)ならば，

$$\forall x_0 \in \boldsymbol{S}\ \forall \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+\ \exists \bar{\delta} \in \boldsymbol{R}_+,\ \bar{\delta} \leqq \varepsilon:$$

$$\phi(\boldsymbol{x}_0) \leqq \varepsilon + \inf\{\phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\bar{\delta}) \cap \boldsymbol{S}\}.$$

ここで，$\varepsilon \to 0$ とすると，それに応じて，$\bar{\delta} \to 0$ であるから，結局，

$$① \qquad \forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}:\ \phi(\boldsymbol{x}_0) \leqq \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon + \lim_{\bar{\delta} \to 0} \inf\{\phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\bar{\delta}) \cap \boldsymbol{S}\}$$

$$= \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}).$$

一方，inf の定義により，

$$\forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}\ \forall \delta \in \boldsymbol{R}_+:\ \phi(\boldsymbol{x}_0) \geqq \inf\{\phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\delta) \cap \boldsymbol{S}\},$$

であるから，

$$② \qquad \forall \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}:\ \phi(\boldsymbol{x}_0) \geqq \lim_{\delta \to 0} \inf\{\phi(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\delta) \cap \boldsymbol{S}\}$$

$$= \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \phi(\boldsymbol{x}).$$

よって，①②により，結論を得る． ‖

§ 3　準位集合

定義 7　(拡張関数の) 準位集合

拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ と任意所与の $\mu \in \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，集合

$$\boldsymbol{S}(f, \mu) := \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \leqq \mu\},\quad \boldsymbol{S}^{\circ}(f, \mu) := \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) < \mu\}$$

を f の μ 準位集合という．

注意 4　拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ と任意所与の $\mu \in \boldsymbol{R}$ に対して，次の (i)(ii) が成立する．

$$(\mathrm{i}) \quad \begin{cases} (\boldsymbol{x}, \mu) \in \mathrm{epi}\, f \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}(f, \mu). \\ (\boldsymbol{x}, \mu) \in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{a}}. \end{cases}$$ [1)]

$$(\mathrm{ii}) \quad \boldsymbol{S}(f, \mu) \subset \mathrm{dom}\, f,\ [\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{a}} \subset (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{a}}.$$

---

1) 注意 4 において，

$$(\boldsymbol{x}, \mu) \in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{I}}$$

も示される．

証明　(i)の後半の関係のみを証明する．$(\boldsymbol{x}, \mu)\in(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}$ ならば，epi f の収束点列 $\langle(\boldsymbol{x}_\nu, \mu)\rangle_{\nu\in N}$，$(\boldsymbol{x}_\nu, \mu)\to(\boldsymbol{x}, \mu)$ $(\nu\to\infty)$ が存在するが，この点列については，$f(\boldsymbol{x}_\nu)\leqq\mu$，すなわち，$\boldsymbol{x}_\nu\in\boldsymbol{S}(f, \mu)$ であるから，$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{a}}$．一方，$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{a}}$ ならば，$\boldsymbol{S}(f, \mu)$ の収束点列 $\langle\boldsymbol{x}_\nu\rangle_{\nu\in N}$，$\boldsymbol{x}_\nu\to\boldsymbol{x}$ $(\nu\to\infty)$ が存在するが，この点列については，$f(\boldsymbol{x}_\nu)\leqq\mu$，すなわち，$(\boldsymbol{x}_\nu, \mu)\in\mathrm{epi}\, f$ であるから，$(\boldsymbol{x}, \mu)\in(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}$．よって，結論を得る．　‖

注意 5　凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ と任意所与の $\mu\in\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ に対して，f の μ 準位集合 $\boldsymbol{S}(f, \mu)$ と $\boldsymbol{S}^\circ(f, \mu)$ は凸集合である．

証明　$\boldsymbol{S}(f, \mu)$ についてのみ証明する．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{S}(f, \mu)$，$(\theta_1, \theta_2)\in\varDelta_\oplus$ は任意所与として，$f(\theta_1\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{x}_2)\leqq\mu$ を示す．$\mu=\infty$ ならば，自明である．$\mu\in\boldsymbol{R}$ ならば，$(\boldsymbol{x}_1, \mu)$，$(\boldsymbol{x}_2, \mu)\in\mathrm{epi}\, f$ であるが，epi f は凸集合であるから，$(\theta_1\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{x}_2, \mu)\in\mathrm{epi}\, f$ となって，結論を得る．最後に，$\mu=-\infty$ ならば，任意所与の $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，$(\boldsymbol{x}_1, \lambda)$，$(\boldsymbol{x}_2, \lambda)\in\mathrm{epi}\, f$ であるから，$(\theta_1\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{x}_2, \lambda)\in\mathrm{epi}\, f$，すなわち，$f(\theta_1\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{x}_2)\leqq\lambda$ となるが，ここで $\lambda\to-\infty=\mu$ とすると，$f(\theta_1\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{x}_2)=\mu$ となって，結論を得る．　‖

定理 4　拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ に対して，次の(i)(ii)(iii)は同値である．

(i)　f が下方半連続拡張関数である．

(ii)　任意所与の $\mu\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\boldsymbol{S}(f, \mu)$ が閉集合，すなわち，

$$\boldsymbol{S}(f, \mu)=[\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{a}}.$$

(iii)　epi f が閉集合，すなわち，

$$\mathrm{epi}\, f=(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}.$$

証明　(i)⇒(ii)．$\mu\in\boldsymbol{R}$ を任意所与とする．$\boldsymbol{S}(f, \mu)$ の任意の収束点列 $\langle\boldsymbol{y}_i\rangle_{i\in N}$，$\boldsymbol{y}_i\in\boldsymbol{S}(f, \mu)$，$\boldsymbol{y}_i\to\boldsymbol{x}_0$ $(i\to\infty)$，の任意の部分点列 $\langle\boldsymbol{x}_\nu\rangle_{\nu\in N}:=\langle\boldsymbol{y}_{i\nu}\rangle_{\nu\in N}$，$\boldsymbol{x}_\nu\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\nu^{-1})\cap\boldsymbol{S}(f, \mu)$，に対して，$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{S}(f, \mu)$ を示せばよい．さて，この点列 $\langle\boldsymbol{x}_\nu\rangle_{\nu\in N}$ に対しては，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0)&=\liminf_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}):=\lim_{\nu\to\infty}\inf\{f(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\nu^{-1})\}\\ &\leqq\lim_{\nu\to\infty} f(\boldsymbol{x}_\nu)\leqq\mu. \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}(f, \mu)$.

(ii) ⇒ (i). $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ を任意所与とする．

$$^{\exists}\bar{\nu} \in \boldsymbol{N} : \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\ \bar{\nu}^{-1})\} = \infty,$$

ならば，$f(\boldsymbol{x}_0) = \infty$ であるが，この $\bar{\nu} \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$\inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\ \bar{\nu}^{-1})\} \leqq \lim_{\delta \to 0} \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\ \delta)\}$$
$$= \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \infty,$$

であるから，(i) が成立する．そこで，以下においては，

$$^{\forall}\nu \in \boldsymbol{N} : \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\ \nu^{-1})\} \leqq f(\boldsymbol{x}_0) < \infty,$$

としておく，そうすると，

① $$^{\forall}\nu \in \boldsymbol{N} : \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\ \nu^{-1})\} \leqq \lim_{\nu \to \infty} \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \nu^{-1})\}$$
$$= \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}_0),$$

となる．このとき，(i) の成立を否定すると，

② $$^{\exists}\bar{\mu} \in \boldsymbol{R} : \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) < \bar{\mu} < f(\boldsymbol{x}_0),$$

であるから，この $\bar{\mu} \in \boldsymbol{R}$ に対しては，①② により，

$$^{\forall}\nu \in \boldsymbol{N}\, ^{\exists}\boldsymbol{x}_\nu \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\ \nu^{-1}) : f(\boldsymbol{x}_\nu) < \bar{\mu},$$

となって，$\boldsymbol{x}_0$ に収束する点列 $\langle \boldsymbol{x}_\nu \rangle_{\nu \in \boldsymbol{N}}$, $\boldsymbol{x}_\nu \in \boldsymbol{S}(f, \bar{\mu})$ が定義される．ここで，(ii) を考慮すると，$\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}(f, \bar{\mu})$，すなわち，$f(\boldsymbol{x}_0) \leqq \bar{\mu}$ であるが，これは ② に矛盾する．

(ii) ⟺ (iii). 注意4 (i) により，直ちに結論を得る．　‖

§4　閉凸拡張関数

定義 8　(拡張関数の) 閉包拡張関数

拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，

$$\begin{cases} ^{\forall}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : f(\boldsymbol{x}) > -\infty \Rightarrow \mathrm{epi}\ f^{\mathrm{a}} = (\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{a}} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}, \\ ^{\exists}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : f(\boldsymbol{x}) = -\infty \Rightarrow {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}) = -\infty, \end{cases}$$

となる拡張関数 $f^{\mathrm{a}} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を f の閉包拡張関数という．

拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ は，$f \equiv f^{\mathrm{a}}$ ならば，閉拡張関数であると

いう．閉かつ凸である拡張関数を閉凸拡張関数という．

注意 6　凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，f の閉包拡張関数は凸拡張関数である．

証明　定義 8 から明らかである．　‖

注意 7　真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ に対して，次の (i)(ii) は同値である．

(i)　f が閉真凸拡張関数である．

(ii)　f が下方半連続真凸拡張関数である．

証明　定理 4 と定義 8 から明らかである．　‖

注意 8　真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と任意所与の $\mu \in \boldsymbol{R}$ に対して，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{S}(f^{\mathrm{a}}, \mu) = \bigcap_{\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+} [\boldsymbol{S}(f, \mu+\varepsilon)]^{\mathrm{a}}.$$

証明　注意 4 により，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}(f^{\mathrm{a}}, \mu) &\Longleftrightarrow (\boldsymbol{x}, \mu) \in \operatorname{epi} f^{\mathrm{a}} = (\operatorname{epi} f)^{\mathrm{a}} \\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{S}(f, \mu)]^{\mathrm{a}} \Longleftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{S}(f, \mu+\varepsilon)]^{\mathrm{a}} \\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \in \bigcap_{\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+} [\boldsymbol{S}(f, \mu+\varepsilon)]^{\mathrm{a}}.
\end{aligned}$$

定理 5　真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の (i)(ii) が成立する．

(i)　$-\infty < f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}) = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}_0)$.

(ii)　次の (1)(2) は同値である．

(1)　${}^{\exists}\bar{\mu} \in \boldsymbol{R}: (\boldsymbol{x}_0, \bar{\mu}) \in (\operatorname{epi} f)^{\mathrm{a}}$.

(2)　$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \inf\{\mu \mid (\boldsymbol{x}_0, \mu) \in (\operatorname{epi} f)^{\mathrm{a}}\} < \infty$.

証明　以下においては，便宜上，任意の $\nu \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$f_\nu := \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \nu^{-1})\}, \ f_\nu^{\mathrm{a}} := \inf\{f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \nu^{-1})\},$$

とおくことにする．

(i)．<u>最初の等号の証明</u>．定理 4 と定義 4 により，明らかである．<u>第 2 の等号の証明</u>．

① $\quad {}^{\forall}\nu \in \boldsymbol{N} : f_\nu = f_\nu^{\mathrm{a}}$

を示せば十分である．①を否定して，

$$^{\exists}\bar{\nu} \in \boldsymbol{N} : f_{\bar{\nu}} < f_{\bar{\nu}}^{\mathrm{a}}, \text{ または } f_{\bar{\nu}} > f_{\bar{\nu}}^{\mathrm{a}},$$

とすると，この $\bar{\nu} \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \bar{\nu}^{-1}) : f_{\bar{\nu}} \leqq f(\bar{\boldsymbol{x}}) < f_{\bar{\nu}}^{\mathrm{a}} \leqq f_{\bar{\nu}}^{\mathrm{a}}(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqq \infty, \text{ または}$$
$$f_{\bar{\nu}}^{\mathrm{a}} \leqq f^{\mathrm{a}}(\bar{\boldsymbol{x}}) < f_{\bar{\nu}} \leqq f_{\bar{\nu}}(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqq \infty,$$

であるから，

$$(\bar{\boldsymbol{x}}, f(\bar{\boldsymbol{x}})) \notin \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{a}} = (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}, \text{ または } (\bar{\boldsymbol{x}}, f^{\mathrm{a}}(\bar{\boldsymbol{x}})) \notin (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}} = \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{a}},$$

となって，矛盾する．<u>最初の不等号の証明</u>．2つの等号関係により，

$$^{\forall}\nu \in \boldsymbol{N} : f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$$
$$= \lim_{\nu \to \infty} \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \nu^{-1})\} \geqq f_\nu > -\infty.$$

<u>最後の不等号の証明</u>．任意所与の $\nu \in \boldsymbol{N}$ に対して，$f_\nu \leqq f(\boldsymbol{x}_0)$，であることから結論を得る．

(ii)の(1)⇒(2)．$\boldsymbol{M}(f^{\mathrm{a}}, \boldsymbol{x}_0) := \{\mu \mid (\boldsymbol{x}_0, \mu) \in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}} = \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{a}}\}$，とおくと，(1)と epi f^{a} の定義により，$\emptyset \neq \boldsymbol{M}(f^{\mathrm{a}}, \boldsymbol{x}_0) \subset \boldsymbol{R}$．よって，$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \min \boldsymbol{M}(f^{\mathrm{a}}, \boldsymbol{x}_0)$，となって，結論を得る．(ii)の(2)⇒(i)．$\bar{\mu} := f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)$，とおけばよい．‖

系　真凸拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ に対して，次の関係(i)(ii)(iii)が成立する．

(i)　$\mathrm{dom}\, f \subset \mathrm{dom}\, f^{\mathrm{a}} \subset (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{a}}$.

(ii)　$(\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{a}} = (\mathrm{dom}\, f^{\mathrm{a}})^{\mathrm{a}}$.

(iii)　$(\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}} = (\mathrm{dom}\, f^{\mathrm{a}})^{\mathrm{I}}$.

証明　(i)．<u>前半の包含関係の証明.</u> 定理5(i)により明らかである．<u>後半の包含関係の証明.</u> $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{dom}\, f^{\mathrm{a}}$ を任意所与とする．ある $\mu_0 \in \boldsymbol{R}$ に対して，$(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) \in \mathrm{epi}\, f^{\mathrm{a}} = (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}$，であるから，注意4により，$\boldsymbol{x}_0 \in [\boldsymbol{S}(f, \mu_0)]^{\mathrm{a}} \subset (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{a}}$.

(ii)(iii)．(i)と〔4〕定理19により，

$$(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}} \subset (\mathrm{dom}\ f^{\mathrm{a}})^{\mathrm{a}} \subset [(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{a}} = (\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}.$$
$$(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}} \subset (\mathrm{dom}\ f^{\mathrm{a}})^{\mathrm{I}} \subset [(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{I}} = (\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}}. \qquad \|$$

§ 5　諸定理

定理 6　非真凸々拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ に対して，次の（i）（ii）が成立する．

（i）　$^\forall \boldsymbol{x} \in (\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}} : f(\boldsymbol{x}) = f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}) = -\infty.$

（ii）　$^\forall \boldsymbol{x} \in [(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}} : f(\boldsymbol{x}) = \infty.$

証明．（i）．$\boldsymbol{x}_0 \in (\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}}$ を任意所与とする．定理 5（i）を考慮すれば，$f(\boldsymbol{x}_0) = -\infty$ を示せば十分である．仮定によって，$\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = -\infty\} \neq \emptyset$ であることに留意して，$\hat{\boldsymbol{x}} \in \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = -\infty\}$, $\hat{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}_0$，を任意所与としておく —— $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0$ の場合には，結論は自明である．

$$^\exists \varepsilon_0 \in \boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0\,;\,\varepsilon_0) \subset \mathrm{dom}\ f,$$

であるが，この ε_0 に対して，$\delta_0 \in \{\delta \mid \delta \in \boldsymbol{R}_+,\ \delta < \varepsilon_0 \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_0\|^{-1}\}$ を固定し，

$$\tilde{\boldsymbol{x}} := \hat{\boldsymbol{x}} + (1+\delta_0)(\boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}),$$

とおくと，$\tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0\,;\,\varepsilon_0) \subset \mathrm{dom}\ f$，となる．このとき，

$$\boldsymbol{x}_0 = (1+\delta_0)^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}} + \delta_0(1+\delta_0)^{-1}\hat{\boldsymbol{x}},\ \ \tilde{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{dom}\ f,$$

であるから，〔5〕注意 8 により，

$$^\forall (\mu_1, \mu_2) \in \{(\mu_1, \mu_2) \mid (\mu_1, \mu_2) \in \boldsymbol{R}^2,\ f(\tilde{\boldsymbol{x}}) \leqq \mu_1\} :$$
$$f(\boldsymbol{x}_0) \leqq (1+\delta_0)^{-1}\mu_1 + \delta_0(1+\delta_0)^{-1}\mu_2,$$

となる．ここで，$\mu_2 \to -\infty$ とすると，結論を得る．

（ii）．$[(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}} \subset (\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{c}}$ であるから，結論は自明である．　‖

系　下方半連続非真凸々拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ に対して，次の関係が成立する．

$$^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : f(\boldsymbol{x}) = -\infty,\ \text{または}\ f(\boldsymbol{x}) = \infty.$$

証明　$\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ を任意所与とする．$\boldsymbol{x}_0 \notin \mathrm{dom}\ f$ ならば，$f(\boldsymbol{x}_0) = \infty$ であるから，以下，$\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{dom}\ f$ として，$f(\boldsymbol{x}_0) = -\infty$ を示す．〔5〕注意 8 と〔4〕定理 19 により，$(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}} = [(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}}]^{\mathrm{a}}$，であるから，

$$\forall \nu \in \boldsymbol{N} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \nu^{-1}) \cap (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}} \neq \emptyset.$$

よって，$\boldsymbol{x}_\nu \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \nu^{-1}) \cap (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{x}_\nu \to \boldsymbol{x}_0 \ (\nu \to \infty)$，となる点列 $\langle \boldsymbol{x}_\nu \rangle_{\nu \in \boldsymbol{N}}$ が存在するが，この点列については，定理 6 により，

$$\forall \nu \in \boldsymbol{N} : \inf \{ f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \nu^{-1}) \} \leqq f(\boldsymbol{x}_\nu) = -\infty,$$

が成立している．よって，仮定により，

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\nu \to \infty} \inf \{ f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \nu^{-1}) \}$$

$$\leqq \lim_{\nu \to \infty} f(\boldsymbol{x}_\nu) = -\infty,$$

となって，結論を得る．　‖

定理 7　凸拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，次の関係が成立する．

$$(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}} = \{ (\boldsymbol{x}, \mu) \mid (\boldsymbol{x}, \mu) \in \boldsymbol{R}^{n+1},\ \boldsymbol{x} \in (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}},\ f(\boldsymbol{x}) < \mu \}.$$

証明　右辺を $\boldsymbol{W}$ とおく．<u>$(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}} \subset \boldsymbol{W}$ の証明</u>．$(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) \in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}}$ を任意所与とする．

$$\exists \varepsilon_0 \in \boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{B}((\boldsymbol{x}_0, \mu_0) ; \varepsilon_0) \subset \mathrm{epi}\, f,$$

であるから，この ε_0 に対して，特に，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \varepsilon_0) \times \{\mu_0\} \subset \boldsymbol{B}((\boldsymbol{x}_0, \mu_0) ; \varepsilon_0) \subset \mathrm{epi}\, f,$$

$$\{\boldsymbol{x}_0\} \times \{\mu \mid |\mu - \mu_0| < \varepsilon_0\} \subset \mathrm{epi}\, f.$$

よって，注意 4 により，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \varepsilon_0) \subset \boldsymbol{S}(f, \mu_0) \subset \mathrm{dom}\, f,$$

$$\forall \varepsilon \in \{\varepsilon \mid \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+,\ \varepsilon < \varepsilon_0\} : f(\boldsymbol{x}_0) \leqq \mu_0 - \varepsilon < \mu_0.$$

すなわち，$(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) \in \boldsymbol{W}$．<u>$\boldsymbol{W} \subset (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}}$ の証明</u>．$(\boldsymbol{x}_0, \mu_0) \in \boldsymbol{W}$ を任意所与とする．

①　$\exists \varepsilon_0 \in \boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \varepsilon_0) \subset \mathrm{dom}\, f,$

であるが，〔4〕定理20系 2 によれば，この ε_0 に対して，

②　$\exists \boldsymbol{X} := \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\},\ k \in \boldsymbol{N}\ \exists \delta_0 \in \{\delta \mid \delta \in \boldsymbol{R}_+,\ \delta < \varepsilon_0\} :$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \delta_0) \subset \mathcal{C}\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0 ; \varepsilon_0),$$ ただし，$\mathcal{C}\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{X}$ の凸包．

①②により，この $\boldsymbol{X}$ と δ_0 に対して，

$$B(x_0;\delta_0)\subset \mathcal{C}X\subset B(x_0;\varepsilon_0)\subset \mathrm{dom}\, f\subset R\cup\{-\infty\},$$

であることを考えて，任意の $x\in B(x_0;\delta_0)$ と所与の $\bar{\mu}\in R$ を

$$x=\sum_{i=1}^{k}\theta_i x_i,\quad \theta_i\in R_+,\quad \sum_{i=1}^{k}\theta_i=1,\quad x_i\in X,$$

$$\bar{\mu}>\max\{\mu_0,\ f(x_1)+\delta_0,\ \cdots,\ f(x_k)+\delta_0\},$$

とおくと，〔5〕定理3 (iii) により，

$$f(x)=f(\sum_{i=1}^{k}\theta_i x_i)<\sum_{i=1}^{k}\theta_i(\bar{\mu}-\delta_0)=\bar{\mu}-\delta_0.$$

よって，今，

$$Z:=\{(x,\ \mu)\mid (x,\ \mu)\in R^{n+1},\ x\in B(x_0;\delta_0),\ |\mu-\bar{\mu}|<\delta_0\},$$

とおくと，

③ $\quad \forall(x,\ \mu)\in Z: f(x)<\mu.$

ところで，$B((x_0,\ \bar{\mu});\ \delta_0)\subset Z$ であるから，③は，$B((x_0,\ \bar{\mu});\ \delta_0)\subset \mathrm{epi}\, f$，すなわち，$(x_0,\ \bar{\mu})\in(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}}$，を意味する．一方，仮定によって，$f(x_0)<\mu_0$，であるから，

$$\exists\gamma_0\in R_+: (x_0,\ \mu_0-\gamma_0)\in \mathrm{epi}\, f\subset(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}.$$

$\bar{\mu}>\mu_0$ と定めたことを想起すると，この γ_0 に対して，明らかに，

$$\exists(\eta_1,\ \eta_2)\in\Delta_{\oplus},\ \eta_1,\ \eta_2\in R_+:$$

$$(x_0,\ \mu_0)=\eta_1\cdot(x_0,\ \bar{\mu})+\eta_2\cdot(x_0,\ \mu_0-\gamma_0),$$

$$(x_0,\ \bar{\mu})\in(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}},\quad (x_0,\ \mu_0-\gamma_0)\in(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{a}}.$$

よって，〔4〕定理18 (iii) により，$(x_0,\ \mu_0)\in(\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}}$. ‖

系 1　凸拡張関数 $f: R^n\to R\cup\{-\infty,\infty\}$，凸集合 $C\subset R^n$ 及び所与の $\bar{\mu}\in R$ に対して，次の (i)(ii) が成立する．

(i) $\quad \exists\bar{x}\in\mathrm{dom}\, f: f(\bar{x})<\bar{\mu}\Rightarrow\exists\hat{x}\in(\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}}: f(\hat{x})<\bar{\mu}.$

(ii) $\quad \exists\bar{x}\in C^{\mathrm{a}}: f(\bar{x})<\bar{\mu}\Rightarrow\exists\hat{x}\in C^{\mathrm{I}}: f(\hat{x})<\bar{\mu}.$

証明　(ii) ならば (i) が成立するので，(ii) を示す．

$$I:=\{\mu\mid\mu\in R,\ \mu<\bar{\mu}\}=(-\infty,\bar{\mu})\quad(\text{開区間}),$$

とおく，以下，〔4〕の定理22，定理21及び定理19系を順次使用する．仮定によって，

$$(\bar{x}, \bar{\mu}) \in (C^a \times I^a) \cap (\mathrm{epi}\, f)^a = (C \times I)^a \cap (\mathrm{epi}\, f)^a$$
$$= [(C \times I) \cap \mathrm{epi}\, f]^a,$$

であるから，

$$[(C \times I) \cap \mathrm{epi}\, f]^I = (C \times I)^I \cap (\mathrm{epi}\, f)^I = (C^I \times I) \cap (\mathrm{epi}\, f)^I \neq \emptyset.$$

よって，$(\mathrm{epi}\, f)^I$ に定理7の関係を適用すると，結論を得る．‖

系2　2つの凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ と $g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，次の関係が成立する．

$$(\mathrm{dom}\, f)^I = (\mathrm{dom}\, g)^I,\ \text{かつ}\ {}^\forall \boldsymbol{x} \in (\mathrm{dom}\, f)^I : f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$$
$$\Rightarrow {}^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : f^a(\boldsymbol{x}) = g^a(\boldsymbol{x}).$$

証明　$\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ を任意所与とする．$\mathrm{dom}\, f = \emptyset$ かつ $\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$ 《$\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ かつ $\mathrm{dom}\, g = \emptyset$》，とすると，仮定と定理7系1により，

$$\emptyset = (\mathrm{dom}\, f)^I = (\mathrm{dom}\, g)^I = \emptyset \ 《\emptyset \neq (\mathrm{dom}\, f)^I = (\mathrm{dom}\, g)^I = \emptyset》,$$

となって，矛盾する．よって，

(a)　$\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, g = \emptyset$,

あるいは，

(b)　$\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$, $\mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$,

のいずれかである．(a)の場合には，定理5(i)により，

$$f^a(\boldsymbol{x}_0) = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \infty = \liminf_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = g^a(\boldsymbol{x}_0),$$

となるので，以下(b)の場合について証明する．f《g》が非真凸ならば，定理7系1と仮定により，

$$\emptyset \neq (\mathrm{dom}\, f)^I = (\mathrm{dom}\, g)^I \ 《\emptyset \neq (\mathrm{dom}\, g)^I = (\mathrm{dom}\, f)^I》,$$

であるが，定理6により，

$${}^\forall \boldsymbol{x} \in (\mathrm{dom}\, f)^I = (\mathrm{dom}\, g)^I : f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) = -\infty,$$

となり，g《f》もまた非真凸となる．このとき，定義8により，

$$f^a(\boldsymbol{x}_0) = g^a(\boldsymbol{x}_0) = -\infty.$$

次に，f《g》が真凸ならば，上述の対偶により，g《f》もまた真凸であることに留意しておく．仮定によって，$(\mathrm{epi}\, f)^I = (\mathrm{epi}\, g)^I$，であるから，〔4〕定

理19により，

$$\begin{cases} \mathrm{epi}\ f^{\mathrm{a}} = (\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{a}} = [(\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{I}}]^{\mathrm{a}} = [(\mathrm{epi}\ g)^{\mathrm{I}}]^{\mathrm{a}} = (\mathrm{epi}\ g)^{\mathrm{a}} = \mathrm{epi}\ g^{\mathrm{a}}, \\ \mathrm{dom}\ f^{\mathrm{a}} = \mathrm{dom}\ g^{\mathrm{a}}, \end{cases}$$

である．ここで，$\boldsymbol{x}_0 \notin \mathrm{dom}\ f^{\mathrm{a}} = \mathrm{dom}\ g^{\mathrm{a}}$ ならば，

$$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) = g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \infty,$$

となって，結論を得る．$\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{dom}\ f^{\mathrm{a}} = \mathrm{dom}\ g^{\mathrm{a}}$ ならば，定理5（i）により，$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)$，$g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) \in \boldsymbol{R}$ であるから，

$$(\boldsymbol{x}_0, f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)) \in \mathrm{epi}\ f^{\mathrm{a}} = \mathrm{epi}\ g^{\mathrm{a}}, \quad (\boldsymbol{x}_0, g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)) \in \mathrm{epi}\ g^{\mathrm{a}} = \mathrm{epi}\ f^{\mathrm{a}},$$

すなわち，

$$g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) \leqq f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) \leqq g^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0),$$

となって，結論を得る．　‖

定理 8　真凸拡張関数 $f : \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と f の閉包拡張関数 $f^{\mathrm{a}} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，次の（i）（ii）が成立する．

（i）　f^{a} は閉真凸拡張関数である．

（ii）　$^\forall \boldsymbol{x} \in (\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}} \cup [(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}} : f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$.

証明　（i）．定理5（i），注意6により，f^{a} は下方半連続凸拡張関数である．仮定と定理5系により，$\emptyset \neq \mathrm{dom}\ f \subset \mathrm{dom}\ f^{\mathrm{a}}$，であることを考えて，$\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{dom}\ f \subset \mathrm{dom}\ f^{\mathrm{a}}$ を任意所与とする．$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) < \infty$，であるから，定理5（i）により，$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0) \in \boldsymbol{R}$．よって，定理6系により，結論を得る．

（ii）．$\boldsymbol{x}_0 \in (\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}} \cup [(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}}$ を任意所与とし，$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) := \{\boldsymbol{x}_0\} \times \boldsymbol{R}$，とおく．<u>$\boldsymbol{x}_0 \in (\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}}$ のとき</u>．$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R})$ はアフィン集合であり，定理7により，$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) \cap (\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{I}} \neq \emptyset$ であることに注目すると，〔4〕定理21系により，

① $\quad (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) \cap \mathrm{epi}\ f^{\mathrm{a}} = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) \cap (\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{a}} = [(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) \cap \mathrm{epi}\ f]^{\mathrm{a}} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$

である．また，今の場合には，

② $\quad (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) \cap \mathrm{epi}\ f = [(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) \cap \mathrm{epi}\ f]^{\mathrm{a}}$

が成立している．なぜなら，$(\boldsymbol{x}_0, \mu) \in [(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) \cap \mathrm{epi}\ f]^{\mathrm{a}}$，とすると，$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}) \cap \mathrm{epi}\ f$ の点列 $\langle(\boldsymbol{x}_0, \mu_\nu)\rangle_{\nu \in N}$，$(\boldsymbol{x}_0, \mu_\nu) \to (\boldsymbol{x}_0, \mu)\ (\nu \to \infty)$，が存在するが，この点列については，

$$^\forall \nu \in \boldsymbol{N} : f(\boldsymbol{x}_0) \leqq \mu_\nu < \infty,$$

であるから，特に，$f(\boldsymbol{x}_0)\leqq\mu$，となって，$(\boldsymbol{x}_0, \mu)\in(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R})\cap\mathrm{epi}\,f$，となるからである．よって，①②により，

$$③\quad (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R})\cap\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{a}}=(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R})\cap\mathrm{epi}\,f.$$

ところで，$\boldsymbol{x}_0\in\mathrm{dom}\,f$ であることと(i)の結果とにより，$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)\in\boldsymbol{R}$，であるから，$(\boldsymbol{x}_0, f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0))\in(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R})\cap\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{a}}$，であるが，③により，$(\boldsymbol{x}_0, f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0))\in(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R})\cap\mathrm{epi}\,f$，すなわち，$f(\boldsymbol{x}_0)\leqq f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)$．よって，定理5(i)により，結論を得る．$\underline{\boldsymbol{x}_0\in[(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}}\text{ のとき}}$．定理5系(i)により，

$$[(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}}\subset(\mathrm{dom}\,f^{\mathrm{a}})^{\mathrm{c}}\subset(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{c}},$$

であるから，$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{x}_0)=\infty$，となって，結論を得る．　‖

系　真凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ は，$\mathrm{dom}\,f$ がアフィン集合ならば，

$$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n: f(\boldsymbol{x})=f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}),$$

すなわち，閉真凸拡張関数である．

証明　$\mathrm{dom}\,f$ がアフィン集合ならば，〔4〕定義10と〔4〕注意7により，

$$(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}}=\mathrm{dom}\,f=(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{a}},\ [(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}}]^{\mathrm{c}}=(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{c}}=[(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}},$$

であるから，

$$(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}}\cup[(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}}=\mathrm{dom}\,f\cup(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{c}}=\boldsymbol{R}^n,$$

となり，定理8(ii)により，結論を得る．　‖

定理9　凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ は，任意所与の $\boldsymbol{x}_0\in(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}}\cup[(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{c}}$ において，下方半連続である．

証明　f が真凸ならば，定理5と定理8により，結論を得るので，以下，f が非真凸の場合について証明する．$\underline{\boldsymbol{x}_0\in(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}}\text{ のとき}}$．相対内部の定義と〔4〕定理21系1(ii)により，

$$\exists\bar{\varepsilon}\in\boldsymbol{R}_+\ \forall\delta_0\in\{\delta\mid\delta\in\boldsymbol{R}_+,\ \delta<\bar{\varepsilon}\}:$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\delta_0)\cap\mathcal{A}(\mathrm{dom}\,f)\subset(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}},$$

——ただし，$\mathcal{A}(\mathrm{dom}\,f)$ は $\mathrm{dom}\,f$ のアフィン包——であるから，定理6により，

$$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})=\lim_{\delta\to0}\inf\{f(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0;\delta)\}=-\infty=f(\boldsymbol{x}_0),$$

となって，結論を得る．$x_0 \in [(\mathrm{dom}\ f)^a]^c$ (R^n の開集合）のとき．開集合の定義により，

$$^{\exists}\bar{\varepsilon} \in R_+ {}^{\forall}\delta_0 \in \{\delta \mid \delta \in R_+,\ \delta < \bar{\varepsilon}\}:$$
$$B(x_0;\delta_0) \subset [(\mathrm{dom}\ f)^a]^c \subset (\mathrm{dom}\ f)^c,$$

であるから，

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\delta \to 0} \inf\{f(x) \mid x \in B(x_0;\delta)\} = \infty = f(x_0),$$

となって，結論を得る．　‖

定理10　凸拡張関数 $f: R^n \to R \cup \{-\infty, \infty\}$，$f$ の閉包拡張関数 $f^a: R^n \to R \cup \{-\infty, \infty\}$，所与の $\bar{x} \in (\mathrm{dom}\ f)^I$ 及び区間 $(0,1] := \{\xi \in R_+ \mid \xi \leqq 1\}$ に対して，次の(i)(ii)が成立する．

(i)　f が真凸ならば，

$$^{\forall}x_0 \in R^n,\ x_0 \neq \bar{x}: f^a(x_0) = \lim_{\xi \downarrow 0} f[x_0 + \xi \cdot (\bar{x} - x_0)],\ \xi \in (0,1].$$

(ii)　f が非真凸ならば，

$$^{\forall}x_0 \in (\mathrm{dom}\ f)^a,\ \ x_0 \neq \bar{x}:$$
$$f^a(x_0) = \lim_{\xi \downarrow 0} f[x_0 + \xi \cdot (\bar{x} - x_0)],\ \ \xi \in (0,1].$$

証明　(i)．$x_0 \in R^n$ を任意所与とし，$\alpha_0 := f^a(x_0)$ とおく．

$$\inf\{f(x) \mid x \in B(x_0;\xi\|\bar{x} - x_0\|)\}$$
$$\leqq \inf\{f[x_0 + \eta \cdot (\bar{x} - x_0)] \mid \eta \in (0,\xi)\},$$

であるから，定理5(i)と定義2により，

$$① \quad \alpha_0 := f^a(x_0) = \liminf_{x \to x_0} f(x)$$
$$= \lim_{\xi \downarrow 0} \inf\{f(x) \mid x \in B(x_0;\xi\|\bar{x} - x_0\|)\}$$
$$\leqq \lim_{\xi \downarrow 0} \inf\{f[x_0 + \eta \cdot (\bar{x} - x_0)] \mid \eta \in (0,\xi)\}$$
$$= \liminf_{\xi \downarrow 0} f[x_0 + \xi \cdot (\bar{x} - x_0)]$$

——$\alpha_0 = -\infty$ ならば，ここで直ちに結論を得るので，以下，$\alpha_0 \in R$ の場合について証明する——．一方，$\bar{\mu} \in \{\mu \mid \max(\alpha_0, f(\bar{x})) < \mu\} \subset R$ を固定すると，定理7により，$(\bar{x}, \mu) \in (\mathrm{epi}\ f)^I$ であり，また，$(x_0, \alpha_0) \in \mathrm{epi}\ f^a = (\mathrm{epi}\ f)^a$

であるから，〔4〕定理18(iii) により，

$$\forall \eta \in (0,1]: (\boldsymbol{x}_0, \alpha_0)+\eta\cdot[(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\mu})-(\boldsymbol{x}_0, \alpha_0)]$$
$$=(\boldsymbol{x}_0+\eta\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0),\ \alpha_0+\eta\cdot(\bar{\mu}-\alpha_0))\in(\mathrm{epi}\ f)^{\mathrm{I}},$$

すなわち，

$$\forall \eta \in (0,1]: f[\boldsymbol{x}_0+\eta\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)]<\alpha_0+\eta\cdot(\bar{\mu}-\alpha_0),$$

であるから，

$$\forall \xi \in (0,1]:\quad \sup\{f[\boldsymbol{x}_0+\eta\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)] \mid \eta\in(0,\xi)\}$$
$$\leqq \sup\{\alpha_0+\eta\cdot(\bar{\mu}-\alpha_0) \mid \eta\in(0,\xi)\}=\alpha_0+\xi\cdot(\bar{\mu}-\alpha_0),$$

となり，定義2により，

② $$\limsup_{\xi\downarrow 0} f[\boldsymbol{x}_0+\xi\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)]$$
$$=\lim_{\xi\downarrow 0}\sup\{f[\boldsymbol{x}_0+\eta\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)] \mid \eta\in(0,\xi)\}$$
$$\leqq \lim_{\xi\downarrow 0}[\alpha_0+\xi\cdot(\bar{\mu}-\alpha_0)]=\alpha_0 := f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0).$$

よって，①② 及び定義2により，結論を得る．

(ii)．$\boldsymbol{x}_0\in(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}$ を任意所与とする．〔4〕定理18(iii) により，

$$\forall \xi \in (0,1]: \boldsymbol{x}_0+\xi\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)\in(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}}.$$

よって，定義8及び定理6により，

$$\forall \xi \in (0,1]: f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)=-\infty=f[\boldsymbol{x}_0+\xi\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)],$$

となって，結論を得る． ‖

系　閉真凸拡張関数 $f(\equiv f^{\mathrm{a}}): \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ と所与の $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathrm{dom}\ f$ に対して，次の関係が成立する．

$$\forall \boldsymbol{x}_0\in\mathrm{dom}\ f: f(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{\xi\downarrow 0} f[\boldsymbol{x}_0+\xi\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)],\ \xi\in(0,1].$$

証明　$\boldsymbol{x}_0\in\mathrm{dom}\ f$ を任意所与とし，$\alpha_0 := f(\boldsymbol{x}_0)$，$\alpha := f(\bar{\boldsymbol{x}})$ とおく．$\mathrm{dom}\ f\subset(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{a}}=(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}}\cup(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{B}}$ であることに注目しておく．$\bar{\boldsymbol{x}}\in(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{I}}$ のとき．定理10(i)により，明らかである．$\bar{\boldsymbol{x}}\in(\mathrm{dom}\ f)^{\mathrm{B}}$ のとき．定理5(i)と仮定により，定理10の証明①式と同様にして，

① $$\alpha_0 := f(\boldsymbol{x}_0)=f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)\leqq \liminf_{\xi\downarrow 0} f[\boldsymbol{x}_0+\xi\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)],\ \xi\in(0,1]$$

——$\alpha_0=\infty$ ならば，ここで直ちに結論が得られるので，以下，$\alpha_0\in\boldsymbol{R}$ の場合について証明する——．一方，$(\bar{\boldsymbol{x}},\ \bar{\alpha})$，$(\boldsymbol{x}_0,\ \alpha_0)\in\mathrm{epi}\,f$ であるから，

$$\begin{aligned}\forall\eta\in(0,1]:\ &(\boldsymbol{x}_0,\ \alpha_0)+\eta\cdot[(\bar{\boldsymbol{x}},\ \bar{\alpha})-(\boldsymbol{x}_0,\ \alpha_0)]\\&=(\boldsymbol{x}_0+\eta\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0),\ \alpha_0+\eta\cdot(\bar{\alpha}-\alpha_0))\in\mathrm{epi}\,f,\end{aligned}$$

すなわち，

$$\forall\eta\in(0,1]:f[\boldsymbol{x}_0+\eta\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)]\leqq\alpha_0+\eta\cdot(\bar{\alpha}-\alpha_0),$$

である．以下，定理10(i)の証明法と全く同様にすると，

② $$\limsup_{\xi\downarrow 0} f[\boldsymbol{x}_0+\xi\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)]\leqq\lim_{\xi\downarrow 0}[\alpha_0+\xi\cdot(\bar{\alpha}-\alpha_0)]=\alpha_0:=f(\boldsymbol{x}_0).$$

よって，①② 及び定義2により，結論を得る．‖

定理11　真凸拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$，所与の $\bar{\mu}\in\boldsymbol{R},\bar{\mu}>\inf\{f(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\}$，及び f の $\bar{\mu}$ 準位集合 $\boldsymbol{S}(f,\bar{\mu}):=\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}\}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の(i)(ii)(iii)が成立する．

(i)　$\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}\}^{\mathrm{a}}=\{\boldsymbol{x}\mid f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}\}=\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})<\bar{\mu}\}^{\mathrm{a}}\subset\boldsymbol{R}^n.$

(ii)　$\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}\}^{\mathrm{I}}=\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})<\bar{\mu},\ \boldsymbol{x}\in(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}}\}=\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})<\bar{\mu}\}^{\mathrm{I}}\subset\boldsymbol{R}^n.$

(iii)　$\dim\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}\}^{\mathrm{a}}=\dim\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}\}^{\mathrm{I}}=\dim(\mathrm{dom}\,f).$

証明　$(\boldsymbol{R}^n,\ \bar{\mu}):=\boldsymbol{R}^n\times\{\bar{\mu}\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ とおく．$(\boldsymbol{R}^n,\ \bar{\mu})$ はアフィン集合である．$\bar{\mu}$ の仮定，定理7系1及び定理7により，

$$\exists\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{R}^n:f(\bar{\boldsymbol{x}})<\bar{\mu},\ \ \bar{\boldsymbol{x}}\in(\mathrm{dom}\,f)^{\mathrm{I}},\ \ \text{すなわち},\ \ (\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\mu})\in(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{I}},$$

であるから，$(\boldsymbol{R}^n,\ \bar{\mu})\cap(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$．よって，〔4〕定理21系により，

① $$\begin{cases}[(\boldsymbol{R}^n,\ \bar{\mu})\cap\mathrm{epi}\,f]^{\mathrm{a}}=(\boldsymbol{R}^n,\ \bar{\mu})\cap(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{a}}\\\qquad\qquad\qquad\qquad\ =(\boldsymbol{R}^n,\ \bar{\mu})\cap\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{a}}\subset\boldsymbol{R}^{n+1},\\[(\boldsymbol{R}^n,\ \bar{\mu})\cap\mathrm{epi}\,f]^{\mathrm{I}}=(\boldsymbol{R}^n,\ \bar{\mu})\cap(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{I}}\subset\boldsymbol{R}^{n+1},\end{cases}$$

であることに注目しておく．(i)の前半の等号の証明．$\boldsymbol{x}_0\in[\boldsymbol{S}(f,\bar{\mu})]^{\mathrm{a}}:=\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}\}^{\mathrm{a}}$ ならば，注意4により，$(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\mu})\in(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{a}}=\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{a}}$ であるから，$f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x}_0)\leqq\bar{\mu}$．一方，$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{S}(f^{\mathrm{a}},\ \bar{\mu}):=\{\boldsymbol{x}\mid f^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}\}$ ならば，$(\boldsymbol{x}_0,\ \bar{\mu})\in\mathrm{epi}\,f^{\mathrm{a}}=(\mathrm{epi}\,f)^{\mathrm{a}}$であるから，再び，注意4により，$\boldsymbol{x}_0\in[\boldsymbol{S}(f,\bar{\mu})]^{\mathrm{a}}$．よって，結論を得る．(ii)の前半の証明．注意4により，

② $\quad x \in \mathcal{A}S(f, \bar{\mu}) \Longleftrightarrow (x, \bar{\mu}) \in \mathcal{A}[(R^n, \bar{\mu}) \cap \mathrm{epi}\, f]$

であることに留意しておく．$x_0 \in [S(f, \bar{\mu})]^{\mathrm{I}} := \{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{I}} \subset R^n$ ならば，

③ $\quad {}^{\exists}\bar{\varepsilon} \in R_+ : B(x_0 ; \bar{\varepsilon}) \cap \mathcal{A}S(f, \bar{\mu}) \subset S(f, \bar{\mu})$,

すなわち，②と注意4により，

④ $\quad {}^{\exists}\bar{\varepsilon} \in R_+ : B((x_0, \bar{\mu}) ; \bar{\varepsilon}) \cap \mathcal{A}[(R^n, \bar{\mu}) \cap \mathrm{epi}\, f] \subset (R^n, \bar{\mu}) \cap \mathrm{epi}\, f$.

よって，①により，$(x_0, \bar{\mu}) \in (\mathrm{epi}\, f)^{\mathrm{I}}$ であるから，定理7により，$x_0 \in \{x \mid f(x) < \mu,\ x \in (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}}\} \subset R^n$．逆に，$x_0 \in \{x \mid f(x) < \mu,\ x \in (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}}\}$ ならば，定理7と①により，$(x_0, \bar{\mu}) \in [(R^n, \bar{\mu}) \cap \mathrm{epi}\, f]^{\mathrm{I}}$，すなわち，④が成立する．よって，②により，③が成立し，$x_0 \in [S(f, \bar{\mu})]^{\mathrm{I}}$．よって，結論を得る．<u>(i)(ii)の後半の等号の証明</u>．上で得られた結果により，

$$\{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{I}} \subset \{x \mid f(x) < \bar{\mu}\} \subset \{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{a}}.$$

よって，〔4〕定理19系1により，

⑤ $\quad \{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{a}} = \{x \mid f(x) < \bar{\mu}\}^{\mathrm{a}},\quad \{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{I}} = \{x \mid f(x) < \bar{\mu}\}^{\mathrm{I}}$,

となって，結論を得る．

(iii)．〔4〕定理18系1により，

$$\dim\{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{a}} = \dim\{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{I}} = \dim\{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}$$
$$= \dim[(R^n, \bar{\mu}) \cap \mathrm{epi}\, f] = \dim(\mathrm{epi}\, f) - 1 = \dim(\mathrm{dom}\, f). \qquad \|$$

系　閉真凸拡張関数 $f(\equiv f^{\mathrm{a}}) : R^n \to R \cup \{\infty\}$，所与の $\bar{\mu} \in R$, $\bar{\mu} > \inf\{f(x) \mid x \in R^n\}$ 及び f の $\bar{\mu}$ 準位集合 $S(f, \bar{\mu}) := \{x \mid f(x) \leqq \mu\}$ に対して，次の(i)(ii)が成立する．

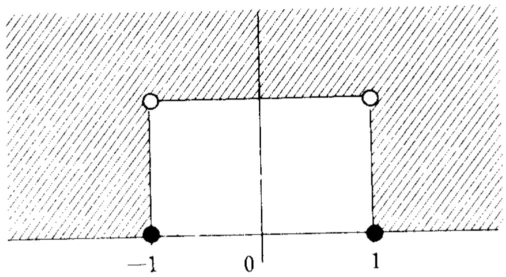
(i) $\quad \{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{a}} = \{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\} = \{x \mid f(x) < \bar{\mu}\}^{\mathrm{a}}$.

(ii) $\quad \mathrm{dom}\, f = (\mathrm{dom}\, f)^{\mathrm{I}} \Rightarrow$

$$\{x \mid f(x) \leqq \bar{\mu}\}^{\mathrm{I}} = \{x \mid f(x) < \bar{\mu}\} = \{x \mid f(x) < \bar{\mu}\}^{\mathrm{I}}.$$

証明　定理11により，直ちに結論を得る．　$\|$

注意10　開区間 $I := \{x \mid x < 1\} \subset R$ に対して，実関数 $\chi : I \to \{0, 1\}$ は I の定義関数，すなわち，$\chi(I) = 1$，$\chi(I^{\mathrm{c}}) = 0$ とする．定理4により，χ は下方半連続であり，また，任意所与の $\mu_0 \in R_+$ に対して，$S(\chi, \mu_0)$ と $S^{\circ}(\chi, \mu_0)$ は



凸集合，dom $\chi=(\mathrm{dom}\ \chi)^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{R}$（アフィン集合）である．しかし，$\chi$は凸実関数ではない．$\mu_0=1$とすると，

$$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{S}(\chi,1)]^{\mathrm{I}}\dotplus[\boldsymbol{S}^{\circ}(\chi,1)]^{\mathrm{I}}=(\boldsymbol{I}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{I}},$$
$$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{S}(\chi,1)]^{\mathrm{a}}\dotplus[\boldsymbol{S}^{\circ}(\chi,1)]^{\mathrm{a}}=(\boldsymbol{I}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{a}},$$

となって，定理11系は成立しない．このように，χ が凸実関数でない，すなわち，epi χ が凸集合でない場合には，一般に，定理11の証明中の①式や⑤式の成立が保証されない結果，定理11系の成立も主張されない．

定理12　k 個の閉真凸拡張関数 $f_i:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$, $i=1,\cdots,k$ に対して，拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^{nk}\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ を，

$$\boldsymbol{x}:=(\boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_k)\in\boldsymbol{R}^{nk}\ \text{は}\ nk\ \text{次列ベクトル},\quad \boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{R}^n,$$

として，

$$f(\boldsymbol{x}):=\sum_{i=1}^{k}f_i(\boldsymbol{x}_i)$$

によって定義すると，f は閉真凸拡張関数である．

証明　f が凸であること．$(\boldsymbol{x}^{(\nu)},\ \mu^{(\nu)})\in\mathrm{epi}\ f$, $\nu=1,2$, $(\theta^{(1)},\ \theta^{(2)})\in\varDelta_{\oplus}$ を任意所与とする．

$$① \qquad f(\boldsymbol{x}^{(\nu)}):=\sum_{i=1}^{k}f_i(\boldsymbol{x}_i^{(\nu)})\leqq\mu^{(\nu)}$$

であるが，

$$② \qquad \begin{cases}\mu_i^{(\nu)}:=f_i(\boldsymbol{x}_i^{(\nu)}), \quad i=1,\cdots,k-1,\\ \mu_k^{(\nu)}:=\mu^{(\nu)}-\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i^{(\nu)}\geqq f_k(\boldsymbol{x}_k^{(\nu)})\end{cases}$$

とおくと，$(\boldsymbol{x}_i^{(\nu)},\ \mu_i^{(\nu)})\in\mathrm{epi}\ f_i$ であるから

$$\forall i(1\leqq i\leqq k):\sum_{\nu=1}^{2}\theta^{(\nu)}\cdot(\boldsymbol{x}_i^{(\nu)},\ \mu_i^{(\nu)})$$
$$=(\sum_{\nu=1}^{2}\theta^{(\nu)}\boldsymbol{x}_i^{(\nu)},\ \sum_{\nu=1}^{2}\theta^{(\nu)}\mu_i^{(\nu)})\in\mathrm{epi}\ f_i,$$

すなわち，

$$f(\sum_{\nu=1}^{2}\theta^{(\nu)}\boldsymbol{x}^{(\nu)})=\sum_{i=1}^{k}f_i(\sum_{\nu=1}^{2}\theta^{(\nu)}\boldsymbol{x}_i^{(\nu)})$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{2} \theta^{(\nu)} \mu_i^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{2} \theta^{(\nu)} \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{2} \theta^{(\nu)} \mu^{(\nu)}$$

となって，

$$\left(\sum_{\nu=1}^{2} \theta^{(\nu)} \boldsymbol{x}^{(\nu)},\ \sum_{\nu=1}^{2} \theta^{(\nu)} \mu^{(\nu)}\right) = \sum_{\nu=1}^{2} \theta^{(\nu)} \cdot (\boldsymbol{x}^{(\nu)},\ \mu^{(\nu)}) \in \mathrm{epi}\ f.$$

よって，f は凸である．f が閉であること．epi f の任意所与の収束点列を $\langle(\boldsymbol{x}^{(\nu)},\ \mu^{(\nu)})\rangle$，$(\boldsymbol{x}^{(\nu)},\ \mu^{(\nu)}) \to (\boldsymbol{x}^{(0)},\ \mu^{(0)})$ $(\nu\to\infty)$ とする．この点列に対しては，①が成立しているから，②と全く同様にして，k 個の点列 $\langle\mu_i^{(\nu)}\rangle$，$i=1,\cdots,k$ を定めると，epi f_i の収束点列 $\langle(\boldsymbol{x}_i^{(\nu)},\ \mu_i^{(\nu)})\rangle$，$(\boldsymbol{x}_i^{(\nu)},\ \mu_i^{(\nu)}) \to (\boldsymbol{x}_i^{(0)},\ \mu_i^{(0)})$ $(\nu\to\infty)$ が定められる．仮定により，epi f_i は閉であるから，$(\boldsymbol{x}_i^{(0)},\ \mu_i^{(0)}) \in \mathrm{epi}\ f_i$，すなわち，

$$\forall i\ (1 \leqq i \leqq k) : f_i(\boldsymbol{x}_i^{(0)}) \leqq \mu_i^{(0)}.$$

よって，

$$f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\boldsymbol{x}_i^{(0)}) \leqq \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(0)} = \mu^{(0)},$$

となり，epi f は閉である．すなわち，f は閉である．最後に，f が真であること，すなわち，

$$\begin{cases} \mathrm{dom}\ f \neq \emptyset, \\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{nk} : f(\boldsymbol{x}) > -\infty, \end{cases}$$

であることは自明である．　‖

参 考 文 献

〔1〕 Avriel. M., *Nonlinear Programming : Analysis and Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

〔2〕 Bazaraa, M. S.- Shetty, C. M., *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

〔3〕 Clarke, F. H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

〔4〕 福尾洋一「凸集合」『経済学論究（関西学院大学）』34（1）（1980），pp. 29—52.

〔5〕 福尾洋一「凸拡張関数」『経済学論究（関西学院大学）』35（4）（1982），pp. 53—73.

〔6〕 福島雅夫『非線形最適化の理論』産業図書，1980年.

〔7〕 今野　浩・山下　浩『非線形計画法』日科技連，1978年.

[8] Mangasarian, O. L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969. (関根智明訳『非線形計画法』培風館, 1972年.)
[9] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
[10] Stoer, J.-Witzgall, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer-Verlag, Berin, 1970.