回帰分析における攪乱項の推定量について

根　岸　　紳

I　はじめに

最小二乗（OLS）残差は攪乱項の推定値のようなものであると通常考えられている．OLS残差はBLUE（最良線型不偏推定量）という好ましい性質にもかかわらず，攪乱項の推定量として不都合な点があり，それはOLS残差の共分散行列が分散の均一性ならびに無相関性を満たさないという点である（問題点1）．たとえば，残差をそのままプロットすることによって，攪乱項の分散の均一性や系列的な独立性を調べることには多少の疑問があるということである．一方，このような問題はあるけれども，OLS残差を用いて系列相関に関するひとつの検定法――ダービン・ワトソン統計量（DWと略称する）による検定――が展開され，実用にひろく供されている．ところがよく知られているように，DW検定によれば，とくに説明変数が多く標本サイズが小さい場合（通常のエコノメトリック・モデルの計測の時たびたび出会う），検定の受容・棄却の決定が不可能になる領域が大きくなるという問題点があり，これはDW統計量が説明変数行列に依存してしまうことにその理由があることが知られている[1]（問題点2）．これらの問題点に対して，現在まで実にさまざまな解消法が模索，検討されてきたが，とくに系列相関の検定に関して，多くの論文が出ており[2]，

1）たとえばDhrymes〔5〕pp. 146―71に詳しい説明がある．

2）過去10年ほどに限ってみても，たとえば，残差の符号のみに注目したGearyの検定法〔7〕，またDurbin自身による，DW比が検定不能域に入ったときの処理の方法〔6〕，さらに攪乱項が非定常自己回帰仮定にしたがうときの検定を示したBerenblutとWebb〔4〕，またラッグ付従属変数を含んだモデルでの検定についてMaddalaとRao〔15〕，このモデルでの小標本の場合についてSpencer〔20〕，そして同時方程式体系の下での検定についてHarveyとPhillips〔9〕の論文がある．

いくつかの検定統計量間の検出力 power の比較も数多く行われている.[1]

さて，われわれは上にあげた問題点の解消を目ざした2つの重要な推定量 —— AL 推定量[2]と BLUS 推定量(あるいは BLUS 残差という[3]) ——をとりあげ，推定効率について比較検討する.

最初に AL 推定量の導出方法をラグランジュ法によって示し，そのあと，それぞれの推定誤差を基礎にして2つの推定量の推定効率の良さの判定方法をさぐり，簡単な数値例を最後に示す. BLUS 推定量は問題点1を解消し，DW 検定の欠点(問題点2)も修正するが，反面，この推定量は標本サイズから説明変数の個数をさし引いた量しかえられず(自由度の減少)，その上一意的にえられないという欠点をもっている. この欠点を避けようとして案出されたのが AL 推定量である. ただし問題点1についてはそのままにしている. また BLUS 推定量と同じスカラー分散共分散行列をもつ逐次残差もこの BLUS の欠点からまぬがれている. しかし，推定の効率は低い. 逐次残差については付録で紹介する.

II　AL 推定量の導出[4]

線型回帰モデルを次のように表わそう.

$$\begin{aligned} &y=X\beta+u \\ &E(u)=0,\ E(uu')=\sigma^2 I,\ rank\ \ of\ \ K=k \end{aligned} \tag{2.1}$$

1) DW 法と BLUS 法の比較には Abrahamse と Koerts〔1〕, DW 法と Geary の方法〔7〕との比較については Habibagahi と Pratschke〔8〕，そして，DW 法，BLUS 法，AL 法，Durbin の方法〔6〕の4つの方法の比較について L'Esperance と Taylor〔14〕の論文がある. なお，BLUS と AL は拙稿で分析の対象となっている推定量である.

2) Abrahamse と Koerts〔2〕ならびに Abrahamse と Louter〔3〕によってはじめて提案された推定量であり，「AL 推定量」という名称は〔14〕で使われている.

3) Theil〔21〕がはじめて提案したスカラー分散共分散行列をもつ推定量であり，そののち数々の論文がでている〔11〕，〔13〕，〔16〕，〔19〕，〔22〕. また，日本のテキストでは坂下〔19〕で詳しく紹介されている.

4) Abrahamse と Koerts〔2〕にしたがって展開していくが，彼らの導出法とは異なり，ラグランジュ法を用いて導出する.

yは$n\times 1$の従属変数ベクトル，Xは$n\times k$の非確率的説明変数ベクトル，βは$k\times 1$の未知パラメター・ベクトル，uは$n\times 1$の攪乱項ベクトルである．yについて線型であるuの推定量を

$$v=B'y \tag{2.2}$$

と表わす．ただし，Bは$n\times n$の行列である．また，不偏性の条件$E(v-u)=0$より，

$$E(B'y)=E(B'X\beta+B'u)=B'X\beta=0 \quad for\ all\ \beta$$

となるので，行列Bは

$$B'X=0 \tag{2.3}$$

を満たさねばならない．(2.3)より，Bの列はXの列によって張られた空間の直交補空間の要素である．Xのランクはkであるので，補空間の次元は$n-k$となる（Bのランク$=n-k$）．vの共分散行列は

$$E(vv')=\sigma^2B'B \tag{2.4}$$

となり，$B'B$をXとは独立な，そしてア・プリオリに選んだ，ある固定された行列，これをΩと表わそう，に等しいものとする．

$$B'B=\Omega \tag{2.5}$$

Ωは$M=I-X(X'X)^{-1}X'$と同じ性質をもっているもの，すなわち$\Omega^2=\Omega$，$\mathrm{tr}\,\Omega=\mathrm{rank}(\Omega)=n-k$と考える．$\Omega$のこの性質により固有値は$n-k$個の1と$k$個の0からなり，この固有値を次のように対角にならべれば，

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n-k & k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1\ddots 1 & \\ & 0\ddots 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n-k \\ k \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} I_{n-k} & \\ & 0_{k,k} \end{pmatrix}$$

このとき，たとえばRao〔18〕p. 39のCanonical Reductionに関する定理より

$$S'\Omega S=\begin{pmatrix} I_{n-k} & \\ & 0_{k,k} \end{pmatrix} \text{あるいは} \ \Omega=S\begin{pmatrix} I_{n-k} & \\ & 0_{k,k} \end{pmatrix}S' \tag{2.6}$$

なる直交行列 S が存在することが知られている．ここで S を次のように分割すれば，

$$S=[\overset{n-k}{K},\ \overset{k}{D}]_n$$

(2.6)は次のように表現しなおすことができる．

$$K'\Omega K=I_{n-k} \quad \text{あるいは} \quad \Omega=KK' \tag{2.7}$$

K はこの関係を満たし，かつ S の直交性より

$$K'K=I_{n-k} \tag{2.8}$$

を満たさなければならない．Ω は X より独立であるので，その固有ベクトルもまた X から独立である．それゆえ，K は X から独立であるということができる．

さて，v に関する推定誤差の2乗和の期待値は，

$$\begin{aligned}
E(v-u)'(v-u)&=Eu'(B'-I)'(B'-I)u\\
&=\mathrm{tr}\ (B'-I)'(B'-I)E(uu')\\
&=\sigma^2\ \mathrm{tr}\ BB'-2\sigma^2\ \mathrm{tr}\ B+\sigma^2\ \mathrm{tr}\ I\\
&=\sigma^2\ \mathrm{tr}\ KK'-2\sigma^2\ \mathrm{tr}\ B+n\sigma^2\\
&=\sigma^2(2n-k)-2\sigma^2\ \mathrm{tr}\ B
\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる（$\because \mathrm{tr}\,BB'=\mathrm{tr}\,B'B=\mathrm{tr}\,KK'=\mathrm{tr}\,K'K=\mathrm{tr}\,I_{n-k}$）．この(2.10)を推定効率の基準としてこれを最小化する推定量 $v=B'y$ を求めるため，問題を次のように設定しよう．

問題：$B'X=0$ かつ $B'B=KK'$ を条件として
　　$\mathrm{tr}\ B$ を最大にする B を求めよ。　(2.11)

ラグランジュの方法を使い，L をラグランジュ関数であるとすれば，(2.11)は

$$L=\mathrm{tr}\ B-\mathrm{tr}\ G_1B'X-\mathrm{tr}\ G_2(BB'-KK') \tag{2.12}$$

となり，B に関して L を微分し，その結果をゼロとおけば次式がえられる．

$$\frac{\partial L}{\partial B}=I-XG_1-BG_2'-BG_2=0 \tag{2.13}$$

(2.13)に左から X' を乗ずると，

$$X' - X'XG_1 - X'BG_2' - X'BG_2 = 0$$

となり，$B'X = 0$ であるので

$$G_1 = (X'X)^{-1}X' . \tag{2.14}$$

これを(2.13)に代入すると，

$$I - X(X'X)^{-1}X' - B(G_2 + G_2') = 0 \tag{2.15}$$

となり，この式に左から B' を乗ずると（このときも $B'X = 0$ を使う）

$$B' - B'B(G_2 + G_2') = 0 \tag{2.16}$$

$$\therefore\ G_2 + G_2' = (B'B)^{-1}B'$$

となる．これを(2.15)に代入すると，

$$B(G_2 + G_2') = B(B'B)^{-1}B' = I - X(X'X)^{-1}X' = M$$

となり，整理すると次のようになる．

$$B'(M - I) = 0 \tag{2.17}$$

さて，M はベキ等であるので，Canonical Reduction によって

$$P'MP = I_{n-k} \quad \text{あるいは} \quad M = PP' \tag{2.18}$$

なる $P(n \times (n-k))$ が存在し，

$$P'P = I_{n-k} \tag{2.19}$$

が成立する．$M = PP'$ を(2.17)に代入すると，

$$B'PP' = B'$$

となり，右より B を乗ずると，

$$B'P(B'P)' = KK' \tag{2.20}$$

となる．このとき，任意の H を用いて $B'P = KH'$ と表わすと，(2.20)が成立するためには $H'H = I_{n-k}$ が成りたたねばならず，H は $(n-k)$ 次の直交行列である（$H'H = HH' = I_{n-k}$）．ゆえに，$B'P = KH' \to P'B = HK' \to PP'B = PHK' \to MB = PHK'$ より，

$$\therefore\ B = PHK' \qquad H: \text{直交行列} \tag{2.21}$$

となる．今や(2.11)の最大化問題は次のようになる．

問題：tr PHK' を最大にする直交行列 H を求めよ． (2.22)

L' をラグランジュ関数とすれば，

$$L' = \mathrm{tr}\, PHK' - \mathrm{tr}\, G_3(H'H - I_{n-k})$$

となり，このとき K は所与であるとする．L' を H に関して微分しゼロとおくと，

$$\frac{\partial L'}{\partial H} = P'K - HG_3' - HG_3 = 0$$

となる．左より H' を乗じ整理すると，

$$H'P'K = G_3' + G_3 \tag{2.23}$$

となり，転置し H を求めると，

$$H = (K'P)^{-1}(G_3' + G_3) \tag{2.24}$$

となる．(2.23)より $H'P'K = K'PH = G_3' + G_3$ となり，$G = G_3' + G_3$ とすると，

$$G^2 = K'PHH'P'K = (K'P)(K'P)' \tag{2.25}$$

となる．このとき，$K'PH$ から先に乗ずることと $HH' = I$ を使っていることに注意する．ところで，G^2 は対称行列であるので，Canonical Reduction によって $S'G^2S = \Theta$ あるいは $G^2 = S\Theta S'$，ただし Θ は対角行列である，なる直交行列 S が存在する（S は G^2 の固有ベクトル行列で，Θ はその固有値を要素とする対角行列である）．これによって，$S'GS = \Theta^{\frac{1}{2}}$ あるいは $G = S\Theta^{\frac{1}{2}}S'$ が成りたつ[1]．$S\Theta S' = (S\Theta^{\frac{1}{2}}S')^2$ は(2.25)より $(K'P)(K'P)'$ であるので，$S\Theta^{\frac{1}{2}}S' = [(K'P)(K'P)']^{\frac{1}{2}}$ が成立する[2]．

$$\therefore\ G_3' + G_3 = [(K'P)(K'P)']^{\frac{1}{2}} \tag{2.26}$$

よって，以上より

$$\begin{aligned} B &= P(K'P)^{-1}[(K'P)(K'P)']^{\frac{1}{2}}K' \\ &= P(K'P)^{-1}(K'P)(K'P)'[(K'P)(K'P)']^{-\frac{1}{2}}K' \\ &= PP'K(K'PP'K)^{-\frac{1}{2}}K' \end{aligned}$$

1）このことについては，例えば Rao〔18〕p. 44 を参照せよ．

2）Abrahamse と Koerts〔2〕p. 72 において，(2.26)を(2.24)に代入した H が tr PHK' を最大にすることを補助定理の形で証明している．

となり，$M=PP'$ より

$$B=MK(K'MK)^{-\frac{1}{2}}K' \tag{2.27}$$

となる．これを(2.2)に代入すれば，

$$v=K(K'MK)^{-\frac{1}{2}}K'My \tag{2.28}$$

がえられる．

さて K に関する固有ベクトルは一意的ではない．というのは，Ω が $n-k$ 個の 1 に等しい重根をもっているからである．しかし，K の直交変換を考えても v の一意性がえられるのである.[1] K の直交変換を $\underline{K}=KV$, ただし V は $VV'=I_{n-k}$ を満たす直交行列である，としよう．このとき

$$\begin{aligned}\underline{v}&=\underline{K}(\underline{K}'M\underline{K})^{-\frac{1}{2}}\underline{K}'My\\&=KV(V'K'MKV)^{-\frac{1}{2}}V'K'My\\&\overset{2)}{=}KVV'(K'MK)^{-\frac{1}{2}}VV'K'My\\&=K(K'MK)^{-\frac{1}{2}}K'My\end{aligned} \tag{2.29}$$

が成立するので，v は一意的であることがわかる．なお，v の性質については次節にまわすが，次に 2 つの推定量——BLUS 推定量と OLS 残差——と本節で展開した AL 推定量との関係をみておこう．

(2.28)において $K'=[0_{n-k,k}\ I_{n-k}]$ とおくと BLUS 推定量がえられる．M を次のように分割する．

$$M=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ & \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix} \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array}\end{array} \tag{2.30}$$

このとき，

$$K'MK=M_{11} \tag{2.31}$$

となり，

1) このことは〔2〕p. 73 に示されている．

2) この等式が成立するためには，たとえば p.96注1）と同じく Rao〔18〕p. 44 を参照せよ．

$$v=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{11}^{-\frac{1}{2}}M_{10} & M_{11}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} y \tag{2.32}$$

がえられ，これはBLUS推定量である．いまXも次のように分割すると，

$$X'=\begin{array}{c} \begin{matrix} k & n-k \end{matrix} \\ \left[X_0' \quad X_1'\right]k \end{array} \tag{2.33}$$

Mの分割された行列との関係は，

$$\begin{aligned} M_{00}&=I-X_0(X'X)^{-1}X_0' \\ M_{01}&=-X_0(X'X)^{-1}X_1'=M_{10}' \\ M_{11}&=I-X_1(X'X)^{-1}X_1' \end{aligned} \tag{2.34}$$

と表わされる．

次に，$K=P$とおけばOLS残差がえられる．(2.28)より，$K=P$, $M=PP'$, $P'P=I$を考慮すれば，

$$\begin{aligned} v&=P(P'PP'P)^{-\frac{1}{2}}P'My \\ &=M^2y=My \end{aligned} \tag{2.35}$$

となり，これはOLS残差である．またL'EsperanceとTaylor〔14〕p. 3の脚注によって示されているように，問題(2.11)での制約を$B'X=0$のみ考えれば，OLS残差がえられるのである．すなわち，この場合ラグランジュ関数は次のようになり，

$$L=\mathrm{tr}\ BB'-2\ \mathrm{tr}\ B+\mathrm{tr}\ I-\mathrm{tr}\ GB'X \tag{2.36}$$

これをBについて微分しゼロとおくと，

$$\frac{\partial L}{\partial B}=2B-2I-XG=0 \tag{2.37}$$

がえられ，左よりX'を乗じ整理すると，

$$G=-2(X'X)^{-1}X'$$

となる．これを(2.37)に代入すると，

$$B=I-X(X'X)^{-1}X'$$

がえられ，この場合 $B=M$ となり，v は OLS 残差となるのである．

Ⅲ　AL 対 BLUS

定理 1　AL 推定量 v の 2 乗和は OLS 残差 $\hat{u}$ の 2 乗和に等しい．

$$v'v=\hat{u}'\hat{u} \tag{3.1}$$

（証明）　$v'v=y'BB'y$ より，BB' が M になることを示せばよい．(2.21) を使えば，

$$BB'=PHK'KH'P=PHH'P'=PP'=M$$

となり (3.1) が成立する．

この証明では，$B=MK(K'MK)^{-\frac{1}{2}}K'$ を使わなかったことに注意しよう．BLUS 推定量 u^* についても $u^{*\prime}u^*=\hat{u}'\hat{u}$ が成立し，このときにも BLUS の最良性は使われずに証明されている[1]．

定理 2　AL 推定量の分散共分散行列は次のふたつに分割される．

$$E(v-u)(v-u)'=E(\hat{u}-u)(\hat{u}-u)'+E(v-\hat{u})(v-\hat{u})' \tag{3.2}$$

（証明）　左辺は

$$\begin{aligned}&E(v-\hat{u}+\hat{u}-u)(v-\hat{u}+\hat{u}-u)'\\&=E(v-\hat{u})(v-\hat{u})'+E(\hat{u}-u)(\hat{u}-u)'+E(v-\hat{u})(\hat{u}-u)'\\&\quad+E(\hat{u}-u)(v-\hat{u})'\end{aligned}$$

となり，右辺第 3 項は

$$\begin{aligned}&E(v-\hat{u})(\hat{u}-u)'=(B'-M)Euu'(M-I)'\\&=\sigma^2(B'M-B'-M^2+M)=0_{n,n}\end{aligned}$$

となる（(2.17) の関係を用いる）．最終項も同じく n 次のゼロ行列となり，定理が成立する．

この定理 2 より，両辺のトレースをとれば次の系がえられる．

系 1　$E(v-u)'(v-u)=E(\hat{u}-u)'(\hat{u}-u)+E(v-\hat{u})'(v-\hat{u})$

1）Koerts〔11〕pp. 173—4，Koerts と Abrahamse〔13〕pp. 56—7 を参照せよ．$u^{*\prime}u^*=\hat{u}'\hat{u}$ についての最良性を使った場合の証明は，本節脚注 p. 103 の 1）に示してある．

系1は，AL 推定量の推定誤差の2乗和の期待値が，最小二乗残差の推定誤差の2乗和の期待値と AL，OLS ふたつの推定量の差 $v-\hat{u}$ の2乗和の期待値との和に等しいことを示している．すなわち，AL 推定量のほうが OLS 残差に比べて $E(v-\hat{u})'(v-\hat{u})$ だけ推定誤差が大きいのである．

AL 推定量の推定誤差は(2.10)より

$$\sigma^2(2n-k)-2\sigma^2 \operatorname{tr} B$$

であり，$\operatorname{tr} B$ は(2.27)より

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\ B&=\operatorname{tr}[MK(K'MK)^{-\frac{1}{2}}K']=\operatorname{tr}\ (K'MK)^{-\frac{1}{2}}K'MK\\&=\operatorname{tr}\ (K'MK)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.3}$$

となる．$K'MK$ は $n-k$ 次の対称行列であるので，Canonical Reduction により，

$$Q'(K'MK)Q=\Lambda \quad \text{あるいは} \quad K'MK=Q\Lambda Q' \tag{3.4}$$

ただし Λ は $K'MK$ の固有値を要素とする対角行列である

を満たす直交行列（$K'MK$ の固有ベクトル行列）Q が存在する．$K'MK$ は

$$K'MK=I_{n-k}-K'X(X'X)^{-1}X'K$$

であるので，(3.4)の $Q'(K'MK)Q=\Lambda$ を書きかえ整理すると，

$$\Lambda=I_{n-k}-Q'K'X(X'X)^{-1}X'KQ \tag{3.5}$$

となる．これより $Q'K'X(X'X)^{-1}X'KQ$ は対角行列となっており，$n-k$ 次の $K'X(X'X)^{-1}X'K$ のランクは k であるので，$n-k>k$ であるかぎり，$K'X(X'X)^{-1}X'K$ の固有値は少なくとも $n-2k$ 個はゼロである．このことによって，(3.5)の Λ の対角要素のうち $n-2k$ 個は1に等しいことがわかる．すなわち，$K'MK$ は少なくとも $n-2k$ 個の1に等しい固有値をもつことがわかり，$K'MK$ は次のように書ける．

$$K'MK=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i q_i q_i'+\sum_{i=k+1}^{n-k}q_i q_i' \tag{3.6}$$

$\lambda_i(i=1,\cdots,k)$ は $K'MK$ の $n-2k$ 個の1とは異なる固有値（k 個のなかには1に等しい可能性もある）で，$q_i(i=1,\cdots,k)$ はそれに対応する固有ベクトル，

$q_i(i=k+1,\cdots,n-k)$ は $K'MK$ の残りの固有値すなわち $n-2k$ 個の 1 に対応する固有ベクトルである．また，$K'MK$ は非負定符号であるので λ_i はすべて非負であり，$K'X(X'X)^{-1}X'K$ も非負定符号であることにより，λ_i は $0\leq\lambda_i\leq 1$ の中にあることがわかる．このとき，

$$(K'MK)^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{2}}q_iq_i'+\sum_{i=k+1}^{n-k}q_iq_i' \tag{3.5}$$

となり[1]，これより

$$\mathrm{tr}\ B=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{2}}+n-2k \tag{3.6}$$

がえられる．以上より，AL 推定量の推定誤差は，

$$E(v-u)'(v-u)=3\sigma^2k-2\sigma^2\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{2}}$$

ただし $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$ は $(K'MK)^{\frac{1}{2}}$ の $n-2k$ 個の 1 とは　(3.7)

異なる固有値で $0\leq\lambda_i\leq 1$ である

となり，OLS 残差の推定誤差は $k\sigma^2$ であるので[2]，ふたつの推定量の推定誤差の差の 2 乗和の期待値は系 1 より，

$$E(v-\hat{u})'(v-\hat{u})=2\sigma^2(k-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{1}{2}})=2\sigma^2\sum_{i=1}^{k}(1-\lambda_i^{\frac{1}{2}}) \tag{3.8}$$

となる[3]．

BLUS 推定に関して，定理 2，系 1 と類似した関係についてすでに Theil〔21〕，Koerts〔11〕等に示されている．BLUS 推定量を u^* と表わすと(2.32)より，

$$u^*=\begin{bmatrix}0 & 0\\ M_{11}^{-\frac{1}{2}}M_{10} & M_{11}^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}0 & 0\\ M_{11}^{-\frac{1}{2}}M_{10} & M_{11}^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}u \tag{3.9}$$

1）Rao〔18〕p. 44.

2）$k\sigma^2$ が攪乱項の線型不偏推定量の中で，推定誤差の 2 乗和の期待値の最小値であることはよく知られている（OLS 残差の最良性）.

3）以上の展開は Abrahamse と Louter〔3〕にしたがっている．

ふたつめの等式は，

$$M_{11}^{-\frac{1}{2}} M_{10} X_0 + M_{11}^{\frac{1}{2}} X_1 = 0_{n-k,\,k} \tag{3.10}$$

が成立すればえられる．(2.34)の M_{11} の逆行列は，X の分割(2.33)を用いれば，

$$M_{11}^{-1} = I_{n-k} + X_1 (X_0' X_0)^{-1} X_1' \tag{3.11}$$

となる．この証明は，$M_{11} M_{11}^{-1}$ が単位行列になることを示せばよい[1]．このとき $X'X = X_0' X_0 + X_1' X_1$ の関係を使う．また X のランクは k であるので X_0 は正則である．(3.11)の関係によって

$$\begin{aligned} M_{01} M_{11}^{-1} &= -X_0 (X'X)^{-1} X_1' - X_0 (X'X)^{-1} X_1' X_1 (X_0' X_0)^{-1} X_1' \\ &= -X_0 (X'X)^{-1} X_1' - X_0 (X'X)^{-1} (X'X - X_0' X_0)(X_0' X_0)^{-1} X_1' \\ &= -X_0 (X_0' X_0)^{-1} X_1' = -(X_1 X_0^{-1})' \end{aligned} \tag{3.12}$$

がえられ，(3.10)が成立するのである．

BLUS 推定量 u^* について，次の系が証明されている[2]．

系 2　$E(u^* - u)'(u^* - u) = E(\hat{u} - u)'(\hat{u} - u) + E(u^* - \hat{u})'(u^* - \hat{u})$

この系もまた BLUS による推定誤差が，OLS にくらべて，右辺第 2 項分だけ大きいことを示している．

u^* の推定誤差を計算しよう．その前に次の関係が(2.35)によって成立することがわかる．

$$M_{01} M_{11}^{-1} M_{10} = M_{00}, \quad M_{11}^{-1} M_{10} M_{11} + M_{11} = I \tag{3.13}$$

さて

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{11}^{-\frac{1}{2}} M_{10} & M_{11}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = A$$

1)　例えば，Theil〔21〕p. 1071 を参照せよ．

2)　ベクトル u^* の上から k 個の要素はゼロであるので，u^*，$\hat{u}$，u を次のように，k 個と $n-k$ 個とに分割すれば，すなわち $u^{*\prime} = [0, u_1^{*\prime}]$，$\hat{u}' = [\hat{u}_0', \hat{u}_1']$，$u' = [u_0', u_1']$ とする，系 2 のほかに次の系も成立することが証明されている（Neudecker〔16〕p. 951）．

系　$E(u_1^* - u_1)'(u_1^* - u_1) = E(\hat{u}_1 - u_1)'(\hat{u} - u_1) + E(u_1^* - \hat{u}_1)'(u_1^* - \hat{u}_1)$

とすれば，推定誤差は，

$$E(u^*-u)'(u^*-u)=\sigma^2(\mathrm{tr}\ A'A-2\ \mathrm{tr}\ AM+\mathrm{tr}\ M)$$

となる．(3.13)より

$$A'A=\begin{bmatrix} M_{01}M_{11}^{-1}M_{10} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{bmatrix}=M$$

$$AM=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M^{-\frac{1}{2}}(M_{10}M_{00}+M_{11}M_{10}) & M_{11}^{\frac{1}{2}}(M_{11}^{-1}M_{10}M_{01}+M_{11}) \end{bmatrix}=A$$

となる[1]ので，

$$E(u^*-u)'(u^*-u)=2\sigma^2(n-k)-2\sigma^2\ \mathrm{tr}\ A$$

$$=2\sigma^2(n-k)-2\sigma^2\ \mathrm{tr}\ M_{11}^{\frac{1}{2}} \tag{3.14}$$

がえられる．M_{11} は $n-k$ 次の対称行列であるので，

$$R'M_{11}R=\Delta \text{ あるいは } M_{11}=R\Delta R' \tag{3.15}$$

ただし Δ は対角行列である

$$R'R=RR'=I_{n-k}$$

を満たす R が存在する．M_{11} は(2.34)より

$$M_{11}=I_{n-k}-X_1(X'X)^{-1}X_1' \tag{3.16}$$

であり，$X_1(X'X)^{-1}X_1'$ のランクは k であるので，M_{11} は少くとも $n-2k$ 個の1に等しい固有値をもつ[2]．これより，M_{11} は次のように書ける[3]．

$$M_{11}=\sum_{i=1}^{k}\delta_i r_i r_i'+\sum_{i=1}^{n-k} r_i r_i' \tag{3.17}$$

また M_{11}，$X_1(X'X)^{-1}X_1'$ は非負定符号であるので，$0\leq\delta_i\leq1$ となる．このとき

1) $A'A=M$ より，$u^{*\prime}u^*=u'A'Au=u'Mu=\hat{u}'\hat{u}$ が成立する．

2) Theil〔21〕p. 1073 を参照．

3) $r_i(i=1,\cdots,k)$ は $n-2k$ 個の1以外の固有値 δ_i に対応する固有ベクトル，$r_i(i=k+1,\cdots,n-k)$ は $n-2k$ 個の1の固有値に対応する固有ベクトルである．

$$M_{11}^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{k}\delta_i^{\frac{1}{2}}r_i r_i'+\sum_{i=k+1}^{n-k}r_i r_i' \tag{3.18}$$

となり,

$$\mathrm{tr}\,M_{11}^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{k}\delta_i^{\frac{1}{2}}+n-2k \tag{3.19}$$

$$\therefore\ E(u^*-u)'(u^*-u)=3\sigma^2k-2\sigma^2\sum_{i=1}^{k}\delta_i^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

$$E(u^*-\hat{u})'(u^*-\hat{u})=2\sigma^2\sum_{i=1}^{k}(1-\delta_i^{\frac{1}{2}}) \tag{3.21}$$

が成立する.

さて,AL 推定量と BLUS 推定量との推定効率の比較を行なうため,次のような統計量を考えていこう.

Theil が定義した平均不正確度 average inaccuracy を[1] I とすれば,それぞれの推定量に対して($\hat{u}$, u^*, v の順に)

$$I\hat{u}=\frac{E(\hat{u}-u)'(\hat{u}-u)}{E(u'u)}=\frac{k}{n}$$

$$Iu^*=\frac{E(u^*-u)'(u^*-u)}{E(u'u)}=\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{k}(1-\delta_i^{\frac{1}{2}})$$

$$Iv=\frac{E(v-u)'(v-u)}{E(u'u)}=\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{k}(1-\lambda_i^{\frac{1}{2}})$$

ただし　$0\leq\delta_i,\ \lambda_i\leq1$

となり,明らかに $\hat{u}$ に比べて u^*, v の不正確度は大きい.もちろんすべての I は非負である.Koerts は $I\hat{u}$ の Iu^* に対する比率 $I\hat{u}/Iu^*$ を u^* の効率 efficiency(E と表わそう)と定義しているが[2],われわれは AL と BLUS の推定量間の比較をするため,Eu^*, v なる量を次のように定義しよう.

$$Eu^*,v=\frac{Iu^*}{Iv}=\frac{k-2\sum_{i=1}^{k}(1-\delta_i^{\frac{1}{2}})}{k-2\sum_{i=1}^{k}(1-\lambda_i^{\frac{1}{2}})} \tag{3.22}$$

1) Theil〔21〕p. 1069.

2) E はKoerts〔11〕p. 177 で定義されており,0と1の間の値をとる.

Eu^*, v は E と少々異なり，値は非負であるが，1.0を基準にして推定量間の効率の比較を行なおうとする統計量である．すなわち，Eu^*, v が1より大であれば，AL推定量 v の推定効率が高いと評価し，1より小の場合はその逆の評価をする．

以上より明らかなように（もちろん Iv と Iu^* のままの比較でも同じであるが），$\sum^k \delta_i^{\frac{1}{2}} \gtrless \sum^k \lambda_i^{\frac{1}{2}}$（あるいは $\sum^k \delta_i \gtrless \sum^k \lambda_i$）のとき $Eu^*, v \lesseqgtr 1$ という関係にある．すなわち，$M_{11}^{\frac{1}{2}}$（あるいは M_{11}）の $n-2k$ 個の1とは異なる k 個の固有値の和と $(K'MK)^{\frac{1}{2}}$（あるいは $K'MK$）の同じく k 個の固有値の和との大小関係によって，ALとBLUSの推定量としての相対的良さが決まるのである．

ところで，それぞれの推定量のつくり方から，ALの方がBLUSに比べて制約がゆるく[1]，それだけOLSにより近いことがわかる．ア・プリオリに選ばれる K（あるいは $KK'=\Omega$）が前節の最終部分での考察のごとく，K が P（あるいは Ω が M）に近いときALはOLSに近づき，一方，K' が $[0_{n-k,k}\ I_{n-k}]$ に近いときBLUSに近づき，上で定義した効率 Eu^*, v はもちろん1に接近する．これらより，一般に平均不正確度 I は次のような大小関係が成立する．

$$I\hat{u} \leq Iv \leq Iu^*$$

この関係より Eu^*, v は一般に1より大となりALの方がBLUSより推定効率は高いといえる[2]．

Ⅳ 数 値 例

説明変数の観測値行列を次のように与えよう[3]．

1） 分散共散行列として，ALは（説明変数から独立な）ベキ等性のみを，一方，BLUSはスカラー行列を仮定していることより明らかである．

2） これらのことと系列相関の検定の際の検出力の比較とは別問題である．これに関してはL'EsperanceとTaylor〔14〕を参照せよ．

3） なお被説明変数のデータは $y'=(4\ \ 4.5\ \ 5\ \ 6.5\ \ 7\ \ 7\ \ 8)$ を考えており，データはWonnacott & Wonnacottによる *Econometrics*, John Wiley & Sons, 1975の邦訳p. 52の数値の桁をかえたものである．

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3.6 & 3.3 & 3.7 & 3.7 & 3.4 & 3.2 & 3.6 \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

$n=7$
$k=3$

$X'X$は正則であり，Xを次のように並びかえて分割する．

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3.6 \\ 1 & 2 & 3.3 \\ 1 & 4 & 3.7 \end{bmatrix}, \quad X' = [X_0' \, X_1'] \qquad (4.2)$$

$M = I - X(X'X)^{-1}X'$ は次のように計算される.[1]

$$M = \begin{bmatrix} 0.52639 & -0.30978 & -0.28660 & -0.18304 & -0.01921 & 0.12453 & 0.14772 \\ & 0.47384 & -0.02848 & 0.06116 & -0.15522 & -0.26959 & 0.22809 \\ & & 0.67786 & -0.30050 & -0.04239 & 0.13690 & -0.15676 \\ & & & 0.68404 & -0.07176 & 0.08589 & -0.27577 \\ & & & & 0.79223 & -0.30823 & -0.19540 \\ & & & & & 0.41202 & -0.18149 \\ & & & & & & 0.43366 \end{bmatrix}$$

さて，Ω は次のように定められているとしよう．

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1） Mの計測結果よりトレースを求めれば $\mathrm{tr}\, M = 4.00002$ であり，またMの固有値は 1 が 4 つ，0 が 3 つえられることについても計算によって確かめた．

Ω の性質，すなわち $\Omega^2 = \Omega$ ならびに $\mathrm{tr}\,\Omega = 0.8 \times 5 = 4 = n - k = 7 - 3 = \mathrm{rank}\,\Omega$ は満たされている．K は Ω の固有値のうち 1 に対応する固有ベクトルの集合であり，次のとおりである．

$$K' = \begin{bmatrix} -0.894427 & 0.223607 & 0.223607 & 0.223607 & 0.223607 & 0 & 0 \\ 0 & -0.866025 & 0.288675 & 0.288675 & 0.288675 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.816497 & 0.408248 & 0.408248 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.707107 & 0.707107 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これを使って $K'MK$ を計算すれば，

$$K'MK = \begin{bmatrix} 0.818237 & -0.104156 & -0.109629 & -0.079912 \\ & 0.527047 & 0.050820 & 0.207279 \\ & & 0.902627 & -0.117790 \\ & & & 0.809891 \end{bmatrix}$$

となり，$K'MK$ の固有値は次のとおりである．

$$\lambda_1 = 0.39506, \quad \lambda_2 = 0.662747, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1$$

少なくとも $n - 2k = 7 - 6 = 1$ 個の 1 に等しい固有値をもっており，それ以外の固有値（この場合 $n - 2k$ 個以外に固有値 1 をもっている）の平方根の和は

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{\frac{1}{2}} = 2.44263$$

となる．

次に M_{11} を求めると，

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0.677856 & -0.042391 & 0.136898 & -0.156764 \\ & 0.792231 & -0.308232 & -0.195403 \\ & & 0.412016 & -0.181492 \\ & & & 0.433656 \end{bmatrix}$$

となる．そして M_{11} の固有値は次のとおりである．

$$\delta_1 = 0.0624601, \quad \delta_2 = 0.429009, \quad \delta_3 = 0.824299, \quad \delta_4 = 1$$

（$n - 2k$ 個の）1 以外の固有値の平方根の合計は，

$$\sum_{i=1}^{3}\delta_i^{\frac{1}{2}}=1.812817$$

となる.

以上によって，この数値例では $\Sigma\lambda_i^{\frac{1}{2}}>\Sigma\delta_i^{\frac{1}{2}}$ となり，AL 推定量の方がBLUS 推定量に比べて推定誤差が小さく効率が高いということができる．また，本節の数値例における$\Sigma\lambda_i^{\frac{1}{2}}$ や $\Sigma\delta_i^{\frac{1}{2}}$の最大値は，推定量のうちで最も効率の高い OLS 残差の場合を考えれば，3になることが容易にわかる.

付録　逐次残差[1)]

線型回帰モデル(2.1)のパラメター β の OLS 推定量を j 個（$n\geq j$）の観測値だけで求めると，$j\geq k$ に対して，

$$b_j=(X_j'X_j)^{-1}X_j'y_j \tag{A.1}$$

と書ける．ただし，X_j は $j\times k$ 行列，y_j もそれに対応した $j\times 1$ ベクトルである．連続的に観測値がえられるとき，β について $n-k+1$ 個の推定値をえることができ，これを $b_k, b_{k+1},\cdots,b_n$ とすると $b_j(j=k,\cdots,n)$ は次のように書きかえられる．いま x_j' を Xの第 j行，y_j^j を y_j の第 j要素（スカラー）であるとすると，

$$X_j'y_j=X_{j-1}'y_{j-1}+x_jy_j^j \tag{A.2}$$

となり，$(X_j'X_j)^{-1}$ はたとえば Dhrymes〔5〕の命題 32，33 によって，次のように逐次的にえられる.

$$(X_j'X_j)^{-1}=(X_{j-1}'X_{j-1})^{-1}-\frac{(X_{j-1}'X_{j-1})^{-1}x_jx_j'(X_{j-1}'X_{j-1})^{-1}}{1+x_j'(X_{j-1}'X_{j-1})^{-1}x_j} \tag{A.3}$$

(A.2)，(A.3)を(A.1)に代入すれば，b_j は

$$b_j=b_{j-1}+\frac{(X_{j-1}'X_{j-1})^{-1}x_j(y_j^j-x_j'b_{j-1})}{1+x_j'(X_{j-1}'X_{j-1})^{-1}x_j} \tag{A.4}$$

1） Phillips と Harvey〔17〕，Harvey〔10〕pp. 54—60 にしたがって展開する.

と書きかえられ，b_j は逐次的にえることができるのである．これを使って，次の逐次残差と名づけられた推定量を考えよう．

$$\tilde{u}_j=\frac{y^j_j-x'_j b_{j-1}}{[1+x'_j(X'_{j-1}X_{j-1})^{-1}x_j]^{\frac{1}{2}}} \qquad j=k+1,\ \cdots,\ n \tag{A.5}$$

b_j が(A.4)のように逐次的にえられるなら，$\tilde{u}_j$ は非常に容易に求めることができる．$n-k$ 個の逐次残差ベクトル $\tilde{u}=(\tilde{u}_{k+1},\cdots,\tilde{u}_n)'$ を使うと，(A.5)は

$\tilde{u}=C'y,\quad C':(n-k)\times n$

$$C'=\begin{bmatrix} \dfrac{-x'_{k+1}(X'_kX_k)^{-1}X'_k}{d_{k+1}}, & \overbrace{\dfrac{1}{d_{k+1}},\ 0,\ \cdots,\ 0}^{n-k} \\ \vdots & \ddots \\ \dfrac{-x'_j(X'_{j-1}X_{j-1})^{-1}X'_{j-1}}{d_j} & \overbrace{\dfrac{1}{d_j},\ 0.,\ 0}^{n-j+1} \\ \vdots & \ddots \\ \dfrac{-x'_n(X'_{n-1}X_{n-1})^{-1}X'_{n-1}}{d_n} & ,\ \dfrac{1}{d_n} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

ただし　$d_j=[1+x'_j(X'_{j-1}X_{j-1})^{-1}x_j]^{\frac{1}{2}}\ j=k+1,\ \cdots,\ n$

と表わせる．これより，$\tilde{u}$ は y に関して線型であることがはっきりする．また C' の第 j 行目を c'_j とすれば，

$$c'_jX_j=-\frac{x'_j(X'_{j-1}X_{j-1})^{-1}X'_{j-1}}{d_j}X_{j-1}+\frac{1}{d_j}x'_j=0 \tag{A.7}$$

$$c'_jc_j=\frac{x'_j(X'_{j-1}X_{j-1})^{-1}X'_{j-1}X_{j-1}(X'_{j-1}X_{j-1})^{-1}x_j}{d_j^2}+\frac{1}{d_j^2}=1 \tag{A.8}$$

$j>i$ のとき

$$c'_jc_i=\frac{x'_j(X'_{j-1}X_{j-1})^{-1}X'_{i-1}X_{i-1}(X'_{i-1}X_{i-1})^{-1}x_i}{d_id_j}$$

$$-\frac{x'_j(X'_{j-1}X_{j-1})^{-1}x_i}{d_id_j}=0 \tag{A.9}$$

となり，これらから

（i） $C'X=0$

（ii） $C'C=I_{n-k}$

がえられ，逐次残差の分布は

$$E(\tilde{u})=0,\quad E(\tilde{u}\tilde{u}')=\sigma^2 I_{n-k}$$

となっていることがわかる．逐次残差はBLUS残差と同じスカラー分散共分散行列をもっているのである．

さらにスカラー分散共分散行列をもつ線型不偏推定量は次の関係をもっていることが知られている[1]．

（iii） $CC'=M=I-X(X'X)^{-1}X'$

このことより，BLUSと同様 $\tilde{u}'\tilde{u}=\hat{u}'\hat{u}$ が成立する．逐次残差やBULS残差は $n-k$ 個の要素をもつベクトルであるので，P.102の注2)での記号法を用いよう．すなわち，BLUS残差が u_1^*，真の攪乱ベクトルが u_1 である．BLUS残差はスカラー分散共分散行列をもつ推定量のなかで（限定された意味[2]での）最良性をもっているので，次の関係が成立する．

$$E(\tilde{u}-u_1)'(\tilde{u}-u_1)\geqq E(u_1^*-u_1)'(u_1^*-u_1) \tag{A.10}$$

また $J'=[0_{n-k,k}\ I_{n-k}]$ とすると，(A.10)の左辺は，

$$\begin{aligned}
&E(C'u-J'u)'(C'u-J'u)\\
&=\mathrm{tr}(C-J)(C'-J')Euu'\\
&=2\sigma^2(n-k-\mathrm{tr}\,J'C)\\
&=2\sigma^2\Big(n-k-\sum_{j=k+1}^{n}d_j^{-1}\Big)\\
&=2\sigma^2\sum_{j=k+1}^{n}(1-d_j^{-1})
\end{aligned} \tag{A.11}$$

1) Theil〔21〕，Koerts〔11〕，本稿では(3.12)を用いて $A'A=M$ が成立することによって確かめられている．

2) ここでの最良性の意味は従来のものとは異なり，真なる攪乱項ベクトルの任意の $n-k$ 要素に対する最良性であり，より限定されたものである．

となる.

（関西学院大学経済学部専任講師）

参 考 文 献

〔1〕 Abrahamse, A. P. J. and J. Koerts, "A Comparison between the Power of the Durbin-Watson Test and the Power of the BLUS Test," *JASA*, Vol. 64, No. 327, 1969.

〔2〕 ——————, "New Estimators of Disturbances in Regression Analysis," *JASA*, Vol. 66, No. 333, 1971.

〔3〕 Abrahamse, A. P. J. and A. S. Louter, "On a New Test for Autocorrelation in Least Squares Regression," *Biometrika*, Vol. 58, 1971.

〔4〕 Berenblut, I. I. and G. I. Webb, "A New Test for Autocorrelated Errors in the Linear Regression Model," *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 35, No. 1 (series B), 1973.

〔5〕 Dhrymes, P. J., *Introductory Econometrics*, Springer-Verlag, 1978.

〔6〕 Durbin, J., "An Alternative to the Bounds Tests for Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression," *Econometrica*, Vol. 38, No. 3, 1970.

〔7〕 Geary, R. C., "Relative Efficiency of Count of Sign Changes for Assessing Residual Autoregression in Least Squares Regression," *Biometrika*, Vol. 57, No. 1, 1970.

〔8〕 Habibagahi, H. and Pratschke, J. L., "A Comparison of the Power of the Von Neumann Ratio, Durbin-Watson and Geary Tests," *Review of Economics and Statistics*, Vol. LIV, No. 2, 1972.

〔9〕 Harvey, A. C. and Phillips, G. D. A., "Testing for Serial Correlation in Simultaneous Equation Model," *Econometrica*, Vol. 48, No. 3, 1980.

〔10〕 Harvey, A. C., *The Econometric Analysis of Time Series*, Philip Allan, 1981.

〔11〕 Koerts, J., "Some Further Notes on Disturbance Estimates in Regression Analysis," *JASA*, Vol. 62, No. 317, 1967.

〔12〕 Koerts, J. and A. P. J. Abrahamse, "On the Power of the BLUS Procedure," *JASA*, Vol. 63, No. 324, 1968.

〔13〕 ——————, *On the Theory and Application of the General Linear Model*, Roterdam U. P., 1969.

〔14〕 L'Esperance and D. Taylor, "The Power of Four Tests of Autocorrelation in the Linear Regression Model," *Journal of Econometrics*, Vol. 3, No. 1, 1975.

〔15〕 Maddala, G. S. and A. S. Rao, "Tests for Serial Correlation in Regression Models with Lagged Dependent Variables and Serially Correlated Errors," *Econometrica*, Vol. 41, No. 4, 1973.

〔16〕 Neudecker, H., "A Note on BLUS Estimation," *JASA*, Vol. 64, No. 327, 1969.

〔17〕 Phillips, G. D. A. and A. C. Harvey, "A Simple Test for Serial Correlation in Regression Analysis," *JASA*, Vol. 69, No. 348, 1974.

〔18〕 Rao, C. R., *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed., John Wiley, 1973.

〔19〕 坂下　昇,『計量経済学』東洋経済, 1973.

〔20〕 Spencer, B. G., "The Small Sample Bias of Durbin's Tests for Serial Correlation," *Journal of Econometrics*, Vol. 3, No. 3, 1975.

〔21〕 Theil, H., "The Analysis of Disturbances in Regression Analysis," *JASA*, Vol. 60, No. 312, 1965.

〔22〕 ―――――――, "A Simplification of the BLUS Proceduce for Analysing Regression Disturbances," *JASA*, Vol. 63, No. 321, 1968.

JASA : Journal of the American Statistical Association