凸拡張関数

福尾洋一

§0 序

本稿においては，文献〔1〕〔2〕〔6〕—〔10〕等を参考にすることによって，非線形計画法の理論において基本的役割を演ずる凸拡張関数について整理する．整理とはいえ，全体を通じて，配列・証明等にそれぞれ独自の工夫を凝らしたつもりである．例えば，定理1の証明は，本稿の参考文献の中には見られないものであり，我々が与えたものである．

なお，以下において説明なしに使用される記号は，すべて文献〔3〕〔4〕〔5〕で約束されたものである．集合 $\Delta_{\oplus}\subset\boldsymbol{R}^2_{\oplus}$, $\Delta_{+}\subset\boldsymbol{R}^2_{+}$, $\Delta^{k-1}_{\oplus}\subset\boldsymbol{R}^k_{\oplus}$, $\Delta^{k-1}_{+}\subset\boldsymbol{R}^k_{+}$, $k\in\boldsymbol{N}$, については，次のように定義しておく．

$$\Delta_{\oplus}:=\{(\theta_1,\ \theta_2)\mid\theta_1,\ \theta_2\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\ \theta_1+\theta_2=1\},$$

$$\Delta_{+}:=\{(\theta_1,\ \theta_2)\mid\theta_1,\ \theta_2\in\boldsymbol{R}_{+},\ \theta_1+\theta_2=1\},$$

$$\Delta^{k-1}_{\oplus}:=\{(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)\mid\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\ \Sigma^k_{i=1}\theta_i=1\},$$

$$\Delta^{k-1}_{+}:=\{(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)\mid\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k\in\boldsymbol{R}_{+},\ \Sigma^k_{i=1}\theta_i=1\}.$$

左辺≔右辺は，左辺が右辺によって定義されることを意味する．また，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$, に対して，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を結ぶ線分を，しばしば，$[\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2]$ と書くことにする．

§1 凸実関数

定義1 凸実関数・凹実関数

実関数 ϕ: $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ について考える．ϕ は，所与の $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{S}$ に対して，

$$\exists \varepsilon \in \boldsymbol{R}_{+} \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \varepsilon) \forall (\theta_1, \theta_2) \in \Delta_{\oplus}:$$

$$\begin{cases} \theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \varepsilon)^{1)}, \\ \phi(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) \leqq \theta_1 \phi(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2 \phi(\boldsymbol{x}_2), \end{cases}$$

ならば，$\boldsymbol{x}_0$において局所凸であるという．ϕ は，任意所与の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ において局所凸ならば，凸実関数であるという．また，ϕ は，$-\phi$ が所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ において局所凸ならば，$\boldsymbol{x}_0$ において局所凹であるといい，任意所与の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ において局所凹ならば，凹実関数であるという．・

定義 2　狭義凸実関数・狭義凹実関数

実関数 ϕ: $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ について考える．ϕ は，所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ に対して，

$$\exists \varepsilon \in \boldsymbol{R}_{+} \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \varepsilon),\ \boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2 \forall (\theta_1, \theta_2) \in \Delta_{+}:$$

$$\begin{cases} \theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_0; \varepsilon), \\ \phi(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) < \theta_1 \phi(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2 \phi(\boldsymbol{x}_2), \end{cases}$$

ならば，$\boldsymbol{x}_0$において狭義局所凸であるという．ϕ は，任意所与の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ において狭義局所凸ならば，狭義凸実関数であるという．また，ϕ は，$-\phi$ が所与の $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ において狭義局所凸ならば，$\boldsymbol{x}_0$ において狭義局所凹であるといい，任意所与の$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ において狭義局所凹ならば，狭義凹実関数であるという．

注意 1　定義1及び定義2については，次の2点，すなわち，(1)所与の$\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$における局所凸《狭義局所凸》性・局所凹《狭義局所凹》性を定義した後に，$\boldsymbol{S}$上での凸《狭義凸》性・凹《狭義凹》性を定義しているという点，(2) $\boldsymbol{S}$が凸集合であることを要求しないという点——に注目しておこう．

注意 2　実関数ϕ：$\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i) ϕ が凸《狭義凸》実関数である．

(ii) $-\phi$ が凹《狭義凹》実関数である．

---

1) $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}$ (＝$\boldsymbol{S}$の$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ における相対内部) であるが，$\boldsymbol{S}$が$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$の相対開集合であるか，または，$\boldsymbol{S}$が凸集合であるならば，この条件は常に成立する．

注意 3 注意2により，凹(狭義凹)実関数は，符号を変更することにより，凸(狭義凸)実関数となるので，凹(狭義凹)実関数の議論は，結局のところ，凸(狭義凸)実関数の議論に帰着する．そこで，本稿では，凸(狭義凸)実関数のみを取り扱うことにする．

定理 1[1)] $C\subset R^n$は凸集合とする．実関数$\phi : C\to R$に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i) ϕが凸実関数である．

(ii) $^{\forall}x_1, x_2\in C\,^{\forall}(\theta_1, \theta_2)\in\Delta_{\oplus} : \phi(\theta_1 x_1+\theta_2 x_2)\leqq\theta_1\phi(x_1)+\theta_2\phi(x_2)$.

証明 (ii)⇒(i)は明らかであるので，以下，(i)⇒(ii)を数段に分けて証明する．

段階 1 ϕは任意所与の$x\in C$において局所凸であるから，任意所与の$x_1, x_2\in C$, $x_1\neq x_2$, に対して，線分$[x_1, x_2]\subset C$上のある適当な有限個$k\in N$の(左から順に番号を付けた)相異なる点$a_1:=x_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k:=x_2$,

$$a_i=\alpha_i(a_k-a_1)+a_1=(1-\alpha_i)a_1+\alpha_i a_k,\ i=1, \cdots, k,$$

$$0=\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{k-1}<\alpha_k=1,$$

と，それら各点に対応する$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\in R_+$を適当に選ぶことによって，次の関係が成立するようにすることができる．すなわち，

$$B_i:=B(a_i\,;\varepsilon_i),\ \ i=1, \cdots, k,$$

とおくと，

$$[x_1, x_2]=[a_1, a_k]=\cup_{i=1}^{k-1}[a_i, a_{i+1}],$$

$$[a_i, a_{i+1}]\text{ は }\{a_{i+1}\}\text{ を除いて互いに素},$$

$$^{\forall}i(1\leqq i\leqq k) : [a_i, a_{i+1}]\cap B_i\cap B_{i+1}\neq\emptyset,\ a_i\notin B_{i+1},\ a_{i+1}\notin B_i,$$

$$^{\forall}i(1\leqq i\leqq k-2)\,^{\forall}j(2\leqq j\leqq k-i) : [a_i, a_{i+j}]\cap B_i\cap B_{i+j}=\emptyset,$$

1) 凸実関数・凹実関数の定義1は，文献〔8〕に従っている．定義1から議論を展開する場合には，この定理1——定理1の(ii)によって与えられる通常の定義と定義1との関係を示す定理——は重要な意味を持つ．しかし，文献〔8〕では，この定理は，証明されることもなく簡単に扱われている．cf. 文献〔8〕p.53.

$$^{\forall}\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{B}_i{}^{\forall}(\theta_1,\ \theta_2) \in \varDelta_{\oplus}:$$

$$\phi(\theta_1 \boldsymbol{y}_1 + \theta_2 \boldsymbol{y}_2) \leqq \theta_1 \phi(\boldsymbol{y}_1) + \theta_2 \phi(\boldsymbol{y}_2).$$

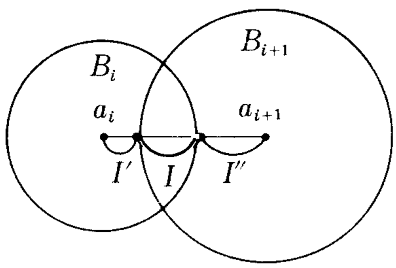
段階 2　次に，$[\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_{i+1}]$，$i=1,\ \cdots,\ k$，を互い素な３つの部分

$$\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_{i+1}] \cap \boldsymbol{B}_i \cap \boldsymbol{B}_{i+1},$$

$$\boldsymbol{I}' = [\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_{i+1}] \cap \boldsymbol{B}_i \setminus \boldsymbol{B}_{i+1},$$

$$\boldsymbol{I}'' = [\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_{i+1}] \cap \boldsymbol{B}_{i+1} \setminus \boldsymbol{B}_i,$$

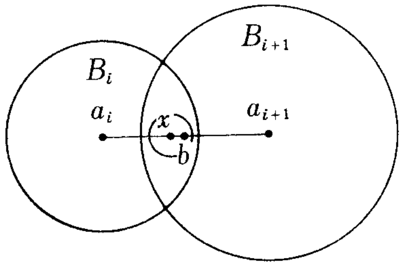
に分け（cf. 第１図），　$[\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_{i+1}]$ に対しては，



第１図

①　　$^{\forall}(\theta_1,\ \theta_2) \in \varDelta_{\oplus}: \phi(\theta_1 \boldsymbol{a}_i + \theta_2 \boldsymbol{a}_{i+1}) \leqq \theta_1 \phi(\boldsymbol{a}_i) + \theta_2 \phi(\boldsymbol{a}_{i+1})$，

が成立することを示す．$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{B}_i \cap \boldsymbol{B}_{i+1}$（cf. 第２図）ならば，文献〔４〕の定理21により，$\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{B}_i \cap \boldsymbol{B}_{i+1})^{\mathrm{I}}$，すなわち，ある適当な $\delta \in \boldsymbol{R}_+$ に対して，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\delta) \subset \boldsymbol{B}_i \cap \boldsymbol{B}_{i+1}$ であるから，$[\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_{i+1}]$ 上に，$\boldsymbol{x}$ の右側に位置する点 $\boldsymbol{b} \in [\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_{i+1}] \cap \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\delta) \subset \boldsymbol{B}_i$ が存在する．そこで，



第２図

② $$\begin{cases} \boldsymbol{x}=\theta_1 \boldsymbol{a}_i+\theta_2 \boldsymbol{a}_{i+1}, \ (\theta_1, \ \theta_2)\in \Delta_+, \\ \boldsymbol{x}=\beta_1 \boldsymbol{a}_i+\beta_2 \boldsymbol{b}, \ (\beta_1, \beta_2)\in \Delta_+, \\ \boldsymbol{b}=\gamma_1 \boldsymbol{x}+\gamma_2 \boldsymbol{a}_{i+1}, \ (\gamma_1, \ \gamma_2)\in \Delta_+, \end{cases}$$

とおくと，$[\boldsymbol{a}_i, \ \boldsymbol{a}_{i+1}]$ 上の任意所与の点の1次結合による表現は1意であることを考えると，

③ $$\begin{cases} \boldsymbol{x}=\theta_1 \boldsymbol{a}_i+\theta_2 \boldsymbol{a}_{i+1}=\beta_1(1-\beta_2\gamma_1)^{-1}\boldsymbol{a}_i+\beta_2\gamma_2(1-\beta_2\gamma_1)^{-1}\boldsymbol{a}_{i+1}, \\ \theta_1=\beta_1(1-\beta_2\gamma_1)^{-1}, \ \theta_2=\beta_2\gamma_2(1-\beta_2\gamma_1)^{-1}, \ (\theta_1, \ \theta_2)\in \Delta_+, \end{cases}$$

となる．よって，ϕ の $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_{i+1}$ における局所凸性と②とにより，

$$\phi(\boldsymbol{x}) \leqq \beta_1 \phi(\boldsymbol{a}_i)+\beta_2\phi(\boldsymbol{b}) \leqq \beta_1\phi(\boldsymbol{a}_i)+\beta_2[\gamma_1\phi(\boldsymbol{x})+\gamma_2\phi(\boldsymbol{a}_{i+1})],$$

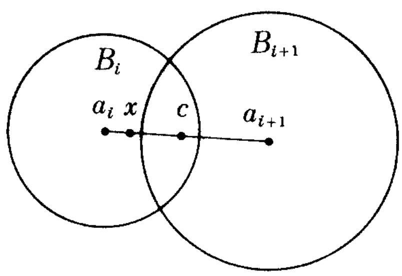
すなわち，

$$(1-\beta_2\gamma_1)\phi(\boldsymbol{x}) \leqq \beta_1\phi(\boldsymbol{a}_i)+\beta_2\gamma_2\phi(\boldsymbol{a}_{i+1}),$$

であることと③により，

④ $$\forall \boldsymbol{x}=\theta_1 \boldsymbol{a}_i+\theta_2 \boldsymbol{a}_{i+1}\in \boldsymbol{I}, \ (\theta_1, \ \theta_2)\in \Delta_+ :$$
$$\phi(\theta_1 \boldsymbol{a}_i+\theta_2 \boldsymbol{a}_{i+1}) \leqq \theta_1\phi(\boldsymbol{a}_i)+\theta_2\phi(\boldsymbol{a}_{i+1}),$$

が成立する．次に，$\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{I}'\subset \boldsymbol{B}_i$（cf. 第3図）ならば，$\boldsymbol{c}\in \boldsymbol{I}\subset \boldsymbol{B}_i$ を固定して，



第3図

②′ $$\begin{cases} \boldsymbol{x}=\theta_1' \boldsymbol{a}_i+\theta_2' \boldsymbol{a}_{i+1}, \ (\theta_1', \ \theta_2')\in \Delta_\oplus, \\ \boldsymbol{x}=\beta_1' \boldsymbol{a}_i+\beta_2' \boldsymbol{c}, \ (\beta_1', \ \beta_2')\in \Delta_+, \\ \boldsymbol{c}=\gamma_1' \boldsymbol{a}_i+\gamma_2' \boldsymbol{a}_{i+1}, \ (\gamma_1', \ \gamma_2')\in \Delta_+, \end{cases}$$

とおくと，

③′ $\begin{cases} \boldsymbol{x}=\theta_1'\boldsymbol{a}_i+\theta_2'\boldsymbol{a}_{i+1}=(\beta_1'+\beta_2'\gamma_1')\boldsymbol{a}_i+\beta_2'\gamma_2'\boldsymbol{a}_{i+1}, \\ \theta_1'=\beta_1'+\beta_2'\gamma_1',\ \theta_2'=\beta_2'\gamma_2',\ (\theta_1',\ \theta_2')\in\varDelta_\oplus, \end{cases}$

となる．よって，ϕ の $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_{i+1}$ における局所凸性，④及び③′により，

$$\phi(\boldsymbol{x})\leqq\beta_1'\phi(\boldsymbol{a}_i)+\beta_2'\phi(\boldsymbol{c})\leqq\beta_1'\phi(\boldsymbol{a}_i)+\beta_2'[\gamma_1'\phi(\boldsymbol{a}_i)+\gamma_2'\phi(\boldsymbol{a}_{i+1})]$$
$$=(\beta_1'+\beta_2'\gamma_1')\phi(\boldsymbol{a}_i)+\beta_2'\gamma_2'\phi(\boldsymbol{a}_{i+1})=\theta_1'\phi(\boldsymbol{a}_i)+\theta_2'\phi(\boldsymbol{a}_{i+1}).$$

すなわち，

④′ $\forall\,\boldsymbol{x}=\theta_1'\boldsymbol{a}_i+\theta_2'\boldsymbol{a}_{i+1}\in\boldsymbol{I}',\ (\theta_1',\ \theta_2')\in\varDelta_\oplus$:

$$\phi(\theta_1'\boldsymbol{a}_i+\theta_2'\boldsymbol{a}_{i+1})\leqq\theta_1'\phi(\boldsymbol{a}_i)+\theta_2'\phi(\boldsymbol{a}_{i+1}),$$

が成立する．最後に，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I}''\subset\boldsymbol{B}_{i+1}$ の場合は，今と全く同様に考えると，

④″ $\forall\,\boldsymbol{x}=\theta_1''\boldsymbol{a}_i+\theta_2''\boldsymbol{a}_{i+1}\in\boldsymbol{I}'',\ (\theta_1'',\ \theta_2'')\in\varDelta_\oplus$:

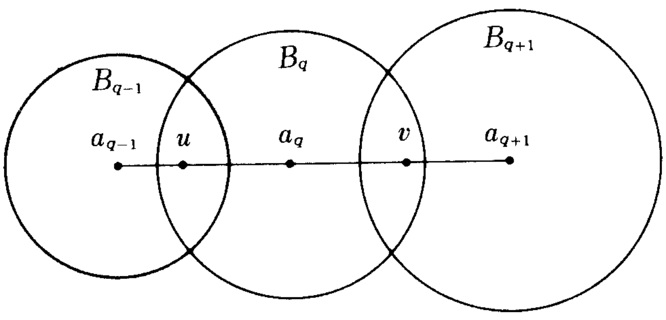
$$\phi(\theta_1''\boldsymbol{a}_i+\theta_2''\boldsymbol{a}_{i+1})\leqq\theta_1''\phi(\boldsymbol{a}_i)+\theta_2''\phi(\boldsymbol{a}_{i+1}),$$

が成立する．かくして，④，④′及び④″ を総合すると，①の成立が主張される．

段階 3　段階 2 により，$[\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_{i+1}]$，$i=1,\cdots,k$，に対しては①が成立すること，したがって，$[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_p]$，$p=1,\cdots,k$，を考えると，$p=2$ に対しては，

⑤ $\forall\,(\theta_1,\ \theta_2)\in\varDelta_\oplus$: $\phi(\theta_1\boldsymbol{a}_1+\theta_2\boldsymbol{a}_p)\leqq\theta_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+\theta_2\phi(\boldsymbol{a}_p)$,

が成立することが示された．そこで，今度は，$p=q\leqq k-1$ に対して⑤の成立を仮定することにより，$p=q+1$ に対して⑤が成立することを示そう．$\boldsymbol{u}\in[\boldsymbol{a}_{q-1},\ \boldsymbol{a}_q]\cap\boldsymbol{B}_{q-1}\cap\boldsymbol{B}_q$ と $\boldsymbol{v}\in[\boldsymbol{a}_q,\ \boldsymbol{a}_{q+1}]\cap\boldsymbol{B}_q\cap\boldsymbol{B}_{q+1}$ を固定して（cf. 第 4 図），



第 4 図

⑥
$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_q=\eta_1\boldsymbol{a}_1+\eta_2\boldsymbol{a}_{q+1}, & (\eta_1, \eta_2)\in\Delta_+, \\ \boldsymbol{a}_q=\varkappa_1\boldsymbol{u}+\varkappa_2\boldsymbol{v}, & (\varkappa_1, \varkappa_2)\in\Delta_+, \\ \boldsymbol{u}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_q, & (\lambda_1, \lambda_2)\in\Delta_+, \\ \boldsymbol{v}=\mu_1\boldsymbol{a}_q+\mu_2\boldsymbol{a}_{q+1}, & (\mu_1, \mu_2)\in\Delta_+, \end{cases}$$

とおき，

⑦
$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_q=\eta_1\boldsymbol{a}_1+\eta_2\boldsymbol{a}_{q+1}, \ (\eta_1, \eta_2)\in\Delta_+, \\ \quad =\varkappa_1\lambda_1(1-\varkappa_1\lambda_2-\varkappa_2\mu_1)^{-1}\boldsymbol{a}_1+\varkappa_2\mu_2(1-\varkappa_1\lambda_2-\varkappa_2\mu_1)^{-1}\boldsymbol{a}_{q+1}, \\ \eta_1=\varkappa_1\lambda_1(1-\varkappa_1\lambda_2-\varkappa_2\mu_1)^{-1}, \ \eta_2=\varkappa_2\mu_2(1-\varkappa_1\lambda_2-\varkappa_2\mu_1)^{-1}, \end{cases}$$

となることに留意し，帰納法の仮定，ϕ の $\boldsymbol{a}_q$ における局所凸性，①，⑥及び⑦を利用すると，

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{a}_q) &\leqq \varkappa_1\phi(\boldsymbol{u})+\varkappa_2\phi(\boldsymbol{v}) \\ &\leqq \varkappa_1[\lambda_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+\lambda_2\phi(\boldsymbol{a}_q)]+\varkappa_2[\mu_1\phi(\boldsymbol{a}_q)+\mu_2\phi(\boldsymbol{a}_{q+1})] \\ &=\varkappa_1\lambda_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+(\varkappa_1\lambda_2+\varkappa_2\mu_1)\phi(\boldsymbol{a}_q)+\varkappa_2\mu_2\phi(\boldsymbol{a}_{q+1}), \end{aligned}$$

すなわち，

⑧
$$\phi(\boldsymbol{a}_q)=\phi(\eta_1\boldsymbol{a}_1+\eta_2\boldsymbol{a}_{q+1})\leqq\eta_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+\eta_2\phi(\boldsymbol{a}_{q+1}),$$

が成立する．さて，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{q+1}]=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_q]\cup[\boldsymbol{a}_q, \boldsymbol{a}_{q+1}]$ であるから，$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{q+1}]$ は $\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_q]$ あるいは $\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{a}_q, \boldsymbol{a}_{q+1}]$ を意味する．$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_q]$ ならば，⑥に注目して，

⑨
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}=\nu_1\boldsymbol{a}_1+\nu_2\boldsymbol{a}_{q+1}, \ (\nu_1, \nu_2)\in\Delta_+, \\ \boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{a}_1+\xi_2\boldsymbol{a}_q=(\xi_1+\xi_2\eta_1)\boldsymbol{a}_1+\xi_2\eta_2\boldsymbol{a}_{q+1}, \ (\xi_1, \xi_2)\in\Delta_\oplus, \\ \nu_1=\xi_1+\xi_2\eta_1, \ \nu_2=\xi_2\eta_2, \end{cases}$$

とおくと，帰納法の仮定，⑨及び⑧により，

⑩
$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}) &\leqq \xi_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+\xi_2\phi(\boldsymbol{a}_q) \\ &\leqq \xi_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+\xi_2[\eta_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+\eta_2\phi(\boldsymbol{a}_{q+1})] \\ &=(\xi_1+\xi_2\eta_1)\phi(\boldsymbol{a}_1)+\xi_2\eta_2\phi(\boldsymbol{a}_{q+1}) \\ &=\nu_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+\nu_2\phi(\boldsymbol{a}_{q+1}). \end{aligned}$$

一方，$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{a}_q, \boldsymbol{a}_{q+1}]$ ならば，再び⑥に注目して，

$$⑨' \quad \begin{cases} \boldsymbol{x}=\nu_1'\boldsymbol{a}_1+\nu_2'\boldsymbol{a}_{q+1}, \ (\nu_1', \nu_2')\in\Delta_\oplus, \\ \boldsymbol{x}=\xi_1'\boldsymbol{a}_q+\xi_2'\boldsymbol{a}_{q+1}, \ (\xi_1', \xi_2')\in\Delta_\oplus, \\ \quad =\xi_1'\eta_1\boldsymbol{a}_1+(\xi_1'\eta_2+\xi_2')\boldsymbol{a}_{q+1}, \\ \nu_1'=\xi_1'\eta_1, \ \nu_2'=\xi_1'\eta_2+\xi_2', \end{cases}$$

とおくと，⑨′，①及び⑧により，

$$\begin{aligned} ⑩' \quad \phi(\boldsymbol{x}) &\leqq \xi_1'\phi(\boldsymbol{a}_q)+\xi_2'\phi(\boldsymbol{a}_{q+1}) \\ &\leqq \xi_1'[\eta_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+\eta_2\phi(\boldsymbol{a}_{q+1})]+\xi_2'\phi(\boldsymbol{a}_{q+1}) \\ &=\xi_1'\eta_1\phi(\boldsymbol{a}_1)+(\xi_1'\eta_2+\xi_2')\phi(\boldsymbol{a}_{q+1}) \\ &=\nu_1'\phi(\boldsymbol{a}_1)+\nu_2'\phi(\boldsymbol{a}_{q+1}). \end{aligned}$$

かくして，⑩及び⑩′により，$p=q+1$ に対して⑤が成立することが示された．特に，$p=k$ に対して⑤を適用し，$\boldsymbol{a}_1:=\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{a}_k:=\boldsymbol{x}_2$ を想起すると，(ii)の成立が主張される．　‖

定義 3　実関数のエピグラフ・ハイポグラフ

実関数 ϕ: $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ に対して，集合

$$\text{epi}\,\phi:=\{(\boldsymbol{x}, \mu)\mid(\boldsymbol{x}, \mu)\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{R}, \ \phi(\boldsymbol{x})\leqq\mu\},$$

$$\text{hyp}\,\phi:=\{(\boldsymbol{x}, \mu)\mid(\boldsymbol{x}, \mu)\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{R}, \ \phi(\boldsymbol{x})\geqq\mu\},$$

を，それぞれ，ϕ のエピグラフ及び ϕ のハイポグラフという．

定理 2　$\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ は凸集合とする．実関数 ϕ: $\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{R}$ に対して，次の(i)(ii)(iii)は同値である．

(i)　ϕ が凸実関数である．

(ii)　$^\forall k\in\boldsymbol{N}\,^\forall\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{C}\,^\forall(\theta_1, \cdots, \theta_k)\in\Delta_\oplus^{k-1}$:

$$\phi(\Sigma_{i=1}^k\theta_i\boldsymbol{x}_i)\leqq\Sigma_{i=1}^k\theta_i\phi(\boldsymbol{x}_i).$$

(iii)　epi ϕ が凸集合である．

証明　定理1により，(i)⇔(ii)は明らかであるので，(i)⇔(iii)を示す．

(i)⇒(iii). $(\boldsymbol{x}_1, \mu_1)$, $(\boldsymbol{x}_2, \mu_2) \in \mathrm{epi}\,\phi$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Delta_{\oplus}$ は任意所与とする. $\boldsymbol{C}$ の凸性, (i)及び定理1により,

$$\theta_1(\boldsymbol{x}_1, \mu_1) + \theta_2(\boldsymbol{x}_2, \mu_2) = (\theta_1\boldsymbol{x}_1 + \theta_2\boldsymbol{x}_2, \theta_1\mu_1 + \theta_2\mu_2) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R},$$

$$\phi(\theta_1\boldsymbol{x}_1 + \theta_2\boldsymbol{x}_2) \leqq \theta_1\phi(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2\phi(\boldsymbol{x}_2) \leqq \theta_1\mu_1 + \theta_2\mu_2,$$

であるから, $\theta_1(\boldsymbol{x}_1, \mu_1) + \theta_2(\boldsymbol{x}_2, \mu_2) \in \mathrm{epi}\,\phi$ となって結論を得る.

(iii)⇒(i). $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{C}$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Delta_{\oplus}$ は任意所与とする. $(\boldsymbol{x}_1, \phi(\boldsymbol{x}_1))$, $(\boldsymbol{x}_2, \phi(\boldsymbol{x}_2)) \in \mathrm{epi}\,\phi$ であるから, (iii) により,

$$\theta_1(\boldsymbol{x}_1, \phi(\boldsymbol{x}_1)) + \theta_2(\boldsymbol{x}_2, \phi(\boldsymbol{x}_2))$$
$$= (\theta_1\boldsymbol{x}_1 + \theta_2\boldsymbol{x}_2, \theta_1\phi(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2\phi(\boldsymbol{x}_2)) \in \mathrm{epi}\,\phi,$$

すなわち,

$$\phi(\theta_1\boldsymbol{x}_1 + \theta_2\boldsymbol{x}_2) \leqq \theta_1\phi(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2\phi(\boldsymbol{x}_2),$$

となって, 定理1により, 結論を得る. ‖

§2 凸拡張関数

定義4 拡張関数

集合 $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n$ から拡張された実数 $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ への関数 $f: \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を拡張関数という.

定義5 拡張関数のエピグラフ・ハイポグラフ

拡張関数 $f: \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して, 集合

$$\mathrm{epi}\,f := \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid (\boldsymbol{x}, \mu) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{R},\ f(\boldsymbol{x}) \leqq \mu\},$$

$$\mathrm{hyp}\,f := \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid (\boldsymbol{x}, \mu) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{R},\ f(\boldsymbol{x}) \geqq \mu\},$$

を, それぞれ, f のエピグラフ及び f のハイポグラフという.

定義6 凸拡張関数・凹拡張関数

拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ は, $\mathrm{epi} f$ が凸集合であるとき, 凸拡張関数であるといい, $\mathrm{hyp} f$ が凸集合であるとき, 凹拡張関数であるという.

注意4.1 任意所与の実関数 $\phi: \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ に対して, 改めて, 拡張関数

凸拡張関数

$f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を,

$$(*)\quad \begin{cases} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) := \phi(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}^c \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) := \infty, \end{cases}$$

あるいは,

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) := \phi(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}^c \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) := -\infty, \end{cases}$$

によって定義すると, f と ϕ との間には, $\mathrm{epi}\, f = \mathrm{epi}\, \phi$《$\mathrm{hyp}\, f = \mathrm{hyp}\, \phi$》という関係が保持されつつ, f は ϕ に比して, (1)定義域が $\boldsymbol{R}^n$ に拡張され, (2)値域が拡張された実数 $\boldsymbol{R}^n \cup \{-\infty, \infty\}$ に拡張されている. 定義6は, この点に留意した上で, 定義1を拡張したものである.

注意4.2 定義6が, 定義1のように不等式関係に基づいて定義されるのではなく, $\mathrm{epi}\, f$《$\mathrm{hyp}\, f$》の凸性に基づいて定義されているのは, (1)(2)の意味で拡張された関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ については, 一般に定理2が成立せず, $\mathrm{epi}\, f$《$\mathrm{hyp}\, f$》が凸集合であることの方が, f が凸《凹》実関数であることよりも広い概念だからである[1].

注意4.3 (1)(2)の意味で拡張された関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を導入することの理由は, 応用上の特定の問題を処理するに当って, そのときどきに構成される特定の関数について, いちいち, 定義域に注意を払わねばならないという煩雑さをひとまず回避して, 一般論を展開できる, という利点があるからである.

注意5 拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して, 次の(i)(ii)は同値である.

(i) f が凸拡張関数である.

(ii) $-f$ が凹拡張関数である.

---

1) 拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ が $\boldsymbol{R}^n$ 上で ∞ と $-\infty$ の両者を取る場合には, 不等式関係では, $\infty - \infty$ という定義不能のケースが発生しうる.

証明　epi f が凸であることと hyp$(-f)$ が凸であることが同値であることを示せばよいが，これは，$i=1,2$，に対して，

$$(x_i,\ \mu_i)\in \mathrm{epi} f \Leftrightarrow (x_i,\ -\mu_i)\in \mathrm{hyp}(-f),$$

という関係から，明らかである．　‖

注意 6　注意 5 により，凹拡張関数は，符号を変更することにより，凸拡張関数となるので，凹拡張関数の議論は，結局のところ，凸拡張関数の議論に帰着する．そこで，本稿では，凸拡張関数のみを取り扱うことにする．

注意 7　$C\subset \boldsymbol{R}^n$ は凸集合とする．以下の各関数(1)〜(9)は，凸実関数ないしは凸拡張関数である．

(1)　実関数 $\phi_1: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$,

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) := \max\{\xi_j \mid j=1,\cdots,n\},\ \text{ただし，}\ \boldsymbol{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_n).$$

(2)　チェビシェフ・ノルム $\phi_2: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}_\oplus$,

$$\phi_2(\boldsymbol{x}) := \max\{|\xi_j| \mid j=1,\cdots,n\},\ \text{ただし，}\ \boldsymbol{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_n).$$

(3)　線形(実)関数 $\phi_3: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$,

$$\phi_3(\boldsymbol{x}) := \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}\rangle,\ \ \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}^n\ \text{は所与．}$$

(4)　アフィン(実)関数 $\phi_4: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$,

$$\phi_4(\boldsymbol{x}) := \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}\rangle+\alpha,\ \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}^n,\ \alpha\in \boldsymbol{R}\ \text{は所与．}$$

(5)　非負値定符号行列 M によって定義された 2 次形式 $\phi_5: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$,

$$\phi_5(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{x},\ M\boldsymbol{x}\rangle+\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}\rangle+\alpha,$$

ただし，M は n 次の非負値定符号行列，$\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}^n$，$\alpha\in \boldsymbol{R}$ は所与．

(6)　表示関数 (indicator function) $\delta(\cdot\mid C): \boldsymbol{R}^n\to\{0,\ \infty\}$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}\in C \Rightarrow \delta(\boldsymbol{x}\mid C) := 0, \\ \boldsymbol{x}\in C^c \Rightarrow \delta(\boldsymbol{x}\mid C) := \infty. \end{cases}$$

(7)　支持関数 (support function) $\delta^*(\cdot\mid C): C\to \boldsymbol{R}$，$C$ は有界集合,

$$\delta^*(\boldsymbol{x}\mid C) := \sup\{\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle \mid \boldsymbol{y}\in C\}.$$

(8)　ミンコフスキー関数 $\mu(\cdot\mid C): C\neq\emptyset\to \boldsymbol{R}$,

$$\mu(\boldsymbol{x} \mid C) := \inf\{\alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{R}_{\oplus},\ \boldsymbol{x} \in \alpha C\}.$$

(9) 距離関数 $d(\cdot, C): C \to \boldsymbol{R}$,

$$d(\boldsymbol{x}, C) := \inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \mid \boldsymbol{y} \in C\}.$$

証明 (1)～(4), (6) は明らかであるから, (5), (7)～(9) の直接的証明を与える.[1)] 以下, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in C$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Delta_{\oplus}$ は任意所与とする.

(5). M は非負値定符号行列であるから,

$$\begin{aligned} &2[\theta_1 \phi_5(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2 \phi_5(\boldsymbol{x}_2) - \phi_5(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2)] \\ &\quad = \theta_1 \langle \boldsymbol{x}_1, M\boldsymbol{x}_1 \rangle + \theta_2 \langle \boldsymbol{x}_2, M\boldsymbol{x}_2 \rangle - \langle \theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2, M(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) \rangle \\ &\quad = \theta_1 \theta_2 \langle \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, M(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \rangle \geqq 0. \end{aligned}$$

よって, 定理 1 により, 結論を得る.

(7). 任意所与の $\boldsymbol{y} \in C$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle &= \theta_1 \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \theta_2 \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle \\ &\leqq \theta_1 \sup\{\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in C\} + \theta_2 \sup\{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in C\}, \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\sup\{\langle \theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in C\} \\ &\quad \leqq \theta_1 \sup\{\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in C\} + \theta_2 \sup\{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in C\}, \end{aligned}$$

となり, 定理 1 により, 結論を得る.

(8). $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ は任意所与とする. inf の定義により, $\boldsymbol{x}_i \in [\mu(\boldsymbol{x}_i \mid C) + \varepsilon]C$, $i = 1, 2$, であるから, 文献〔4〕の定理 3 (iii) により,

$$\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2 \in [\theta_1 \mu(\boldsymbol{x}_1 \mid C) + \theta_2 \mu(\boldsymbol{x}_2 \mid C) + \varepsilon]C,$$

すなわち,

$$\mu(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2 \mid C) \leqq \theta_1 \mu(\boldsymbol{x}_1 \mid C) + \theta_2 \mu(\boldsymbol{x}_2 \mid C) + \varepsilon.$$

ここで, $\varepsilon \to 0$ とすれば, 定理 1 により, 結論を得る.

(9). $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ は任意所与とする. inf の定義により,

---

1) (7)については, 注意10で別証を与える. また, (8)及び(9)については, 別の機会に別証を与える予定である.

$$\exists y_i \in C : \|x_i - y_i\| \leqq d(x_i, C) + \varepsilon, \ i=1, 2.$$

そこで，この $y_i \in C$ を固定し，$\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 \in C$ を考えると，

$$\theta_1 d(x_1, C) + \theta_2 d(x_2, C) \geqq \theta_1 \|x_1 - y_1\| + \theta_2 \|x_2 - y_2\| - 2\varepsilon$$
$$\geqq \|(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) - (\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2)\| - 2\varepsilon \geqq d(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2, C) - 2\varepsilon.$$

ここで，$\varepsilon \to 0$ とすれば，定理 1 により，結論を得る． ‖

定義 7　拡張関数の実効定義域

拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} f &:= \{x \mid x \in \boldsymbol{R}^n, f(x) < \infty\} \\ &= \{x \mid x \in \boldsymbol{R}^n, {}^{\exists}\mu \in \boldsymbol{R} : (x, \mu) \in \operatorname{epi} f\} \end{aligned}$$

を f の実効定義域という．

注意 8　凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ の $\operatorname{dom} f$ は凸集合である．

証明　$x_i \in \operatorname{dom} f$, $(x_i, \mu_i) \in \operatorname{epi} f$, $i=1, 2$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Delta_\oplus$ は任意所与とする．$\operatorname{epi} f$ は凸集合であるから，

$$\theta_1 (x_1, \mu_1) + \theta_2 (x_2, \mu_2) = (\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2, \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2) \in \operatorname{epi} f,$$

すなわち，

$$f(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \leqq \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2 < \infty,$$

となって，結論を得る． ‖

定義 8　真凸拡張関数・非真凸々拡張関数

凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ は，

$$\begin{cases} \operatorname{dom} f \neq \emptyset, \\ {}^{\forall} x \in \boldsymbol{R}^n : f(x) > -\infty, \end{cases}$$

ならば，真凸拡張関数であるといい，真凸でないならば，非真凸々拡張関数であるという[1)]

注意 9　真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ は，非空凸集合 $C \subset \boldsymbol{R}^n$ を定義域

1)　応用上の多くの場合には，凸拡張関数一般よりも，むしろ真凸拡張関数の方が重要な研究対象となるかもしれない．しかし，非真凸々拡張関数を考察対象から全く排除すべきであるという理由はないのであるから，真凸拡張関数よりも一般概念である凸拡張関数から議論を展開するわけである．

とする凸実関数 $\phi: C \neq \emptyset \to \boldsymbol{R}$ から，（$*$）によって作られる．逆に，真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ から，定義域を $\mathrm{dom} f$ に制限することによって，凸実関数 $\phi: \mathrm{dom} f \to \boldsymbol{R}$ を作ることができる．

定理 3　拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して，

$$(\mathrm{epi} f)^\circ := \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid (\boldsymbol{x}, \mu) \in \mathrm{epi} f,\ f(\boldsymbol{x}) < \mu\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1},$$

とおくと，次の（i）(ii)（iii）は同値である．

（i）　f が凸拡張関数である．

（ii）　$\forall (\boldsymbol{x}_1, \mu_1), (\boldsymbol{x}_2, \mu_2) \in (\mathrm{epi} f)^\circ\ \forall (\theta_1, \theta_2) \in \Delta_+$：

$$f(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) < \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2.$$

（iii）　$\forall k \in \boldsymbol{N}\ \forall (\boldsymbol{x}_1, \mu_1), \cdots, (\boldsymbol{x}_k, \mu_k) \in (\mathrm{epi} f)^\circ\ \forall (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Delta_+^{k-1}$：

$$f(\Sigma_{i=1}^k \theta_i \boldsymbol{x}_i) < \Sigma_{i=1}^k \theta_i \mu_i.$$

証明　(ii)⇔(iii) は明らかであるので，以下，$\mathrm{dom} f \neq \emptyset$ の範囲で（i）⇔(ii) を証明する．

（i）⇒(ii)．$(\boldsymbol{x}_i, \mu_i) \in (\mathrm{epi} f)^\circ$; $i=1, 2$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Delta_+$ は任意所与とする．ある適当な $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ に対して，$(\boldsymbol{x}_i, \mu_i - \varepsilon) \in \mathrm{epi} f$ であることと，$\mathrm{epi} f$ が凸集合であることに注目して，この $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ を固定すると，

$$\theta_1(\boldsymbol{x}_1, \mu_1 - \varepsilon) + \theta_2(\boldsymbol{x}_2, \mu_2 - \varepsilon)$$
$$= (\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2,\ \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2 - \varepsilon) \in \mathrm{epi} f,$$

すなわち，

$$f(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) \leqq \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2 - \varepsilon < \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2,$$

となって，結論を得る．

(ii)⇒（i）．$(\boldsymbol{x}_i, \mu_i) \in \mathrm{epi} f$, $i=1, 2$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Delta_\oplus$, $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ は任意所与とする．$(\boldsymbol{x}_i, \mu_i + \varepsilon) \in (\mathrm{epi} f)^\circ$ であるから，(ii) により，

$$f(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) < \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2 + \varepsilon.$$

ここで，$\varepsilon \to 0$ とすれば，

$$(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2,\ \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2) = \theta_1(\boldsymbol{x}_1, \mu_1) + \theta_2(\boldsymbol{x}_2, \mu_2) \in \mathrm{epi} f,$$

となって，結論を得る． ‖

定理 4　拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ に対して，次の（i）（ii）（iii）は同値である．

（i）　f が凸拡張関数である．

（ii）　$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{dom} f \, \forall (\theta_1, \theta_2) \in \Delta_{\oplus}$:

$$f(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) \leqq \theta_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2 f(\boldsymbol{x}_2).$$

（iii）　$\forall k \in \boldsymbol{N} \, \forall \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \mathrm{dom} f \, \forall (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Delta_{\oplus}^{k-1}$:

$$f(\Sigma_{i=1}^k \theta_i \boldsymbol{x}_i) \leqq \Sigma_{i=1}^k \theta_i f(\boldsymbol{x}_i).$$

証明　定義 5 －定義 7，定理 1 及び定理 2 により，明らかである． ‖

系 1　拡張関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ に対して，次の（i）（ii）（iii）は同値である．

（i）　f が真凸拡張関数である．

（ii）　$\begin{cases} \mathrm{dom} f \neq \emptyset, \\ \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{dom} f \, \forall (\theta_1, \theta_2) \in \Delta_{\oplus} : \end{cases}$

$$f(\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2) \leqq \theta_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \theta_2 f(\boldsymbol{x}_2).$$

（iii）　$\begin{cases} \mathrm{dom} f \neq \emptyset, \\ \forall k \in \boldsymbol{N} \, \forall \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \mathrm{dom} f \, \forall (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Delta_{\oplus}^{k-1} : \end{cases}$

$$f(\Sigma_{i=1}^k \theta_i \boldsymbol{x}_i) \leqq \Sigma_{i=1}^k \theta_i f(\boldsymbol{x}_i).$$

証明　定理 4 から，直ちに得られる． ‖

系 2　$k (\in \boldsymbol{N})$ 個の真凸拡張関数 $f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$, $i = 1, \cdots, k$, に対して，$\cap_{i=1}^k \mathrm{dom} f_i \neq \emptyset$ ならば，

$$(\Sigma_{i=1}^k \alpha_i f_i)(\boldsymbol{x}) := \Sigma_{i=1}^k \alpha_i f_i(\boldsymbol{x}), \ \alpha_i \in \boldsymbol{R}_+ \text{ は所与,}$$

によって定義される拡張関数 $\Sigma_{i=1}^k \alpha_i f_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ もまた真凸拡張関数である．

証明　$f := \Sigma_{i=1}^k \alpha_i f_i$ とおく．$\mathrm{dom} f = \cap_{i=1}^k \mathrm{dom} f_i \neq \emptyset$ である．ここで，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{dom} f$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Delta_{\oplus}$ は任意所与とすると，系 1 により，

$$f(\theta_1 \boldsymbol{x}_1+\theta_2 \boldsymbol{x}_2)=\Sigma_{i=1}^k \alpha_i f_i(\theta_1 \boldsymbol{x}_1+\theta_2 \boldsymbol{x}_2)$$
$$\leqq \Sigma_{i=1}^k \alpha_i[\theta_1 f_i(\boldsymbol{x}_1)+\theta_2 f_i(\boldsymbol{x}_2)]$$
$$=\theta_1 \Sigma_{i=1}^k \alpha_i f_i(\boldsymbol{x}_1)+\theta_2 \Sigma_{i=1}^k \alpha_i f_i(\boldsymbol{x}_2)=\theta_1 f(\boldsymbol{x}_1)+\theta_2 f(\boldsymbol{x}_2).$$

よって，再び系1により，結論を得る． ‖

系 3 凸実関数 $\phi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ と非減少凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ に対して，合成拡張関数 $f\circ\phi: \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ は凸拡張関数である．

証明 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{dom}(f\circ\phi)$，$(\theta_1, \theta_2)\in\Delta_\oplus$ は任意所与とする．$\phi(\boldsymbol{x}_1)$，$\phi(\boldsymbol{x}_2)$ $\in \mathrm{dom} f$ であることに留意すると，f の非減少性，定理1及び定理4により，

$$(f\circ\phi)(\theta_1 \boldsymbol{x}_1+\theta_2 \boldsymbol{x}_2)=f[\phi(\theta_1 \boldsymbol{x}_1+\theta_2 \boldsymbol{x}_2)]\leqq f[\theta_1 \phi(\boldsymbol{x}_1)+\theta_2 \phi(\boldsymbol{x}_2)]$$
$$\leqq \theta_1 f[\phi(\boldsymbol{x}_1)]+\theta_2 f[\phi(\boldsymbol{x}_2)]=\theta_1(f\circ\phi)(\boldsymbol{x}_1)+\theta_2(f\circ\phi)(\boldsymbol{x}_2).$$

よって，再び定理4により，結論を得る． ‖

定理 5 拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ に対して，次の（i）(ii) は同値である．

（i） f が凸拡張関数である．

（ii） 任意所与の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$\begin{cases} \alpha\in[0,1] \Rightarrow \psi(\alpha) := f[\alpha \boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2], \\ \alpha\in[0,1]^c \Rightarrow \psi(\alpha) := \infty, \end{cases}$$

によって定義される拡張関数 $\psi: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty, \infty\}$ は凸拡張関数である．

証明 $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{R}^n$, $\alpha_i\in[0,1]$，$i=1,2$，$(\theta_1, \theta_2)\in\Delta_\oplus$ は任意所与とし，$\boldsymbol{y}_i := \alpha_i \boldsymbol{x}_1+(1-\alpha_i)\boldsymbol{x}_2$，とおくと，$f(\boldsymbol{y}_i)=\psi(\alpha_i)$ であり，また，

$$\theta_1 \boldsymbol{y}_1+\theta_2 \boldsymbol{y}_2=\theta_1\{\alpha_1 \boldsymbol{x}_1+(1-\alpha_1)\boldsymbol{x}_2\}+\theta_2\{\alpha_2 \boldsymbol{x}_1+(1-\alpha_2)\boldsymbol{x}_2\}$$
$$=(\theta_1\alpha_1+\theta_2\alpha_2)\boldsymbol{x}_1+\{1-(\theta_1\alpha_1+\theta_2\alpha_2)\}\boldsymbol{x}_2,$$

により，

$$f(\theta_1 \boldsymbol{y}_1+\theta_2 \boldsymbol{y}_2)=\psi(\theta_1\alpha_1+\theta_2\alpha_2),$$

であるから，epi f が凸集合であることと epi ψ が凸集合であることは同値である． ‖

定理 6　凸拡張関数 $f_i: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ の任意の族 $\{f_i \mid i \in \Lambda$(添数集合)$\}$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x}) := \sup\{f_i(\boldsymbol{x}) \mid i \in \Lambda\}$$

によって定義される拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ もまた凸拡張関数である.

証明

$$\begin{aligned}\mathrm{epi}\, f &= \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid f(\boldsymbol{x}) \leqq \mu\} = \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid {}^\forall i \in \Lambda : f_i(\boldsymbol{x}) \leqq \mu\} \\ &= \cap_{i \in \Lambda} \{(\boldsymbol{x}, \mu) \mid f_i(\boldsymbol{x}) \leqq \mu\} = \cap_{i \in \Lambda} \mathrm{epi}\, f_i \subset \boldsymbol{R}^{n+1}.\end{aligned}$$

よって, $\mathrm{epi}\, f_i (i \in \Lambda)$ が凸集合であることと文献〔4〕の定理2により, 結論を得る. ‖

注意10　支持関数 $\delta^*(\cdot \mid C): \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $C \subset \boldsymbol{R}^n$ は有界凸集合,

$$\delta^*(\boldsymbol{x} \mid C) := \sup\{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \mid \boldsymbol{y} \in C\},$$

は, 線形(実)関数 $f_{\boldsymbol{y}}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) := \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ の点 $\boldsymbol{x} \in C$ ごとの集合 $\{f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{y} \in C\}$ の点別上限 $\sup\{f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{y} \in C\}$ にほかならない. よって, 定理6及び定理2により, 凸実関数である.

§3　正の1次同次凸拡張関数

定義 9　正の1次同次拡張関数・非負の1次同次拡張関数

拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ は,

$${}^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\, {}^\forall \alpha \in \boldsymbol{R}_+ : f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}),$$

ならば, 正の1次同次拡張関数といい,

$${}^\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\, {}^\forall \alpha \in \boldsymbol{R}_\oplus : f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}),$$

ならば, 非負の1次同次拡張関数という.

注意11　拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $f(\boldsymbol{0}) \in \boldsymbol{R}$, に対して, 次の(i)(ii)は同値である.

(i)　f が正の1次同次拡張関数である.

(ii)　f が非負の1次同次拡張関数である.

証明　(i)⇒(ii) を示せばよいが，それには，$f(\mathbf{0})=0$ を示せばよい．$\alpha\in\boldsymbol{R}_+$, $\alpha\neq 1$, は任意所与とすると，定義によって，$f(\alpha\mathbf{0})=\alpha f(\mathbf{0})$，すなわち，$f(\mathbf{0})=\alpha f(\mathbf{0})$．よって，$f(\mathbf{0})=0$ である．　‖

定理 7　拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, $f(\mathbf{0})\in\boldsymbol{R}$, に対して，次の (i)(ii) は同値である．

(i)　f が正の 1 次同次拡張関数である．

(ii)　epi f が錐である．

証明　(i)⇒(ii)．$(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\,f$, $\alpha\in\boldsymbol{R}_\oplus$ は任意所与とする[1]．(i)及び注意11により，$\alpha f(\boldsymbol{x})=f(\alpha\boldsymbol{x})\leqq\alpha\mu$，であるから，$(\alpha\boldsymbol{x},\alpha\mu)=\alpha(\boldsymbol{x},\mu)\in\mathrm{epi}\,f$．よって，文献〔4〕の定理13により，epi f は錐である．

(ii)⇒(i)．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$, $\alpha\in\boldsymbol{R}_+$ は任意所与とする．最初に，$f(\boldsymbol{x})<\infty$ とする．$(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))\in\mathrm{epi}\,f$ であるから，(ii) により，$\alpha(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))=(\alpha\boldsymbol{x},\alpha f(\boldsymbol{x}))\in\mathrm{epi}\,f$．よって，

①　$f(\alpha\boldsymbol{x})\leqq\alpha f(\boldsymbol{x})<\infty$,

となり，$(\alpha\boldsymbol{x},f(\alpha\boldsymbol{x}))\in\mathrm{epi}\,f$ でもある．そこで，再び (ii) により，$\alpha^{-1}(\alpha\boldsymbol{x},f(\alpha\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{x},\alpha^{-1}f(\alpha\boldsymbol{x}))\in\mathrm{epi}\,f$ となるから，

②　$\alpha f(\boldsymbol{x})\leqq f(\alpha\boldsymbol{x})<\infty$.

よって，①②により，(i) を得る．次に，$f(\boldsymbol{x})=\alpha f(\boldsymbol{x})=\infty$ とする．$f(\alpha\boldsymbol{x})<\infty$ ならば，上と同様の議論によって，②が成立するが，これは矛盾である．つまり，$f(\alpha\boldsymbol{x})=\infty$ であり，やはり，(i) を得る．　‖

定理 8　正の 1 次同次拡張関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ に対して，次の (i)(ii) は同値である．

(i)　f が凸拡張関数である．

(ii)　$\forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n: f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\leqq f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2)$.

証明　(i)⇒(ii)．$\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{R}^n$, $i=1,2$, は任意所与とする．$f(\boldsymbol{x}_1)=\infty$，ある

1)　$\alpha\in\boldsymbol{R}_+$ ならば，条件 $f(\mathbf{0})\in\boldsymbol{R}$ は不要である．

いは，$f(\boldsymbol{x}_2)=\infty$ のときには，結論は自明であるので，$f(\boldsymbol{x}_i)<\infty$ としておくと，$(\boldsymbol{x}_i, f(\boldsymbol{x}_i))\in \mathrm{epi}f$ である．(i) と定理7により，epi$f$ が凸錐であることに注目すると，

$$(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2))$$
$$=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{x}_1, 2f(\boldsymbol{x}_1))+\frac{1}{2}(2\boldsymbol{x}_2, 2f(\boldsymbol{x}_2))\in \mathrm{epi}f,$$

となって，(ii) を得る．

(ii)⇒(i)．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in \mathrm{dom}f\subset \boldsymbol{R}^n$, $(\theta_1, \theta_2)\in \Delta_\oplus$ は任意所与とする．(ii) により，

$$f(\theta_1\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{x}_2)\leqq f(\theta_1\boldsymbol{x}_1)+f(\theta_2\boldsymbol{x}_2)=\theta_1 f(\boldsymbol{x}_1)+\theta_2 f(\boldsymbol{x}_2)$$

となって，定理4により，(i) を得る．‖

系　正の1次同次真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ に対して，次の関係(1)(2)が成立する．

(1)　$^\forall k\in \boldsymbol{N}\,^\forall \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in \boldsymbol{R}^n\,^\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_k\in \boldsymbol{R}_+$:
$$f(\Sigma_{i=1}^k \alpha_i\boldsymbol{x}_i)\leqq \Sigma_{i=1}^k \alpha_i f(\boldsymbol{x}_i).$$

(2)　$^\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n: f(\boldsymbol{x})\geqq -f(-\boldsymbol{x})$.

証明　(1)．定理8から，直ちに得られる．

(2)．$f(\boldsymbol{0})\in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ であるが，$f(\boldsymbol{0})\in \boldsymbol{R}$ ならば，注意11により，$f(\boldsymbol{0})=0$ であることに注目すると，定理8により，任意所与の $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$0\leqq f(\boldsymbol{0})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x}),$$

となって，結論を得る．‖

定理9　正の1次同次真凸拡張関数 $f: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ と $r(\leqq n)$ 次元線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の (i)(ii) は同値である．

(i)　f が $\boldsymbol{L}$ 上で線形(実)関数である，すなわち，
$$^\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in \boldsymbol{L}\,^\forall \alpha_1, \alpha_2\in \boldsymbol{R}: f(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)=\alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1)+\alpha_2 f(\boldsymbol{x}_2).$$

(ii) $\forall x \in L : f(-x) = -f(x)$.

証明 (i)⇒(ii) は自明であるので，(ii)⇒(i) を示す．$x, x_1, x_2 \in L$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in R$ は任意所与とする．$\alpha > 0$ ならば，$f(\alpha x) = \alpha f(x)$ であるが，$\alpha < 0$ に対しても，(ii) により，$f(\alpha x) = -f(-\alpha x) = -(-\alpha) f(x) = \alpha f(x)$ となるから，

① $\forall x \in L \, \forall \alpha \in R : f(\alpha x) = \alpha f(x)$,

となることに注目しておく．さて，①，定理8(ii)及び(ii)を順次利用すると，

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) &= f(\alpha_1 x_1) + f(\alpha_2 x_2) \geqq f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= -f[-(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] = -f[(-\alpha_1) x_1 + (-\alpha_2) x_2] \\ &\geqq -f[(-\alpha_1) x_1] - f[(-\alpha_2) x_2] = -(-\alpha_1) f(x_1) - (-\alpha_2) f(x_2) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \end{aligned}$$

となるが，これは，

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

を意味する． ‖

(関西学院大学経済学部教授)

参　考　文　献

〔1〕 Avriel, M., *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

〔2〕 Bazaraa, M.S.-Shetty, C.M., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

〔3〕 福尾洋一「アフィン集合」『経済学論究(関西学院大学)』33(3)(1979), pp. 97―122.

〔4〕 ――――「凸集合」『経済学論究(関西学院大学)』34(1)(1980), pp. 29―52.

〔5〕 ――――「凸集合の特性錐・直系空間」『経済学論究』(関西学院大学)』34(4)(1981), pp. 19―42.

〔6〕 福島雅夫『非線形最適化の理論』産業図書，1980年.

〔7〕 今野　浩・山下　浩『非線形計画法』日科技連，1978年.

〔8〕 Mangasarian, O, L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.（関根智明訳『非線形計画法」培風館，1972年.）

〔9〕 Rockafellar, R. T., *Convex Analysis,* Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

〔10〕 Stoer, J.-Witzgall, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I,* Springer-Verlag, Berlin, 1970.