凸拡張関数の生成と凸集合の部分加法

福　尾　洋　一

§0　序

凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \cup \{-\infty, \infty\}$ の epi $f \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ は，定義により，凸集合である．逆に，凸集合 $C \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ が与えられるとき，適当な方法によって，（$\boldsymbol{R}^n$ 上の）凸拡張関数を生成することはできないだろうか．文献〔6〕の第5章で考察されたこの問題が，本稿で取り上げる第1の課題である．その解答は，定理1によって与えられる．

次に，定理1を土台にして，幾つかの凸拡張関数を生成する．生成された凸拡張関数のあるものは，凸集合の部分加法概念と関連付けることができる．これを示すのが本稿の第2の目的である．凸集合の部分加法の概念は，これもまた文献〔6〕で定義されたものであるが，必ずしも普及しているとは思えない．あるいは，邦語文献には全く見られない概念であるかもしれない．もしそうであるならば，この概念の重要性の程は別であるが，本稿はその紹介もかねることになる．

以下において，説明なしに使用される記号は，すべて文献〔1〕—〔4〕で約束されたものである．

§1　凸拡張関数の生成

定理1　凸集合 $C \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ に対して，

$$X := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n,\ ^\exists \mu \in \boldsymbol{R} : (\boldsymbol{x}, \mu) \in C\}$$

とおくとき，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in X \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) := \inf\{\mu \mid \mu \in \boldsymbol{R},\ (\boldsymbol{x}, \mu) \in C\}, \\ \boldsymbol{x} \in X^c \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) := \infty \end{cases}$$

によって定義される拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ は，凸拡張関数である．

証明　$(\boldsymbol{x}_1, \mu_1)$，$(\boldsymbol{x}_2, \mu_2) \in \mathrm{epi}\, f \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ —— したがって，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$ ——，及び $(\theta_1, \theta_2) \in \Delta_\oplus$ は，それぞれ，任意所与とする．inf の定義により，

$$^\forall \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+ {}^\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R} :$$

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}_1) \leqq \lambda_1 < f(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon, & (\boldsymbol{x}_1, \lambda_1) \in C, \\ f(\boldsymbol{x}_2) \leqq \lambda_2 < f(\boldsymbol{x}_2) + \varepsilon, & (\boldsymbol{x}_2, \lambda_2) \in C. \end{cases}$$

そこで，任意所与の $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ に対して，上の関係を満たす $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}$ を固定することにする．

$$\theta_1 \cdot (\boldsymbol{x}_1, \lambda_1) + \theta_2 \cdot (\boldsymbol{x}_2, \lambda_2) = (\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2, \theta_1 \lambda_1 + \theta_2 \lambda_2) \in C$$

であるから，f の定義により，

$$\begin{aligned} f(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) &\leqq \theta_1 \lambda_1 + \theta_2 \lambda_2 \\ &< \theta_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2 f(\boldsymbol{x}_2) + \varepsilon \leqq \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

ここで，$\varepsilon \to 0$ とすれば，$(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2, \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2) \in \mathrm{epi}\, f$ となって，結論を得る．　‖

注意 1　拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ が凸拡張関数ならば，定義により，$\mathrm{epi}\, f \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ は凸集合であるが，逆に，凸集合 $C \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ が与えられると，定理 1 の方法により，凸拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を作ることが常にできる．

定義 1　下限たたみこみ拡張関数

2 つの拡張関数 $f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, $i = 1, 2$, に対して，

$$\begin{aligned} (f_1 \oplus f_2)(\boldsymbol{x}) &:= \inf\{f_1(\boldsymbol{x}_1) + f_2(\boldsymbol{x}_2) \mid \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}\} \\ &= \inf\{f_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + f_2(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n\} \end{aligned}$$

によって定義される拡張関数 $f_1 \oplus f_2 : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を f_1 と f_2 の下限

たたみこみ拡張関数（infimal convolution）という[1]．同様に，k 個の拡張数 $f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, $i=1, \cdots, k$，に対して，

$$(\bigoplus_{i=1}^{k} f_i)(\boldsymbol{x}) := (f_1 \oplus \cdots \oplus f_k)(\boldsymbol{x}) := \inf\{\sum_{i=1}^{k} f_i(\boldsymbol{x}_i) \mid \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}\}$$

によって定義される拡張関数 $\bigoplus_{i=1}^{k} f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ を $f_1, \cdots, f_k$ の下限たたみこみ拡張関数という．

定理 2　下限たたみこみ拡張関数に関して，次の関係が成立する．

（1）　2つの真凸拡張関数 $f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, $i=1,2$，に対して，下限たたみこみ拡張関数 $f_1 \oplus f_2 : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ は凸拡張関数である．

（2）　k 個の真凸拡張関数 $f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $i=1, \cdots, k$，に対して $\bigoplus_{i=1}^{k} f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ は凸拡張関数である．

証明　（1）のみを示す．

$$C := \left\{ (\boldsymbol{x}, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{R}^n,\ \mu = \mu_1 + \mu_2 \in \boldsymbol{R}, \\ (\boldsymbol{x}_1, \mu_1) \in \mathrm{epi}\, f_1,\ (\boldsymbol{x}_2, \mu_2) \in \mathrm{epi}\, f_2 \end{array} \right\} \in \boldsymbol{R}^{n+1}$$

とおくと，真凸拡張関数の定義により，C は非空・凸集合である．そこで，今，この C に対して，

$$\boldsymbol{X} := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, {}^{\exists}(\boldsymbol{x}, \mu) \in C\}$$

とおくと，定義1により，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \Rightarrow (f_1 \oplus f_2)(\boldsymbol{x}) := \inf\{f_1(\boldsymbol{x}_1) + f_2(\boldsymbol{x}_2) \mid \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \inf\{\mu \mid \mu = \mu_1 + \mu_2 \in \boldsymbol{R}, (\boldsymbol{x}, \mu) \in C\}, \\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}^{\mathrm{c}} \Rightarrow (f_1 \oplus f_2)(\boldsymbol{x}) := \inf\{f_1(\boldsymbol{x}_1) + f_2(\boldsymbol{x}_2) \mid \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}\} = \infty \end{cases}$$

となって，定理1により，結論を得る．　‖

注意 2　$C \subset \boldsymbol{R}^n$ は凸集合とする．2つの真凸拡張関数 $f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, $i=1,2$，をそれぞれ，

$$f_1(\boldsymbol{x}_1) := \|\boldsymbol{x}_1\| \text{—ユークリッド・ノルム—},$$

$$f_2(\boldsymbol{x}_2) := \delta(\boldsymbol{x}_2 \mid C) \text{—表示関数—}$$

とおくと，

1）　ある $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，$(f_1 \oplus f_2)(\boldsymbol{x}) = -\infty$ となる可能性を排除できない．

$$(f_1 \oplus f_2)(\boldsymbol{x}) := \inf\{f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + f_2(\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n\}$$
$$= \inf\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| + \delta(\boldsymbol{y} \mid C) \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n\}$$
$$= \inf\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \mid \boldsymbol{y} \in C\} = d(\boldsymbol{x}, C)$$

となるから，距離関数 $d(\cdot, C): \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ は，定理 2 により，凸実関数である[1]．

定理 3　凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $h: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 及び線形変換 $g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ に対して，次に定義される拡張関数 (1)(2) は凸拡張関数である．

(1)　$f_{*g}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $f_{*g}(\boldsymbol{y}) := \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$.

(2)　$h \circ g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $(h \circ g)(\boldsymbol{x}) = h[g(\boldsymbol{x})]$.[2]

証明　(1)．直接的方法によっても証明できるが，ここでは，定理 1 を利用して証明する．文献〔1〕の定理14により，g はある 1 意的な (m, n) 型行列 $\boldsymbol{M}$ によって，$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ と表すことができることを考慮して，線形変換 $\psi: \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^{m+1}$ を

$$\psi(\boldsymbol{x}, \mu) := [\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_{n+1}](\boldsymbol{x}, \mu) = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}, \mu) = (g(\boldsymbol{x}), \mu),$$

ただし，$\boldsymbol{e}_{n+1}$ は $n+1$ 次単位ベクトル，

によって定義しておく．そうすると，凸集合

$$\psi(\mathrm{epi}\, f) = \{\psi(\boldsymbol{x}, \mu) \mid f(\boldsymbol{x}) \leqq \mu\} = \{(g(\boldsymbol{x}), \mu) \mid f(\boldsymbol{x}) \leqq \mu\}$$
$$= \{(\boldsymbol{y}, \mu) \mid f(\boldsymbol{x}) \leqq \mu, g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$$

に対して，

$$\boldsymbol{Y} := \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n, {}^{\exists}\mu \in \boldsymbol{R}: (\boldsymbol{y}, \mu) \in \psi(\mathrm{epi}\, f)\}$$

とおくとき，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ ならば，

$$\inf\{\mu \mid (\boldsymbol{y}, \mu) \in \psi(\mathrm{epi}\, f)\} = \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$$

となって，定理 1 により，結論を得る．

---

1)　cf. 文献〔4〕p. 64の脚注1)．

2)　Rockafellar〔6〕(p. 38) は，f_{*g} を f の g による像 (image of f under g)，$h \circ g$ を h の g による逆像 (inverse image of h under g) と呼んでいる．しかし，この呼び方は，像・逆像の通常の定義とはやや異っている．そこで，本稿では，〔6〕の定義を採らないことにした．

(2). $\mathrm{epi}(h\circ g)$ が凸集合であることを示せばよいが，g が線形変換であることから，このことは明らかである．　‖

定理 4　拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}, \mathrm{dom} f \neq \emptyset$，は凸拡張関数とする．任意所与の $\alpha\in \boldsymbol{R}_{\oplus}$ に対して，

$$\boldsymbol{F}\alpha := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n, {}^{\exists}\mu\in \boldsymbol{R}: (\boldsymbol{x}, \mu)\in \alpha\cdot \mathrm{epi} f\}, \boldsymbol{F}1=\mathrm{dom} f$$

とおくとき，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{F}\alpha \Rightarrow (f\alpha)(\boldsymbol{x}) := \inf\{\mu \mid (\boldsymbol{x}, \mu)\in \alpha\cdot \mathrm{epi} f\}, \\ \boldsymbol{x}\in (\boldsymbol{F}\alpha)^{\mathrm{c}} \Rightarrow (f\alpha)(\boldsymbol{x}) := \infty, \end{cases}$$

すなわち，

$$\alpha\cdot \mathrm{epi} f = \mathrm{epi}(f\alpha)$$

によって定義される拡張関数 $f\alpha: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ に対して，次の関係が成立する[1]．

(1)　$f\alpha$ は凸拡張関数である．

(2)　$$\begin{cases} {}^{\forall}\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n\, {}^{\forall}\alpha\in \boldsymbol{R}_+: (f\alpha)(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\alpha^{-1}\boldsymbol{x}), \\ {}^{\forall}\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n: (f0)(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} \mid \{\boldsymbol{0}\}), \end{cases}$$

ただし，$\delta: \boldsymbol{R}^n \to \{0, \infty\}$ は表示関数．

(3)　次の (i) (ii) は同値である．

(i)　f が正の 1 次同次拡張関数である．すなわち，

$${}^{\forall}\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n\, {}^{\forall}\alpha\in \boldsymbol{R}_+: f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}).$$

(ii)　${}^{\forall}\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n\, {}^{\forall}\alpha\in \boldsymbol{R}_+: (f\alpha)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$

証明　(1). 定理 1 そのものである．

(2). $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n = (\boldsymbol{F}\alpha)\cup(\boldsymbol{F}\alpha)^{\mathrm{c}}$, $\alpha\in \boldsymbol{R}_{\oplus} = \boldsymbol{R}_+\cup\{0\}$ は任意所与とする．$\underline{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{F}\alpha \text{ かつ } \alpha\in \boldsymbol{R}_+ \text{ のとき}}$．

$$\begin{aligned}(f\alpha)(\boldsymbol{x}) &:= \inf\{\mu \mid (\boldsymbol{x}, \mu)\in \alpha\cdot \mathrm{epi}\, f\} \\ &= \inf\{\mu \mid \alpha^{-1}\cdot(\boldsymbol{x}, \mu)\in \mathrm{epi} f\} \\ &= \alpha\cdot \inf\{\alpha^{-1}\mu \mid (\alpha^{-1}\boldsymbol{x}, \alpha^{-1}\mu)\in \mathrm{epi}\, f\}\end{aligned}$$

1)　$\mathrm{dom}(f\alpha) =: \boldsymbol{F}\alpha$ である．

$$=\alpha\cdot\inf\{\lambda\mid(\alpha^{-1}\boldsymbol{x},\lambda)\in\mathrm{epi}\,f\}$$
$$=\alpha f(\alpha^{-1}\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{F}\alpha)^{c}$ かつ $\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}$ のとき．任意所与の $\mu\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\alpha^{-1}\cdot(\boldsymbol{x},\mu)=(\alpha^{-1}\boldsymbol{x},\alpha^{-1}\mu)\in(\mathrm{epi}\,f)^{c}$ であるから，$f(\alpha^{-1}\boldsymbol{x})=\infty$．よって，

$$f(\alpha^{-1}\boldsymbol{x})=\infty=(f\alpha)(\boldsymbol{x}).$$

$\alpha=0$ のとき．$0\cdot\mathrm{epi}\,f=\{(\boldsymbol{0},0)\}$ であるから，$\boldsymbol{F}0=\{\boldsymbol{0}\}\subset\boldsymbol{R}^{n}$．よって，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}0$ であって，

$$(f0)(\boldsymbol{0}):=\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{0},\mu)\in\{(\boldsymbol{0},0)\}\}=0=\delta(\boldsymbol{x}\mid\{\boldsymbol{0}\}).$$

$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{F}0)^{c}$ であって，

$$(f0)(\boldsymbol{x})=\infty=\delta(\boldsymbol{x}\mid\{\boldsymbol{0}\}).$$

（3）．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}$ 及び $\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}$ は，それぞれ，任意所与とする．（i）⇒（ii）．（i）により，$f(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha f(\boldsymbol{x})$ であるから，（2）により，

$$f(\boldsymbol{x})=f(\alpha\alpha^{-1}\boldsymbol{x})=\alpha f(\alpha^{-1}\boldsymbol{x})=(f\alpha)(\boldsymbol{x}).$$

（ii）⇒（i）．（ii）と（2）により，

$$f(\alpha\boldsymbol{x})=(f\alpha)(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha f(\alpha^{-1}\alpha\boldsymbol{x})=\alpha f(\boldsymbol{x}).\qquad\|$$

定理 5　拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^{n}\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\},\ \mathrm{dom}\,f\neq\emptyset$，は凸拡張関数とする．

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}_{\oplus}:=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n},\ ^{\exists}\mu\in\boldsymbol{R}:(\boldsymbol{x},\mu)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f:=\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}}(\alpha\cdot\mathrm{epi}\,f)\}$$

とおくとき，

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}_{\oplus}\Rightarrow(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x}):=\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x},\mu)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f\},\\ \boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}_{\oplus})^{c}\Rightarrow(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x}):=\infty,\end{cases}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}\,f=\mathrm{epi}\,(f\boldsymbol{R}_{\oplus})$$

によって定義される拡張関数 $f\boldsymbol{R}_{\oplus}:\boldsymbol{R}^{n}\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ に対して，次の関係が成立する．[1]

（1）　$f\boldsymbol{R}_{\oplus}$ は正の1次同次凸拡張関数である．

（2）　$^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}:(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})=\inf\{(f\alpha)(\boldsymbol{x})\mid\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}$.

1)　$\mathrm{dom}(f\boldsymbol{R}_{\oplus})=\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}_{\oplus}$ である．

（3）　$fR_{\oplus}$ は，$g(0)\leqq 0$，$g\leqq f$，であるようなすべての正の1次同次凸拡張関数 $g: R^n \to R\cup\{-\infty, \infty\}$ のうち，最大の拡張関数である．

証明　（1）．$fR_{\oplus}$ が凸拡張関数であることは，定理1により，自明であるので，$fR_{\oplus}$ が正の1次同次拡張関数であることを示す．$x\in R^n$ 及び $\alpha\in R_+$ は任意所与とする．$R_{\oplus}\mathrm{epi}f$ は凸錐であるから，$\alpha R_{\oplus}\mathrm{epi}f=\alpha^{-1}R_{\oplus}\mathrm{epi}f=R_{\oplus}\mathrm{epi}f$ であることに注目しておく．<u>$x\in FR_{\oplus}$ のとき</u>．

$$
\begin{aligned}
(fR_{\oplus})(\alpha x) &:= \inf\{\mu \mid (\alpha x, \mu)\in R_{\oplus}\mathrm{epi}f\}\\
&= \inf\{\mu \mid (x, \alpha^{-1}\mu)\in R_{\oplus}\mathrm{epi}f\}\\
&= \alpha\cdot\inf\{\alpha^{-1}\mu \mid (x, \alpha^{-1}\mu)\in R_{\oplus}\mathrm{epi}f\}\\
&= \alpha\cdot\inf\{\lambda \mid (x, \lambda)\in R_{\oplus}\mathrm{epi}f\}\\
&= \alpha\cdot(fR_{\oplus})(x).
\end{aligned}
$$

<u>$x\in(FR_{\oplus})^c$ のとき</u>．$\mu\in R$ は任意所与とする．$(x, \alpha^{-1}\mu)\in(R_{\oplus}\mathrm{epi}f)^c$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\alpha x, \mu) &= \alpha\cdot(x, \alpha^{-1}\mu)\in\alpha\cdot(R_{\oplus}\mathrm{epi}f)^c\\
&= (\alpha R_{\oplus}\mathrm{epi}f)^c=(R_{\oplus}\mathrm{epi}f)^c.
\end{aligned}
$$

よって，$\alpha x\in(FR_{\oplus})^c$ であり，

$$(fR_{\oplus})(x)=(fR_{\oplus})(\alpha x)=\infty.$$

（2）．$x\in R^n$ は任意所与とし，

$$\eta(x) := \inf\{(f\alpha)(x) \mid \alpha\in R_{\oplus}\}$$

とおく．<u>$x\in FR_{\oplus}$ のとき</u>．任意所与の $\alpha\in R_{\oplus}$ に対して，$x\in F\alpha$ ならば，$\alpha\cdot\mathrm{epi}f\subset R_{\oplus}\mathrm{epi}f$ に留意すると，

$$
\begin{aligned}
&(fR_{\oplus})(x) := \inf\{\mu \mid (x, \mu)\in R_{\oplus}\mathrm{epi}f\}\\
&\leqq (f\alpha)(x) := \inf\{\mu \mid (x, \mu)\in\alpha\cdot\mathrm{epi}f\}
\end{aligned}
$$

である一方，$x\in(F\alpha)^c$ ならば，

$$(fR_{\oplus})(x)<(f\alpha)(x)=\infty$$

であるから，一般に，

$$(fR_{\oplus})(x)\leqq\eta(x).$$

さて，今，$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})<\eta(\boldsymbol{x})$ としてみよう．$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})$ の定義，すなわち，inf の定義により，

$$^{\exists}\bar{\mu}\in\boldsymbol{R}:(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})\leqq\bar{\mu}<\eta(\boldsymbol{x}),$$

$$(\boldsymbol{x},\bar{\mu})\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}f:=\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}}(\alpha\cdot\mathrm{epi}f).$$

上の関係を満たす $\bar{\mu}$ を固定し，$(\boldsymbol{x},\bar{\mu})\in\bar{\alpha}\cdot\mathrm{epi}f$，$\bar{\alpha}\in\boldsymbol{R}_{\oplus}$，とおくと，

$$\bar{\mu}\geqq\inf\{\mu|\ (\boldsymbol{x},\mu)\in\bar{\alpha}\cdot\mathrm{epi}f\}=(f\bar{\alpha})(\boldsymbol{x})\geqq\eta(\boldsymbol{x})$$

であるが，これは矛盾する．よって，

$$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})=\eta(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}_{\oplus})^{c}$ のとき．$\mu\in\boldsymbol{R}$ は任意所与とする．$(\boldsymbol{x},\mu)\in(\boldsymbol{R}_{\oplus}\mathrm{epi}f)^{c}=[\bigcup_{\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}}(\alpha\cdot\mathrm{epi}f)]^{c}=\bigcap_{\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}}(\alpha\cdot\mathrm{epi}f)^{c}$ であるから，任意所与の $\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}$ に対して，$(\boldsymbol{x},\mu)\in(\alpha\cdot\mathrm{epi}f)^{c}$，すなわち，$\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{F}\alpha)^{c}$ であり，$(f\alpha)(\boldsymbol{x})=\infty$．よって，

$$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})=\eta(\boldsymbol{x})=\infty.$$

（3）．$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{0})\leqq 0$ であること．上記（2）と定理4の（2）により，

$$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{0}):=\inf\{(f\alpha)(\boldsymbol{0})\mid\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}\leqq(f0)(\boldsymbol{0})=\delta(\boldsymbol{0}\mid\{\boldsymbol{0}\})=0.$$

$f\boldsymbol{R}_{\oplus}\leqq f$ であること．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}=(\boldsymbol{F}1)\cup(\boldsymbol{F}1)^{c}$ は任意所与とする．上記（2）と定理4の（2）により，

$$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})=\inf\{(f\alpha)(\boldsymbol{x})\mid\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}\leqq(f1)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})\leqq\infty.$$

条件を満たす拡張関数 g に対して，$g\leqq f\boldsymbol{R}_{\oplus}$ であること．$\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}$ に対して，

$$\boldsymbol{G}\alpha:=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n},\ ^{\exists}\mu\in\boldsymbol{R}:(\boldsymbol{x},\mu)\in\alpha\cdot\mathrm{epi}g\},\ \boldsymbol{G}1=\mathrm{dom}f$$

とおく．$g\leqq f$ により，$\mathrm{epi}f\subset\mathrm{epi}g$ であるから，$\boldsymbol{F}\alpha\subset\boldsymbol{G}\alpha$，$\boldsymbol{F}0=\boldsymbol{G}0=\{\boldsymbol{0}\}$ であることに注目しつつ，$\boldsymbol{G}\alpha$ に基づいて，$f\alpha$ と全く同様にして，拡張関数 $g\alpha:\boldsymbol{R}^{n}\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ を定義する．以下，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n}=(\boldsymbol{F}\alpha)\cup(\boldsymbol{F}\alpha)^{c}$ は任意所与とする．g は正の1次同次拡張関数であるから，定理4の（3）と上記（2）により，任意所与の $\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}$ に対して，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}\alpha\subset\boldsymbol{G}\alpha$ ならば，

$$g(\boldsymbol{x})=(g\alpha)(\boldsymbol{x}):=\inf\{\mu|\ (\boldsymbol{x},\mu)\in\alpha\cdot\mathrm{epi}g\}$$

$$\leqq(f\alpha)(\boldsymbol{x}):=\inf\{\mu|\ (\boldsymbol{x},\mu)\in\alpha\cdot\mathrm{epi}f\}<\infty,$$

$\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{F}\alpha)^{c}$ ならば，

$$g(\boldsymbol{x})=(g\alpha)(\boldsymbol{x})\leqq(f\alpha)(\boldsymbol{x})=\infty,$$

すなわち,

① $\quad {}^{\forall}\alpha\in \boldsymbol{R}_{+}:\ g(\boldsymbol{x})=(g\alpha)(\boldsymbol{x})\leqq \inf\{(f\beta)(\boldsymbol{x})\mid \beta\in \boldsymbol{R}_{+}\}.$

一方,$g(\boldsymbol{0})\leqq 0$ と定理4の(2)により,$\alpha=0$ に対しては,

$$② \quad \begin{cases} g(\boldsymbol{0})\leqq 0=\delta(\boldsymbol{0}\mid\{\boldsymbol{0}\})=(g0)(\boldsymbol{0})=(f0)(\boldsymbol{0}). \\ {}^{\forall}\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}:\ g(\boldsymbol{x})\leqq\infty=\delta(\boldsymbol{x}\mid\{\boldsymbol{0}\})=(g0)(\boldsymbol{x})=(f0)(\boldsymbol{x}). \end{cases}$$

よって,①,②及び上記(2)により,

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) &\leqq \inf\{(g\alpha)(\boldsymbol{x})\mid \alpha\in \boldsymbol{R}_{\oplus}\} \\ &\leqq \inf\{(f\alpha)(\boldsymbol{x})\mid \alpha\in \boldsymbol{R}_{\oplus}\}=(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

となって,結論を得る.　‖

注意 3　非空・凸集合 $C\subset \boldsymbol{R}^n$ に対して,拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\{0,\infty\}$ を

① $\quad f(\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x}\mid C)+1,\ \mathrm{dom}\, f=C$

によって定義する.$\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$ は任意所与とすると,定理4の(2)により,

$$\begin{cases} {}^{\forall}\alpha\in \boldsymbol{R}_{+}:\ (f\alpha)(\boldsymbol{x})=\alpha f(\alpha^{-1}\boldsymbol{x})=\alpha\cdot\{\delta(\alpha^{-1}\boldsymbol{x}\mid C)+1\} \\ \qquad\qquad =\alpha\delta(\alpha^{-1}\boldsymbol{x}\mid C)+\alpha=\alpha\delta(\boldsymbol{x}\mid \alpha C)+\alpha, \\ (f0)(\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{0}\mid\{\boldsymbol{0}\}) \end{cases}$$

であるから,定理5の(2)により,

$$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})=\inf\{(f\alpha)(\boldsymbol{x})\mid \alpha\in \boldsymbol{R}_{\oplus}\}=\inf\{\alpha\mid \alpha\in \boldsymbol{R}_{\oplus},\ \boldsymbol{x}\in \alpha C\}.$$

この①によって生成された正の1次同次凸拡張関数 $f\boldsymbol{R}_{\oplus}:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}_{\oplus}\cup\{\infty\}$ は,拡張ミンコフスキー関数であるが,定理5の(1)により,凸拡張関数である[1].

定理 6　拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\},\ \mathrm{dom}\, f\neq\emptyset$,は非凸・拡張関数とする.

$$FC:=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n,\ {}^{\exists}\mu\in \boldsymbol{R}:\ (\boldsymbol{x},\mu)\in \mathcal{C}(\mathrm{epi}\, f)\}$$

とおくとき,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}\in FC\Rightarrow (f\mathcal{C})(\boldsymbol{x}):=\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x},\mu)\in \mathcal{C}(\mathrm{epi}\, f)\}, \\ \boldsymbol{x}\in (FC)^{c}\Rightarrow (f\mathcal{C})(\boldsymbol{x}):=\infty, \end{cases}$$

すなわち,

---

1)　cf. 文献〔4〕p. 64の脚注. $C\subset \mathrm{dom}(f\boldsymbol{R}_{\oplus})$ であるから,$\boldsymbol{x}\in C$ ならば,
$(f\boldsymbol{R}_{\oplus})(\boldsymbol{x})=\mu(\boldsymbol{x}\mid C)$,ただし,$\mu(\cdot\mid C):C\to \boldsymbol{R}$ はミンコフスキー関数

$$\mathcal{C}(\mathrm{epi}\, f)=\mathrm{epi}\,(f\mathcal{C})$$

によって定義される拡張関数 $f\mathcal{C}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ に対して，次の関係が成立する[1].

（1） $f\mathcal{C}$ は凸拡張関数である.

（2） $\forall \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n: (f\mathcal{C})(\boldsymbol{x})=\inf\{\sum_{i=1}^{k}\theta_i f(\boldsymbol{x}_i) \mid (\dagger)\}$,

ただし，$(\dagger)$ $\sum_{i=1}^{k}\theta_i \boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}$, $(\theta_1, \cdots, \theta_k)\in\varDelta_{\oplus}^{k-1}$, $k\in\boldsymbol{N}$.

（3） $f\mathcal{C}$ は，$g\leqq f$ であるようなすべての凸拡張関数 $g: \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ のうち，最大の拡張関数である.

証明 （1）. 定理1そのものである.

（2）. $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n=(\boldsymbol{F}\mathcal{C})\cup(\boldsymbol{F}\mathcal{C})^c$ は任意所与とする. 文献〔2〕の定理5により,

$$\mathcal{C}(\mathrm{epi}\, f)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\theta_i\cdot(\boldsymbol{x}_i, \mu_i)\ \middle|\ \begin{array}{l}(\boldsymbol{x}_i, \mu_i)\in\mathrm{epi}\, f,\\ (\theta_1, \cdots, \theta_k)\in\varDelta_{\oplus}^{k-1}, k\in\boldsymbol{N}\end{array}\right\}$$

であるから，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}\mathcal{C}$ ならば,

$$\begin{aligned}(f\mathcal{C})(\boldsymbol{x})&\coloneqq\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x}, \mu)\in\mathcal{C}(\mathrm{epi}\, f)\}\\ &=\inf\{\sum_{i=1}^{k}\theta_i\mu_i \mid (\dagger), (\boldsymbol{x}_i, \mu_i)\in\mathrm{epi}\, f\}\\ &=\inf\{\sum_{i=1}^{k}\theta_i f(\boldsymbol{x}_i)\mid(\dagger)\}.\end{aligned}$$

一方，$\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{F}\mathcal{C})^c$ ならば,

$$\inf\{\sum_{i=1}^{k}\theta_i f(\boldsymbol{x}_i)\mid(\dagger)\}=\infty=(f\mathcal{C})(\boldsymbol{x}).$$

よって，結論を得る.

（3）. $g\leqq f$ により，$\mathrm{epi}\, f\subset\mathrm{epi}\, g$，すなわち，$\mathcal{C}(\mathrm{epi}\, f)\subset\mathrm{epi}\, g$ であるから，$\boldsymbol{F}\mathcal{C}\subset\mathrm{dom}\, g$ であることに注目しておく. ここで，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n=(\boldsymbol{F}\mathcal{C})\cup(\boldsymbol{F}\mathcal{C})^c$ は任意所与とすると，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}\mathcal{C}\subset\mathrm{dom}\, g$ ならば,

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{x})&=\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x}, \mu)\in\mathrm{epi}\, g\}\\ &\leqq(f\mathcal{C})(\boldsymbol{x})\coloneqq\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x}, \mu)\in\mathcal{C}(\mathrm{epi}\, f)\}.\end{aligned}$$

1） $\mathrm{dom}(f\mathcal{C})=\boldsymbol{F}\mathcal{C}$ である.

$x \in (FC)^c$ ならば,

$$g(x) \leqq (fC)(x) = \infty$$

となって，結論を得る．　‖

補題　凸集合 $C_i \subset R^n$ の任意の族 $\{C_i \mid i \in \Lambda$(添数集合)$\}$ に対して，次の関係が成立する．

$$C(\bigcup_{i \in \Lambda} C_i) = \{\sum_{i \in \Lambda} \theta_i x_i \mid x_i \in C_i,\ \theta_i \in R_{\oplus},\ \sum_{i \in \Lambda} \theta_i = 1\}.$$

証明　上式の右辺を Q とおく．更に，文献〔2〕の定理5により，

$$C(\bigcup_{i \in \Lambda} C_i) = \{\sum_{j=1}^{k} \theta_j x_j \mid x_j \in \bigcup_{i \in \Lambda} C_i,\ \theta_j \in R_{\oplus},\ \sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1,\ k \in N\}$$

であることに注目しておく．$\underline{Q \subset C(\bigcup_{i \in \Lambda} C_i)\ \text{であること}}$．任意所与の $x \in Q$ を

$$x = \sum_{i \in \Lambda} \theta_i x_i,\ x_i \in C_i \subset \bigcup_{i \in \Lambda} C_i,\ \theta_i \in R_{\oplus},\ \sum_{i \in \Lambda} \theta_i = 1$$

とおくと，有限個の $\theta_i (i \in \Lambda)$ についてのみ $\theta_i \in R_+$ であるから，一般性を失うことなく，所与の $x \in Q$ に応じて定まる有限個の $\theta_i \in R_+$ の添数 $i \in \Lambda$ を k 個の自然数 $j = 1, \cdots, k$ に対応させることができる．そうすると，

$$x = \sum_{j=1}^{k} \theta_j x_j,\ x_j \in \bigcup_{i \in \Lambda} C_i,\ \theta_j \in R_+,\ \sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1$$

であるから，$x \in C(\bigcup_{i \in \Lambda} C_i)$．$\underline{C(\bigcup_{i \in \Lambda} C_i) \subset Q\ \text{であること}}$．任意所与の $x \in C(\bigcup_{i \in \Lambda} C_i)$ を

$$x = \sum_{j=1}^{k} \theta_j x_j,\ x_j \in \bigcup_{i \in \Lambda} C_i,\ \theta_j \in R_{\oplus},\ \sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1,\ k \in N$$

とおくと，各 x_j に対して，ある適当な $i \in \Lambda$ が存在して，$x_j \in C_i$ であるから，$j = 1, \cdots, k$ に対しては，このようにして定まる k 個を上回らない個数の $i = i(j) \in \Lambda$ を対応させ，それ以外の $i \in \Lambda \diagdown i(\{1, \cdots, k\})$ に対しては，$\theta_i = 0$ とおくと，$x \in Q$．なお，$j_\nu \in \{1, \cdots, k\}$, $\nu = 1, \cdots l$, $\theta_{j_\nu} \in R_+$, $i(j_1) = \cdots = i(j_\nu) = i$ であるとき，すなわち，$\theta_{j_\nu} \in R_+$ である l 個の x_{j_ν} が同一の C_i に属するときには，

$$\theta_j := \sum_{\nu=1}^{l} \theta_{j_\nu},\ \theta_{j_\nu} \in R_+,\ x_j := \sum_{\nu=1}^{l} \theta_j^{-1} \theta_{j_\nu} x_{j_\nu},\ x_{j_\nu} \in C_i$$

とおいて，

$$\sum_{\nu=1}^{l}\theta_{j_\nu}\boldsymbol{x}_{j_\nu}=\sum_{\nu=1}^{l}\theta_{j_\nu}\sum_{\nu=1}^{l}\left(\frac{\theta_{j_\nu}}{\sum_{\nu=1}^{l}\theta_{j_\nu}}\right)\boldsymbol{x}_{j_\nu}=\theta_j\boldsymbol{x}_j\,,$$

と見なせばよい． ‖

定理 7　真凸拡張関数 $f_i:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ の任意の族 $\{f_i\mid i\in\Lambda$(添数集合)$\}$ に対して，

$$\boldsymbol{F}\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda}:=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n,\ {}^\exists\mu\in\boldsymbol{R}:(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathcal{C}(\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{epi}\,f_i)\}$$

とおくとき，

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda}\Rightarrow(f_i\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda})(\boldsymbol{x}):=\inf\{\mu\mid(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathcal{C}(\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{epi}\,f_i)\},\\ \boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{F}\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda})^c\Rightarrow(f_i\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda})(\boldsymbol{x}):=\infty,\end{cases}$$

すなわち，

$$\mathcal{C}(\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{epi}\,f_i)=\mathrm{epi}\,(f_i\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda}),$$

によって定義される拡張関数 $f_i\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ に対して，次の関係が成立する[1]．

（1）　$f_i\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda}$ は凸拡張関数である．

（2）　${}^\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n:(f_i\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda})(\boldsymbol{x})=\inf\{\sum_{i\in\Lambda}\theta_if_i(\boldsymbol{x}_i)\mid(*)\}$,

ただし，（$*$）　$\sum_{i\in\Lambda}\theta_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x},\ \theta_i\in\boldsymbol{R}_\oplus,\ \sum_{i\in\Lambda}\theta_i=1.$

（3）　$f_i\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda}$ は，任意の $i\in\Lambda$ に対して $g\leqq f_i$ であるようなすべての凸拡張関数 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ のうち，最大の拡張関数である．

証明　(1)．定理そのものである．

(2)．定理 6 の(2)の証明過程に注目すれば，

$$\mathcal{C}(\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{epi}\,f_i)=\left\{\sum_{i\in\Lambda}\theta_i\cdot(\boldsymbol{x}_i,\mu_i)\ \middle|\ \begin{array}{l}(\boldsymbol{x}_i,\mu_i)\in\mathrm{epi}\,f_i,\\ \theta_i\in\boldsymbol{R}_\oplus,\ \sum_{i\in\Lambda}\theta_i=1\end{array}\right\}$$

を証明しさえすればよい．しかし，これは，補題により明らかである．

(3)．定理 6 の(3)の証明中の $\mathrm{epi}\,f$ の部分を $\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{epi}\,f_i$ と置き換えて，定

1)　$\mathrm{dom}(f_i\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda})=\boldsymbol{F}\mathcal{C}\bigcup_{i\in\Lambda}$ である．

理6の(3)と全く同様にすればよい. ‖

§2　凸集合の部分加法

定義2　凸集合の部分加法

$\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^{p+q}=\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ と見なすと，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ は，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p,\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^q$ と分解されることに留意して，2つの凸集合 $C_1, C_2\subset\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q$ の4つの部分加法 (partial addition) 演算を次のように定義する.

(1)　加算しない演算

$$X_1^{p+q}:=\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mid(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in C_1, C_2\}=C_1\cap C_2.$$

(2)　変数 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p$ のみの加法演算

$$X_2^{p+q}:=\{(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v})\mid(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v})\in C_1,\ (\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v})\in C_2\}.$$

(3)　変数 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^q$ のみの加法演算

$$X_3^{p+q}:=\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\mid(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1)\in C_1,\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_2)\in C_2\}.$$

(4)　全変数 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p$ と $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^q$ の加法演算

$$X_4^{p+q}:=\{(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\mid(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1)\in C_1,\ (\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_2)\in C_2\}=C_1+C_2.$$

また，$\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^{p+q+r}=\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q\times\boldsymbol{R}^r$ と見なすと，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ は，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\ \boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p,\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^q,\ \boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^r$ と分解されることに留意すると，上と同様にして，2つの凸集合 $C_1, C_2\subset\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^p\times\boldsymbol{R}^q\times\boldsymbol{R}^r$ の8つの部分加法演算，すなわち，

(1)　加算しない演算 $X_1^{p+q+r}=C_1\cap C_2$,

(2)　変数 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p$ のみの加法演算 X_2^{p+q+r},

(3)　変数 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^q$ のみの加法演算 X_3^{p+q+r},

(4)　変数 $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^r$ のみの加法演算 X_4^{p+q+r},

(5)　2変数 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p$ と $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^q$ のみの加法演算 X_5^{p+q+r},

(6)　2変数 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p$ と $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^r$ のみの加法演算 X_6^{p+q+r},

(7)　2変数 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^q$ と $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^r$ のみの加法演算 X_7^{p+q+r},

(8)　全変数 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^p,\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^q$ 及び $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^r$ の加法演算 $X_8^{p+q+r}=C_1+C_2$,

が定義される. 以下，全く同様にして，分解を拡大することによって，加算

しない演算 $C_1 \cap C_2$ と全変数の加法演算 $C_1 + C_2$ の両極の間の部分加法演算を $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R} \times \cdots \times \boldsymbol{R}$ の段階にまで増大することができる．

注意 4　加算しない演算 $X_1^{p+q} = C_1 \cap C_2$，全変数の加法演算 $X_4^{p+q} = C_1 + C_2$ は，それぞれ，文献〔2〕の定理2と定理3により，凸集合であるが，その両極間の部分加法演算 X_2^{p+q} と X_3^{p+q} もまた凸集合である．

証明　$X_2^{p+q} := \{(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) \mid (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) \in C_1, (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) \in C_2\}$ についてのみ証明する．$(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}), (\boldsymbol{u}_1' + \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{v}') \in X_2^{p+q}$, $(\theta, \theta') \in \Delta_\oplus$ は，それぞれ，任意所与とすると，

$$\begin{cases} \theta \cdot (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) + \theta' \cdot (\boldsymbol{u}_1' + \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{v}') \\ \quad = ((\theta \boldsymbol{u}_1 + \theta' \boldsymbol{u}_1') + (\theta \boldsymbol{u}_2 + \theta' \boldsymbol{u}_2'), \theta \boldsymbol{v} + \theta' \boldsymbol{v}'), \\ (\theta \boldsymbol{u}_1 + \theta' \boldsymbol{u}_1', \theta \boldsymbol{v} + \theta' \boldsymbol{v}') = \theta \cdot (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + \theta' \cdot (\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{v}') \in C_1, \\ (\theta \boldsymbol{u}_2 + \theta' \boldsymbol{u}_2', \theta \boldsymbol{v} + \theta' \boldsymbol{v}') = \theta \cdot (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) + \theta' \cdot (\boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{v}') \in C_2 \end{cases}$$

となって，結論を得る．　‖

定理 8　2つの凸集合 $C_1, C_2 \subset \boldsymbol{R}^n$ によって生成される2つの凸錐 $\boldsymbol{R}_\oplus(1, C_1), \boldsymbol{R}_\oplus(1, C_2) \subset \boldsymbol{R}_\oplus \times \boldsymbol{R}^n$ の間の部分加法に関して，次の関係が成立する．

（1）　加算しない演算

$$Y_1^{n+1} := \{(\alpha, \boldsymbol{x}) \mid \alpha \in \boldsymbol{R}_\oplus, \boldsymbol{x} \in \alpha C_1 \cap \alpha C_2\} = \boldsymbol{R}_\oplus(1, C_1 \cap C_2).$$

（2）　変数 $\alpha \in \boldsymbol{R}_\oplus$ のみの加法演算

$$\begin{aligned} Y_2^{n+1} &:= \{(\alpha, \boldsymbol{x}) \mid \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}_\oplus, \boldsymbol{x} \in \alpha_1 C_1 \cap \alpha_2 C_2\} \\ &= \{(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 C_1 \cap \alpha_2 C_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}_\oplus\}. \end{aligned}$$

（3）　変数 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ のみの加法演算

$$\begin{aligned} Y_3^{n+1} &:= \{(\alpha, \boldsymbol{x}) \mid \alpha \in \boldsymbol{R}_\oplus, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 \in \alpha C_1, \boldsymbol{x}_2 \in \alpha C_2\} \\ &= \boldsymbol{R}_\oplus(1, C_1 + C_2). \end{aligned}$$

（4）　全変数 $\alpha \in \boldsymbol{R}_\oplus$ と $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の加法演算

$$\begin{aligned} Y_4^{n+1} &:= \left\{ (\alpha, \boldsymbol{x}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}_\oplus, \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 \in \alpha_1 C_1, \boldsymbol{x}_2 \in \alpha_2 C_2 \end{array} \right\} \\ &= \{(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}_\oplus\}. \end{aligned}$$

また，特に，$\alpha=1$ の条件が付けられているときは，次の関係が成立する．

(1)′　$Y_1^{n+1}|_{\alpha=1}=(1, C_1\cap C_2)$.

(2)′　$Y_2^{n+1}|_{\alpha=1}=\{(1, \alpha_1 C_1\cap \alpha_2 C_2)\mid(\alpha_1, \alpha_2)\in\Delta_{\oplus}\}$.

(3)′　$Y_3^{n+1}|_{\alpha=1}=(1, C_1+C_2)$.

(4)′　$Y_4^{n+1}|_{\alpha=1}=(1, \mathcal{C}(C_1\cup C_2))$.

また，特に，C_1 と C_2 が錐ならば，次の関係が成立する．

$$Y_1^{n+1}=Y_2^{n+1}=\boldsymbol{R}_{\oplus}(1, C_1\cap C_2),$$
$$Y_3^{n+1}=Y_4^{n+1}=\boldsymbol{R}_{\oplus}(1, C_1+C_2).$$

証明　(4)′以外は自明である．(4)′は文献〔2〕の定理5系から直ちに得られる．　‖

定理 9　2つの凸拡張関数 $f_i:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$, $\mathrm{dom} f_i\neq\emptyset$, $i=1, 2$, の $\mathrm{epi} f_i$ によって生成される2つの凸錐 $\boldsymbol{R}_{\oplus}(1, \mathrm{epi} f_i)=\{\mathbf{0}\}\cup\boldsymbol{R}_{+}(1, \mathrm{epi} f_i)\subset\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^{n+1}$ の間の部分加法演算に関して，次の関係が成立する．なお，以下の集合において，$i=1, 2$，とする．

(1)　加算しない演算 $\{\mathbf{0}\}\cup Y_1^{n+2}$

$$Y_1^{n+2}:=\{(\alpha, \boldsymbol{x}, \mu)\mid\alpha\in\boldsymbol{R}_{+},\ (\boldsymbol{x}, \mu)\in\mathrm{epi}(f_i\alpha)\}.$$

(2)　変数 $\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}$ のみの加法演算 $\{\mathbf{0}\}\cup Y_2^{n+2}$

$$Y_2^{n+2}:=\{(\alpha, \boldsymbol{x}, \mu)\mid\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}_{+},\ (\boldsymbol{x}, \mu)\in\mathrm{epi}(f_i\alpha_i)\}.$$

(3)　変数 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ のみの加法演算 $\{\mathbf{0}\}\cup Y_3^{n+2}$

$$Y_3^{n+2}:=\{(\alpha, \boldsymbol{x}, \mu)\mid\alpha\in\boldsymbol{R}_{+},\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ (\boldsymbol{x}_i, \mu)\in\mathrm{epi}(f_i\alpha)\}.$$

(4)　変数 $\mu\in\boldsymbol{R}$ のみの加法演算 $\{\mathbf{0}\}\cup Y_4^{n+2}$

$$Y_4^{n+2}:=\{(\alpha, \boldsymbol{x}, \mu)\mid\alpha\in\boldsymbol{R}_{+},\ \mu=\mu_1+\mu_2,\ (\boldsymbol{x}, \mu_i)\in\mathrm{epi}(f_i\alpha)\}.$$

(5)　2変数 $(\alpha, \boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n$ のみの加法演算 $\{\mathbf{0}\}\cup Y_5^{n+2}$

$$Y_5^{n+2}:=\left\{(\alpha, \boldsymbol{x}, \mu)\ \middle|\ \begin{array}{l}\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}_{+},\\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ (\boldsymbol{x}_i, \mu)\in\mathrm{epi}(f_i\alpha_i)\end{array}\right\}.$$

(6)　2変数 $(\alpha, \mu)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n$ のみの加法演算 $\{\mathbf{0}\}\cup Y_6^{n+2}$

$$Y_6^{n+2} := \left\{ (\alpha, \boldsymbol{x}, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \boldsymbol{R}_+, \\ \mu = \mu_1 + \mu_2,\ (\boldsymbol{x}_i,\ \mu) \in \mathrm{epi}\,(f_i\,\alpha_i) \end{array} \right\}.$$

（7）　2 変数 $(\boldsymbol{x}, \mu) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ のみの加法演算 $\{\boldsymbol{0}\} \cup Y_7^{n+2}$

$$Y_7^{n+2} := \left\{ (\alpha, \boldsymbol{x}, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in \boldsymbol{R}_+,\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \\ \mu = \mu_1 + \mu_2,\ (\boldsymbol{x}_i,\ \mu_i) \in \mathrm{epi}\,(f_i\,\alpha) \end{array} \right\}.$$

（8）　全変数 $(\alpha, \boldsymbol{x}, \mu) \in \boldsymbol{R}_\oplus \times \boldsymbol{R}^{n+1}$ の加法演算 $\{\boldsymbol{0}\} \cup Y_8^{n+2}$

$$Y_8^{n+2} := \left\{ (\alpha, \boldsymbol{x}, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \boldsymbol{R}_+,\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \\ \mu = \mu_1 + \mu_2,\ (\boldsymbol{x}_i,\ \mu_i) \in \mathrm{epi}\,(f_i\,\alpha_i) \end{array} \right\}.$$

また，特に，$\alpha=1$ の条件が付けられているときには，次の関係が成立する．

（1）′　$Y_1^{n+2}|_{\alpha=1} = \{(1, \boldsymbol{x}, \mu) \mid (\boldsymbol{x}, \mu) \in \mathrm{epi}\,f_i\}$.

（2）′　$Y_2^{n+2}|_{\alpha=1} = \{(1, \boldsymbol{x}, \mu) \mid (\alpha_1, \alpha_2) \in \varDelta_+,\ (\boldsymbol{x}, \mu) \in \mathrm{epi}\,(f_i\,\alpha_i)\}$.

（3）′　$Y_3^{n+2}|_{\alpha=1} = \{(1, \boldsymbol{x}, \mu) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ (\boldsymbol{x}_i, \mu) \in \mathrm{epi}\,f_i\}$.

（4）′　$Y_4^{n+2}|_{\alpha=1} = \{(1, \boldsymbol{x}, \mu) \mid \mu = \mu_1 + \mu_2,\ (\boldsymbol{x}, \mu_i) \in \mathrm{epi}\,f_i\}$.

（5）′　$$Y_5^{n+2}|_{\alpha=1} = \left\{ (1, \boldsymbol{x}, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ (\alpha_1,\ \alpha_2) \in \varDelta_+, \\ (\boldsymbol{x}_i,\ \mu) \in \mathrm{epi}\,(f_i\,\alpha_i) \end{array} \right\}.$$

（6）′　$$Y_6^{n+2}|_{\alpha=1} = \left\{ (1, \boldsymbol{x}, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu = \mu_1 + \mu_2,\ (\alpha_1,\ \alpha_2) \in \varDelta_+, \\ (\boldsymbol{x},\ \mu_i) \in \mathrm{epi}\,(f_i\,\alpha_i) \end{array} \right\}.$$

（7）′　$$Y_7^{n+2}|_{\alpha=1} = \left\{ (1, \boldsymbol{x}, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ \mu = \mu_1 + \mu_2, \\ (\boldsymbol{x}_i,\ \mu_i) \in \mathrm{epi}\,f_i \end{array} \right\}.$$

（8）′　$$Y_8^{n+2}|_{\alpha=1} = \left\{ (1, \boldsymbol{x}, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ (\alpha_1,\ \alpha_2) \in \varDelta_+ \\ \mu = \mu_1 + \mu_2,\ (\boldsymbol{x}_i,\ \mu_i) \in \mathrm{epi}\,(f_i\,\alpha_i) \end{array} \right\}.$$

証明　$i=1,2$，とする．$\boldsymbol{R}_\oplus(1, \mathrm{epi}\,f_i) = \{\boldsymbol{0}\} \cup \boldsymbol{R}_+(1, \mathrm{epi}\,f_i)$ であるが，定理4 を利用すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_+(1, \mathrm{epi}\,f_i) &= \{\alpha \cdot (1, \mathrm{epi}\,f_i) \mid \alpha \in \boldsymbol{R}_+\} \\ &= \{\alpha \cdot (1, \boldsymbol{y}, \lambda) \mid \alpha \in \boldsymbol{R}_+,\ (\boldsymbol{y}, \lambda) \in \mathrm{epi}\,f_i\} \\ &= \{(\alpha, \alpha\boldsymbol{y}, \alpha\lambda) \mid \alpha \in \boldsymbol{R}_+,\ (\alpha\boldsymbol{y}, \alpha\lambda) \in \alpha \cdot \mathrm{epi}\,f_i\} \\ &= \{(\alpha, \boldsymbol{x}, \mu) \mid \alpha \in \boldsymbol{R}_+,\ (\boldsymbol{x}, \mu) \in \alpha \cdot \mathrm{epi}\,f_i = \mathrm{epi}\,(f_i\,\alpha)\} \end{aligned}$$

であるから，部分加法の定義によって，結論を得る．　‖

定理10　2つの拡張関数 $f_i: \boldsymbol{R}^n \to \{-\infty, \infty\}, \mathrm{dom} f_i \neq \emptyset$, $i=1,2$, はいずれも凸拡張関数とする．

$$\boldsymbol{F}_\nu := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, {}^\exists \mu \in \boldsymbol{R} : (1, \boldsymbol{x}, \mu) \in \boldsymbol{Y}_\nu^{n+2}|_{\alpha=1}\},\ \nu=1, \cdots, 8,$$

とおくとき，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}_\nu \Rightarrow f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_\nu) := \inf\{\mu \mid (1, \boldsymbol{x}, \mu) \in \boldsymbol{Y}_\nu^{n+2}|_{\alpha=1}\}, \\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}_\nu^c \Rightarrow f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_\nu) := \infty \end{cases}$$

によって定義される拡張関数 $f(\cdot \mid \boldsymbol{F}_\nu): \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ については，任意所与の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

（1）　$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_1) = \max\{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\}$.

（2）　$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_2) = \inf\{\max[(f_1\alpha_1)(\boldsymbol{x}), (f_2\alpha_2)(\boldsymbol{x})] \mid (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta_\oplus\}$.

（3）　$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_3) = \inf\{\max[f_1(\boldsymbol{x}_1), f_2(\boldsymbol{x}_2)] \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2\}$.

（4）　$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_4) = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})$.

（5）　$$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_5) = \inf\left\{ \max[(f_1\alpha_1)(\boldsymbol{x}_1), (f_2\alpha_2)(\boldsymbol{x}_2)] \;\middle|\; \begin{matrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta_\oplus \end{matrix} \right\}.$$

$$= \inf\left\{ \max[\alpha_1 f_1(\boldsymbol{x}_1), \alpha_2 f_2(\boldsymbol{x}_2)] \;\middle|\; \begin{matrix} \boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2, \\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta_\oplus \end{matrix} \right\}.$$

（6）　$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_6) = \inf\{(f_1\alpha_1)(\boldsymbol{x}) + (f_2\alpha_2)(\boldsymbol{x}) \mid (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta_\oplus\}$.

（7）　$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_7) = \inf\{f_1(\boldsymbol{x}_1) + f_2(\boldsymbol{x}_2) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2\}$

$$= (f_1 \oplus f_2)(\boldsymbol{x}).$$

（8）　$$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_8) = \inf\left\{ (f_1\alpha_1)(\boldsymbol{x}_1) + (f_2\alpha_2)(\boldsymbol{x}_2) \;\middle|\; \begin{matrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \Delta_\oplus \end{matrix} \right\}.$$

$$= (f_i C \bigcup_{i=1}^{2})(\boldsymbol{x}).$$

証明　（1）～（7）は，定理9により，直ちに得られるので，（8）のみを証明する．$\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{R}^n$ は任意所与とすると，定理4の（2）により，

$$\begin{cases} {}^\forall \alpha_i \in \boldsymbol{R}_+ : (f\alpha_i)(\alpha_i \boldsymbol{x}_i) = \alpha_i f(\alpha_i^{-1} \alpha_i \boldsymbol{x}_i) = \alpha_i f(\boldsymbol{x}_i), \\ (f_i 0)(\boldsymbol{x}_i) = \delta(\boldsymbol{x}_i \mid \{\boldsymbol{0}\}), \ (f_i 1)(\boldsymbol{x}_i) = f_i(\boldsymbol{x}_i) \end{cases}$$

であるから，任意所与の $\alpha_i \in \boldsymbol{R}_\oplus$ に対して，$\boldsymbol{y}_i = \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{F}_8) &= \inf\left\{ \sum_{i=1}^{2} (f_i \alpha_i)(\boldsymbol{y}_i) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \varDelta_\oplus \right\} \\
&= \inf\left\{ \sum_{i=1}^{2} (f_i \alpha_i)(\alpha_i \boldsymbol{x}_i) \mid \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \varDelta_\oplus \right\} \\
&= \inf\left(\begin{array}{l} \inf\left\{ \sum_{i=1}^{2} \alpha_i f_i(\boldsymbol{x}_i) \mid \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \boldsymbol{x}_i,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \varDelta_+ \right\}, \\ \delta(\boldsymbol{0} \mid \{\boldsymbol{0}\}) + f_2(\boldsymbol{x}_2),\ f_1(\boldsymbol{x}_1) + \delta(\boldsymbol{0} \mid \{\boldsymbol{0}\}) \end{array} \right) \\
&= \inf\left\{ \sum_{i=1}^{2} \alpha_i f_i(\boldsymbol{x}_i) \mid \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \boldsymbol{x}_i,\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \varDelta_\oplus \right\}
\end{aligned}
$$

となって，定理7の(2)により，結論を得る．　‖

参考文献

〔1〕 福尾洋一「アフィン集合」『経済学論究（関西学院大学）』**33**(**3**)(1979), pp. 97－122.

〔2〕 ――――「凸集合」『経済学論究（関西学院大学）』**34**(**1**)(1980), pp. 29－52.

〔3〕 ――――「凸集合の特性錐・直系空間」『経済学論究（関西学院大学）』**34**(**4**)(1981), pp. 19－42.

〔4〕 ――――「凸拡張関数」『経済学論究（関西学院大学）』**35**(**4**)(1982), pp. 53－73.

〔5〕 今野　浩・山下　浩『非線形計画法』日科技連，1978年.

〔6〕 Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.