凸集合の特性錐・直系空間

福　尾　洋　一

§0　序

文献〔3〕の定理23は，凸集合 $C\subset R^n$ と線形変換 $g: R^n\to R^m$ に対して，関係

（i）　$[g(C)]^a\supset g(C^a)$,

（ii）　$[g(C)]^I=g(C^I)$

が成立することを主張している．この定理は，g の定義域 C と値域または C の g による像 $g(C)$ との間の位相的演算に関して，相対内部演算は関係保存的であるのに対して，閉包演算は必ずしも関係保存的ではないことを示している[1]．一般に，関係保存的でない演算については，その取り扱いが困難であることが多い．したがって，線形変換の閉包演算に関しても，関係保存的であるための（十分）条件を探るという問題が発生する．本稿において考察される凸集合の特性錐・直系空間は，この問題に取り組むに当って有力な手掛かりを提供するに止まらず，実は，広い応用範囲を持つ集合である．

ところで，以下の議論展開の大部分は文献〔4〕に依存している．この書物は，世評の確立した出色の名著であるが，我々には極めて難解である．そこで，本稿では，〔4〕の行間補充と論脈整理に努めて留意したつもりである．§1では，凸集合の特性錐について，そして§2では，凸集合の直系空間について述べる．§3では，上述の問題を検討する．

なお，以下において，説明なしに使用される記号はすべて文献〔2〕及び〔3〕

1)　（i）が等号にならない事例については，cf. 注意8．

で約束されたものである． また，左辺:＝右辺は， 左辺が右辺によって定義されることを意味する．

§1　凸集合の特性錐

注意1　以下においては，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 及び $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ によって定義される $\boldsymbol{R}^n$ の各種集合に対して，しばしば次の記号を使用する．

$\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}:=\{\theta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\mid\theta\in\boldsymbol{R}\}=\boldsymbol{a}$ を通る $\boldsymbol{x}$ の方向の直線，

$\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}:=\{\theta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\mid\theta\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}=\boldsymbol{a}$ を端点とする $\boldsymbol{x}$ の方向の射線，

$\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{S}:=\{\theta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\mid\theta\in\boldsymbol{R},\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{S}\}$

$=\boldsymbol{S}$ の各点 $\boldsymbol{a}$ を通る $\boldsymbol{x}$ の方向の直線の全体，

$\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{S}:=\{\theta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\mid\theta\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{S}\}$

$=\boldsymbol{S}$ の各点 $\boldsymbol{a}$ を端点とする $\boldsymbol{x}$ の方向の射線の全体．

定義1　同一方向の射線

2つの相異なる射線 $\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{a}_i$，$\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{a}_i\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{0}$，$i=1,2$ は， 互いに平行

$$\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}_1/\!/\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{a}_2$$

ならば，換言すると，

$$^{\exists}\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n:\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{a}$$

ならば，同一方向であるという[1]．

定義2　有界凸集合，非有界凸集合とその無限の方向

凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ は，

$$^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}:\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\not\subset\boldsymbol{C}$$

ならば，有界であるといい，有界でないならば，すなわち，

$$^{\exists}\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}:\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}$$

ならば，$\boldsymbol{x}_0$ の方向において非有界であるという．$\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{x}_0$ の方向において非

1)　したがって，2つの射線の同一方向性は，射線の端点とは無関係な概念である．

有界であるとき，$\boldsymbol{x}_0$ の方向を $\boldsymbol{C}$ の無限の方向という．

定義 3　凸集合の特性錐

凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，集合

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}:=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}\}\subset\boldsymbol{R}^n$$

を $\boldsymbol{C}$ の特性錐という[1)]．$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\neq\{\boldsymbol{0}\}$ ならば，任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ の方向は $\boldsymbol{C}$ の無限の方向となっている．

注意 2　凸集合とその特性錐の例．

$(\xi_1,\xi_2)\in\boldsymbol{R}^2$，$\boldsymbol{M}$ は $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ 型行列，$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^m$ とすると，

$$\boldsymbol{C}_1:=\{(\xi_1,\xi_2)\,|\,\xi_1>0,\ \xi_2\geqq\xi_1^{-1}\}\Rightarrow\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{R}_{\oplus}^2,$$

$$\boldsymbol{C}_2:=\{(\xi_1,\xi_2)\,|\,\xi_2\geqq\xi_1\}\Rightarrow\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}}=\{0\}\times\boldsymbol{R}_{\oplus},$$

$$\boldsymbol{C}_3:=\{(\xi_1,\xi_2)\,|\,\xi_1^2+\xi_2^2\leqq 1\}\Rightarrow\boldsymbol{C}_3^{\mathrm{R}}=\{(0,0)\},$$

$$\boldsymbol{C}_4:=\boldsymbol{R}_+^2\cup(0,0)\Rightarrow\boldsymbol{C}_4^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}_4,$$

$$\boldsymbol{C}_5:=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{v}\}\subset\boldsymbol{R}^n\Rightarrow\boldsymbol{C}_5^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}\},$$

$\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{A}\neq\emptyset$ がアフィン集合 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{R}}$ は $\boldsymbol{A}$ に平行な線形部分空間，

$\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{K}\neq\emptyset$ が凸錐 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{K}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{K}$．

定理 1　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，次の関係が成立する．

（i）　$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は凸錐である．

(ii)　$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}\}$．

(iii)　$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}+\boldsymbol{C}$．

証明　（i）．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ と $\theta\in\boldsymbol{R}_{\oplus}$ は任意所与とすると，

$$\boldsymbol{R}_{\oplus}\theta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}$$

となるので，$\theta\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$．すなわち，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は錐である．次に，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ と $(\theta_1,$

1)　Rockafellar〔4〕は recession cone と呼ぶが，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{0}\}$ の事例も極めて多いことを考えて，ここでは，Stoer-Witzgall〔5〕の呼称 characteristic cone に従った．なお，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ の上付き文字 **R** は射線 ray の語頭文字である．

$\theta_2)\in\varDelta_\oplus$[1] は任意所与とする．〔3〕の定理3により，$\boldsymbol{C}=\theta_1\boldsymbol{C}+\theta_2\boldsymbol{C}$ であることに注目すると，

$$\boldsymbol{R}_\oplus(\theta_1\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{C}\subset\theta_1\boldsymbol{R}_\oplus\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{R}_\oplus\boldsymbol{x}_2+\theta_1\boldsymbol{C}+\theta_2\boldsymbol{C}$$
$$=\theta_1(\boldsymbol{R}_\oplus\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{C})+\theta_2(\boldsymbol{R}_\oplus\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{C})\subset\theta_1\boldsymbol{C}+\theta_2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}$$

となるので，$\theta_1\boldsymbol{x}_1+\theta_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$．すなわち，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は凸集合である．

(ii)．$\boldsymbol{X}:=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}\}$ とおく．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ と $\theta\in\boldsymbol{R}_\oplus$ は任意所与とし，更に，$\theta=\zeta+\rho$，$\zeta\in\boldsymbol{Z}$，$0\leqq\rho<1$ とおく．

$$\zeta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}=(\zeta-1)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C})\subset(\zeta-1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\cdots\subset\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}$$

であり，また，〔3〕の定理3により，$\boldsymbol{C}=\rho\boldsymbol{C}+(1-\rho)\boldsymbol{C}$ であることに注目すると，

$$\theta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}=(\zeta+\rho)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}=\rho\boldsymbol{x}+(\zeta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C})\subset\rho\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}$$
$$=\rho\boldsymbol{x}+\rho\boldsymbol{C}+(1-\rho)\boldsymbol{C}=\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C})+(1-\rho)\boldsymbol{C}\subset\rho\boldsymbol{C}+(1-\rho)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}$$

となるので，$\theta\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$．すなわち，$\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$．一方，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\subset\boldsymbol{X}$ は自明である．

(iii)．(ii)により，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}$ である一方，$\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}+\boldsymbol{C}$ は自明である．‖

系　2つの凸集合 $\boldsymbol{C}_1\subset\boldsymbol{R}^{n_1}$ と $\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^{n_2}$ に対して，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}}=(\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{R}}.$$

証明　定理1(ii)により，

$$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\in\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}},\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}}$$
$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{C}_1\subset\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{C}_2\ \Leftrightarrow\ (\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{C}_1)\times(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{C}_2)\subset\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2$$
$$\Leftrightarrow\ (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+(\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2)\subset\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2\ \Leftrightarrow\ (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\in(\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{R}}.\ \|$$

注意3　以下においては，$\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ によって生成される $\boldsymbol{R}^n$ ないしは $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の各種集合に対して，しばしば次の記号を使用する．

$$\boldsymbol{R}_+\boldsymbol{S}:=\{\theta\boldsymbol{S}\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_+\}=\{\theta\boldsymbol{x}\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\}\subset\boldsymbol{R}^n,$$
$$\boldsymbol{R}_\oplus\boldsymbol{S}:=\{\theta\boldsymbol{S}\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_\oplus\}=\{\theta\boldsymbol{x}\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_\oplus,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\}\subset\boldsymbol{R}^n,$$
$$(1,\boldsymbol{S}):=\{1\}\times\boldsymbol{S}=\{(1,\boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\}\subset\{1\}\times\boldsymbol{R}^n,$$

1)　$\varDelta_\oplus:=\{(\theta_1,\theta_2)\,|\,\theta_1+\theta_2=1,\theta_1,\theta_2\in\boldsymbol{R}_\oplus\}$，$\varDelta_+:=\{(\theta_1,\theta_2)\,|\,\theta_1+\theta_2=1,\theta_1,\theta_2\in\boldsymbol{R}_+\}$．

$$(0,\boldsymbol{S}):=\{0\}\times\boldsymbol{S}=\{(0,\boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\}\subset\{0\}\times\boldsymbol{R}^n,$$

$$\theta(1,\boldsymbol{S}):=\{\theta\}\times\theta\boldsymbol{S}=\{(\theta,\boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{x}\in\theta\boldsymbol{S}\}\subset\{\theta\}\times\boldsymbol{R}^n,\quad \theta\in\boldsymbol{R},$$

$$\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{S}):=\{\theta(1,\boldsymbol{S})\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_+\}=\{(\theta,\boldsymbol{x})\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{x}\in\theta\boldsymbol{S}\}\subset\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}^n$$
$$=\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{R}^n),$$

$$\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{S}):=\{\theta(1,\boldsymbol{S})\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_\oplus\}=\{(\theta,\boldsymbol{x})\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_\oplus,\boldsymbol{x}\in\theta\boldsymbol{S}\}\subset\boldsymbol{R}_\oplus\times\boldsymbol{R}^n$$
$$=\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{R}^n)\cup(0,\boldsymbol{R}^n).$$

$\boldsymbol{R}_\oplus\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{S})$ は錐である．

定理 2　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ と $\theta\in\boldsymbol{R}$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$[\theta(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=\theta(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})\neq\emptyset.$

(ii)　$[\theta(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}=\theta(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\neq\emptyset.$

(iii)　$[\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}=[\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\neq\emptyset.$

証明　(i)，(ii)．〔3〕の定理18により，$[\theta(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\neq\emptyset$ 及び $[\theta(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ は直ちに得られる．〔3〕の定理22，〔3〕の定理23系 2 及び $\{\theta\}$ がアフィン集合であることにより，

$$[\theta(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=(\{\theta\}\times\theta\boldsymbol{C})^{\mathrm{a}}=\{\theta\}\times(\theta\boldsymbol{C})^{\mathrm{a}}=\{\theta\}\times\theta\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}=\theta(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}),$$

$$[\theta(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}=(\{\theta\}\times\theta\boldsymbol{C})^{\mathrm{I}}=\{\theta\}\times(\theta\boldsymbol{C})^{\mathrm{I}}=\{\theta\}\times\theta\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\theta(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}).$$

(iii)．〔3〕の定理18(ii)により，$[\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ は直ちに得られる．$[\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}=[\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}$ であること．$0\in\mathcal{A}\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C})$[1] $\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ は自明である．また，任意所与の $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ に対して，$2^{-1}\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})$ であるから，$0=-1\cdot\boldsymbol{w}+2\cdot2^{-1}\boldsymbol{w}\in\mathcal{A}\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})$ である．よって，〔2〕の定理18により，$\mathcal{A}\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C})$ と $\mathcal{A}\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})$ は共に $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の線形部分空間であり，〔2〕の定理 3 により，$\mathcal{A}\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C})=\mathcal{A}\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})=\boldsymbol{R}^{n+1}$ と見なしておく．さて，$(\theta,\boldsymbol{x})\in[\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}$ は任意所与，すなわち，

①　$\exists\varepsilon_0\in\boldsymbol{R}_+:\boldsymbol{B}((\theta,\boldsymbol{x});\varepsilon_0)\subset\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C})=\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})\cup\{(0,0)\}$

とする．このとき，$(0,0)\notin\boldsymbol{B}((\theta,\boldsymbol{x});\varepsilon_0)$ である．なぜなら，$(0,0)\in\boldsymbol{B}((\theta,$

1)　集合 $\boldsymbol{S}$ に対して，$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{S}$ のアフィン包．

$\boldsymbol{x})$；$\varepsilon_0)$ とすると，

$$\exists \delta_0 \in \boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{B}((0,0)\ ;\ \delta_0) \subset \boldsymbol{B}((\theta, \boldsymbol{x})\ ;\ \varepsilon_0) \subset \boldsymbol{R}_\oplus(1, \boldsymbol{C})$$

であるから，

$$\forall (1, \boldsymbol{x}) \in (1, \boldsymbol{C})\ \exists \gamma_0 \in \boldsymbol{R}_+ :$$
$$-\gamma_0(1, \boldsymbol{x}) = (-\gamma_0, -\gamma_0 \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{B}((0,0)\ ;\ \delta_0) \subset \boldsymbol{R}_\oplus(1, \boldsymbol{C})$$

となって，矛盾する．よって，①は

$$\exists \varepsilon_0 \in \boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{B}((\theta, \boldsymbol{x})\ ;\ \varepsilon_0) \subset \boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})$$

と書かれるので，$(\theta, \boldsymbol{x}) \in [\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}$．すなわち，$[\boldsymbol{R}_\oplus(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}} \subset [\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}$．一方，$[\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}} \subset [\boldsymbol{R}_\oplus(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}$ は自明である．$[\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})$ であること．$\theta \in \boldsymbol{R}_+$ は任意所与とする．射影 $pr : [\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}} \subset \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}_+$ は線形変換であり，$\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})$ は凸集合であるから，〔3〕の定理23により，

$$pr([\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}) = [pr(\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C}))]^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_+.$$

よって，$\theta \in \boldsymbol{R}_+$ に対して，

$$\exists \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n : (\theta, \boldsymbol{x}_0) \in [\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}} \cap \theta(1, \boldsymbol{R}^n)$$

であるので，〔3〕の定理21系1及び先の結果(ii)により，

$$[\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}} \cap \theta(1, \boldsymbol{R}^n) = [\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C}) \cap \theta(1, \boldsymbol{R}^n)]^{\mathrm{I}}$$
$$= [\theta(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}} = \theta(1, \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}) = \boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}) \cap \theta(1, \boldsymbol{R}^n).$$

よって，

$$(\theta, \boldsymbol{x}) \in [\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}} \Leftrightarrow (\theta, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}). \|$$

系　凸集合$\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C} \neq \emptyset$ に対して，次の関係が成立する．

$$(\boldsymbol{R}_\oplus \boldsymbol{C})^{\mathrm{I}} = (\boldsymbol{R}_+ \boldsymbol{C})^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{R}_+ \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} \neq \emptyset.$$

証明　〔3〕の定理18(ii)により，$(\boldsymbol{R}_\oplus \boldsymbol{C})^{\mathrm{I}} \neq \emptyset$ は直ちに得られる．次に，E は n 次単位行列，A は$(n, n+1)$ 型行列$[0, E]$とし，線形変換 $g : \boldsymbol{R}_\oplus(1, \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{R}^n$ 及び $\tilde{g} : \boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{R}^n$ をそれぞれ

$$g(\theta, \boldsymbol{x}) = A(\theta, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x},\ \ g(\boldsymbol{R}_\oplus(1, \boldsymbol{C})) = \boldsymbol{R}_\oplus \boldsymbol{C},$$
$$\tilde{g}(\theta, \boldsymbol{x}) = A(\theta, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x},\ \ \tilde{g}(\boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C})) = \boldsymbol{R}_+ \boldsymbol{C}$$

とおくと，〔3〕の定理23及び定理2により，

$$(\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{C})^{\mathrm{I}}=[g(\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}))]^{\mathrm{I}}=g([\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}})$$
$$=g(\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}))=\boldsymbol{R}_{+}\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}},$$
$$(\boldsymbol{R}_{+}\boldsymbol{C})^{\mathrm{I}}=[\tilde{g}(\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}))]^{\mathrm{I}}=\tilde{g}([\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}})$$
$$=\tilde{g}(\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}))=\boldsymbol{R}_{+}\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}.\ \|$$

注意 4　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して,

$$\hat{\boldsymbol{K}}:=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})\cup(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})=\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})\cup(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\subset\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n$$

とおくと, 次の関係が成立する.

(i)　$\hat{\boldsymbol{K}}$ は凸錐である.

(ii)　$\hat{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})+(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$.

(iii)　$\hat{\boldsymbol{K}}$ は, 次の (†) を満たすすべての凸錐 $\boldsymbol{K}$ のうち, 最大の凸錐である.

(†)　$\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{K}\cap(\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})$.

証明　(i). (ii)が示されれば〔3〕の定理11により, 明らかである.

(ii). 定理1(i)及び〔3〕の定理11(ii)により, $\hat{\boldsymbol{K}}\subset\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})+(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$. 一方, 定理1(i)(iii)により,

$$(\theta,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})+(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}),\ \theta\in\boldsymbol{R}_{+}$$
$$\Rightarrow (\theta,\boldsymbol{x}_1)+(0,\boldsymbol{x}_2)=(\theta,\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2),\ \boldsymbol{x}_1\in\theta\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\theta\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in\theta(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})=\theta\boldsymbol{C}$$
$$\Rightarrow (\theta,\boldsymbol{x})\in\theta(1,\boldsymbol{C})\subset\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}).$$
$$(0,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})+(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\ \Rightarrow\ (0,\boldsymbol{x})\in(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}).$$

よって, $\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})+(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\subset\hat{\boldsymbol{K}}$.

(iii). $\hat{\boldsymbol{K}}$ が (†) を満たすことは明らかであるので, $\boldsymbol{K}$ は (†) を満たす任意所与の凸錐であるとして, $\boldsymbol{K}\subset\hat{\boldsymbol{K}}$ を示す. $(\theta,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{K}\cap(\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})$ ならば, $(\theta,\boldsymbol{x})\in\hat{\boldsymbol{K}}$ は自明であるので, 以下, $(\theta,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{K}\cap(\{0\}\times\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{K}\cap(0,\boldsymbol{R}^n)$, すなわち, $(0,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{K}\cap(0,\boldsymbol{R}^n)$ ならば, $(0,\boldsymbol{x})\in(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$ を示す. $\boldsymbol{K}$ は錐であるから, 任意の $(\eta,\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})\subset\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{y}\in\eta\boldsymbol{C}$ に対して,

$$(0,\boldsymbol{x})+(\eta,\boldsymbol{y})=(\eta,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{K}\cap(\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}),\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\eta\boldsymbol{C}.$$

$\boldsymbol{y}\in\eta\boldsymbol{C}$ は任意であるから，$\boldsymbol{x}+\eta\boldsymbol{C}\subset\eta\boldsymbol{C}$．すなわち，$\eta^{-1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}$．よって，定理1(ii)により，$\eta^{-1}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$．ところで，定理1(i)により，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は凸錐であるから，$\boldsymbol{x}=\eta\cdot\eta^{-1}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$．すなわち，$(0,\boldsymbol{x})\in(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$．‖

定理3　閉凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})\cup(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$．

(ii)　$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は閉集合である．

(iii)　$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\begin{array}{l}\exists\text{点列}\langle(\theta_\nu,\boldsymbol{x}_\nu)\rangle,(\theta_\nu,\boldsymbol{x}_\nu)\in\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}):\\ \qquad\lim_{\nu\to\infty}(\theta_\nu,\boldsymbol{x}_\nu)=(0,\boldsymbol{x})\end{array}\right\}.$$

証明　$\hat{\boldsymbol{K}}:=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})\cup(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$ とおく．

(i)．$[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}$ であること．定理2(ii)及び〔3〕の定理16によって，明らかである．$[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=\hat{\boldsymbol{K}}$ であること．〔3〕の定理22(i)により，

① $[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\subset(\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n)^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n$．

次に，任意所与の $\theta\in\boldsymbol{R}_{+}$ に対して，$\theta(1,\boldsymbol{R}^n)=\{\theta\}\times\boldsymbol{R}^n$ はアフィン集合であること，定理2(iii)により，

$$[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}\cap\theta(1,\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\cap\theta(1,\boldsymbol{R}^n)\neq\emptyset$$

であること，及び $\boldsymbol{C}$ が閉であることに注目すると，〔3〕の定理21系1及び定理2(i)により，

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\cap\theta(1,\boldsymbol{R}^n)&=[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})\cap\theta(1,\boldsymbol{R}^n)]^{\mathrm{a}}\\&=[\theta(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=\theta(1,\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})=\theta(1,\boldsymbol{C})\end{aligned}$$

となる結果，$\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{R}^n)=\cup_{\theta\in\boldsymbol{R}_{+}}\theta(1,\boldsymbol{R}^n)$ を考慮すると，

② $$\begin{aligned}[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\cap(\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n)&=[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\cap[\cup_{\theta\in\boldsymbol{R}_{+}}\theta(1,\boldsymbol{R}^n)]\\&=\cup_{\theta\in\boldsymbol{R}_{+}}([\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\cap\theta(1,\boldsymbol{R}^n))\\&=\cup_{\theta\in\boldsymbol{R}_{+}}\theta(1,\boldsymbol{C})=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}).\end{aligned}$$

よって，①と②により，$[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}$ は注意4(iii)の(†)を満たす凸錐であるので，注意4(iii)により，

③ $[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\subset\hat{\boldsymbol{K}}$．

一方，〔3〕の定理22(ii)により，

$$\hat{\boldsymbol{K}}\cap(\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n)^{\mathrm{I}}=\hat{\boldsymbol{K}}\cap(\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})\neq\emptyset$$

であるから，$\hat{\boldsymbol{K}}\not\subset(\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n)^{\mathrm{B}}$ であり，〔3〕の定理21系により，

$$\hat{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{I}}\subset(\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}^n)^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n$$

を得る結果，〔3〕の定理21により，

$$\hat{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{I}}=\hat{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{I}}\cap(\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n)=[\hat{\boldsymbol{K}}\cap(\boldsymbol{R}_{+}\times\boldsymbol{R}^n)]^{\mathrm{I}}$$
$$=[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}\subset\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}).$$

すなわち，〔3〕の定理19(i)により，

$$④\quad \hat{\boldsymbol{K}}\subset\hat{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{a}}=(\hat{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{a}}\subset[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}.$$

よって，③と④により，結論を得る．

(ii). (i)により，

$$(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})=\hat{\boldsymbol{K}}\cap(0,\boldsymbol{R}^n)=[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\cap(0,\boldsymbol{R}^n)$$

であるが，最右辺は閉集合の共通部分であるから，閉集合である．つまり，$(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$ は閉集合である．

(iii). 右辺を $\boldsymbol{X}$ とおくと，(i)により，

$$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\Leftrightarrow(0,\boldsymbol{x})\in(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$$
$$\Leftrightarrow(0,\boldsymbol{x})\in\hat{\boldsymbol{K}}=[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}.\,\|$$

定理 4　閉凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，

$$\boldsymbol{A}:=\{\boldsymbol{x}\mid\exists\,\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}:\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_0\subset\boldsymbol{C}\},$$
$$\boldsymbol{B}:=\{\boldsymbol{x}\mid\exists\,\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}:\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_0\subset\boldsymbol{C}\}$$

とおくとき，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{R}}.$$

証明　最初に，〔3〕の定理18(ii)により，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ であることに留意しておく．$\underline{\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{A}\text{ であること}}$．$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}:=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}\}\subset\boldsymbol{A}$ は自明であるので，$\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ を示す．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$ は任意所与とし，$\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_0\subset\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}$ としておく．任意の $\nu\in\boldsymbol{N}$ に対して，$\nu\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}$，すなわち，$\boldsymbol{x}+\nu^{-1}\boldsymbol{a}_0\in\nu^{-1}\boldsymbol{C}$ であるから，

$$\begin{cases} (\nu^{-1}, \boldsymbol{x}+\nu^{-1}\boldsymbol{a}_0) \in \nu^{-1}(1, \boldsymbol{C}) \subset \boldsymbol{R}_+(1, \boldsymbol{C}), \\ \lim_{\nu\to\infty}(\nu^{-1}, \boldsymbol{x}+\nu^{-1}\boldsymbol{a}_0) = (0, \boldsymbol{x}). \end{cases}$$

よって，定理 3 (iii)により，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$. すなわち，$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$. $\underline{\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}}$ <u>であること</u>. $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$ は自明である．一方，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は任意所与とすると，

$$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} : \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{C}$$

であるから，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$. すなわち，$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$. $\underline{\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{R}}}$ <u>であること</u>. $(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{R}} := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} \subset \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}\} \subset \boldsymbol{B}$ は自明であるので，$\boldsymbol{B} \subset (\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{R}}$ を示す．$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は任意所与とする．任意の $\theta (0<\theta<1)$ に対して，〔3〕の定理 3 (iii)及び〔3〕の定理18(iii)により，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} = \theta\boldsymbol{C}+(1-\theta)\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ であるから，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} &= \theta(\theta^{-1}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C})+(1-\theta)\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} \\ &\subset \theta(\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C})+(1-\theta)\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} \subset \theta\boldsymbol{C}+(1-\theta)\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}. \end{aligned}$$

よって，定理 1 (ii)により，$\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{R}}$. すなわち，$\boldsymbol{B} \subset (\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{R}}$. ||

系 1　閉凸集合 $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C} \neq \emptyset$ に対して，$0 \in \boldsymbol{C}$ ならば，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{C}\} = \cap_{\theta \in \boldsymbol{R}_+}\theta\boldsymbol{C}.$$

証明　$0 \in \boldsymbol{C}$ であるから，定理 4 により，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{C} \\ \Leftrightarrow\ &\forall \theta \in \boldsymbol{R}_+ : \theta^{-1}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \cap_{\theta \in \boldsymbol{R}_+}\theta\boldsymbol{C}. \| \end{aligned}$$

系 2　閉凸集合 $\boldsymbol{C}_i \subset \boldsymbol{R}^n$ の任意の族 $\{\boldsymbol{C}_i \mid i \in \boldsymbol{\Lambda}$(添数集合)$\}$ に対して，$\cap_{i\in\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{C}_i \neq \emptyset$ ならば，次の関係が成立する．

$$\{\cap_{i\in\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{C}_i\}^{\mathrm{R}} = \cap_{i\in\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}.$$

証明　以下においては，$\cap\boldsymbol{C}_i := \cap_{i\in\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{C}_i$ というように，$i \in \boldsymbol{\Lambda}$ を省略する．$\boldsymbol{a} \in \cap\boldsymbol{C}_i$ は任意所与とすると，定理 4 により，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \in \cap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \forall i \in \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \forall i \in \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}_i \subset \boldsymbol{C}_i \\ \Leftrightarrow\ &\forall i \in \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{C}_i \Leftrightarrow \forall i \in \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+(\cap\boldsymbol{C}_i) \subset \boldsymbol{C}_i \\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+(\cap\boldsymbol{C}_i) \subset \cap\boldsymbol{C}_i \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \{\cap\boldsymbol{C}_i\}^{\mathrm{R}}. \| \end{aligned}$$

系 3　線形変換 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ と閉凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^m$ に対して，$g^{-1}(\boldsymbol{C}):=\{\boldsymbol{x}\,|\,g(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}\}\neq\emptyset$ ならば，次の関係が成立する．

$$\{g^{-1}(\boldsymbol{C})\}^{\mathrm{R}}=g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}).$$

証明　〔2〕の定理14により，g はある1意的な (m,n) 型行列 $M=[m_{ij}]$，$m_{ij}\in\boldsymbol{R}$，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$ によって，$g(\boldsymbol{x})=M\boldsymbol{x}$ と表すことができる．ここで，

$$\|M\|:=(\textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$$

とおくと，シュワルツの不等式により，

$$\|g(\boldsymbol{x})\|=\|M\boldsymbol{x}\|=[\textstyle\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}m_{ij}x_j)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqq[\textstyle\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}m_{ij}^2)(\sum_{j=1}^{n}x_j^2)]^{\frac{1}{2}}=\|M\|\|\boldsymbol{x}\|$$

であるから，g は連続関数であり，仮定と〔3〕の注意4(iv)により，$g^{-1}(\boldsymbol{C})$ は閉集合である．そこで，$\boldsymbol{a}\in g^{-1}(\boldsymbol{C})$ は任意所与とし，関係

$$\boldsymbol{C}\subset g^{-1}(g(\boldsymbol{C})),\ g(g^{-1}(\boldsymbol{C}))\subset\boldsymbol{C}$$

に注目しておくと，定理4により，

$$\boldsymbol{x}\in\{g^{-1}(\boldsymbol{C})\}^{\mathrm{R}}\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+g^{-1}(\boldsymbol{C})\subset g^{-1}(\boldsymbol{C})$$
$$\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\subset g^{-1}(\boldsymbol{C})\Leftrightarrow g(\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{R}_{\oplus}g(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{a})\subset\boldsymbol{C}$$
$$\Leftrightarrow\boldsymbol{R}_{\oplus}g(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}\Leftrightarrow g(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}).\,\|$$

注意 5　定理3及び定理4は，凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ が閉集合でないならば，一般に成立しない．

証明　$\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{C}_4$（注意2）とする．$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}$ であるから，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は閉集合ではない．$\{\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}\}^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{R}_+^2\}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{R}_{\oplus}^2$ であるから，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\subsetneqq\{\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}\}^{\mathrm{R}}$ である．更に，$\bar{\boldsymbol{x}}:=(1,0)\notin\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$，$\boldsymbol{a}_0:=(1,1)\in\boldsymbol{C}$ とすると，$\boldsymbol{R}_{\oplus}\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{a}_0=\{(\theta+1,1)\,|\,\theta\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}\subset\boldsymbol{C}$ であるから，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{A}:=\{\boldsymbol{x}\,|\,\exists\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}:\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_0\subset\boldsymbol{C}\}$ となり，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\neq\boldsymbol{A}$ である．‖

定理 5　閉凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　$\boldsymbol{C}$ が有界である．

(ii)　$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{0}\}$.

証明　(i)⇒(ii)．$\boldsymbol{C}$ が有界であるから，任意所与の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ に対し

て，$\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\not\subset\boldsymbol{C}$，すなわち，$\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$．よって，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\{0\}$．

(ii)⇒(i)．対偶によって示す．$\boldsymbol{C}$ が非有界ならば，

$$\exists\, \boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{x}_0\neq 0 : \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C},$$

すなわち，

$$\exists\, \boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}\ \forall\nu\in\boldsymbol{N} : \boldsymbol{y}_\nu:=\nu\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C},\ \lim_{\nu\to\infty}\|\boldsymbol{y}_\nu\|=\infty,$$

であることに注目し，点列 $\langle(\theta_\nu,\boldsymbol{x}_\nu)\rangle:=\langle(\|\boldsymbol{y}_\nu\|^{-1},\|\boldsymbol{y}_\nu\|^{-1}\boldsymbol{y}_\nu)\rangle$，$\boldsymbol{y}_\nu\neq\boldsymbol{0}$ を考える．$\boldsymbol{x}_\nu\in\{\boldsymbol{x}\,|\,\|\boldsymbol{x}\|=1\}$（$\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合）であるから，〔1〕の定理6．12及び〔1〕の定理6．13により，点列 $\langle\boldsymbol{x}_\nu\rangle$ は収束部分列を持つ．そこで，一般性を失うことなく，点列 $\langle\boldsymbol{x}_\nu\rangle$ 自身を $\bar{\boldsymbol{x}}\in\{\boldsymbol{x}\,|\,\|\boldsymbol{x}\|=1\}$ に収束する点列であると見なしておくと，

$$(\theta_\nu,\boldsymbol{x}_\nu)\in\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C}),\ \lim_{\nu\to\infty}(\theta_\nu,\boldsymbol{x}_\nu)=(0,\bar{\boldsymbol{x}}).$$

よって，定理3(iii)により，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ となり，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\neq\{0\}$．‖

系　閉凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，互いに平行な2つのアフィン集合 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{A}_1\cap\boldsymbol{C}$ が非空・有界ならば，$\boldsymbol{A}_2\cap\boldsymbol{C}$ も有界である．

証明　$\boldsymbol{A}_2/\!/\boldsymbol{A}_1$ に注目して，$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_1\subset\boldsymbol{A}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{a}\subset\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{a}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_2\subset\boldsymbol{A}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{R}}.$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{R}}$．よって，$\boldsymbol{A}_2\cap\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ ならば，定理4系2及び定理5により，

$$\{\boldsymbol{A}_2\cap\boldsymbol{C}\}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{R}}\cap\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{R}}\cap\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{A}_1\cap\boldsymbol{C}\}^{\mathrm{R}}=\{0\}.$$

よって，再び定理5により，$\boldsymbol{A}_2\cap\boldsymbol{C}$ 有界である．‖

§2　凸集合の直系空間

定義4　凸集合の直系空間

凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，集合

$$\mathrm{C}^{\mathrm{L}}:=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}\}=(-\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\cap\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\subset\boldsymbol{R}^n$$

を $\boldsymbol{C}$ の直系空間という[1)].

注意 5　線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{L}\neq\emptyset$ に対して，次の関係が成立する.

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{L}}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{L}.$$

証明　$\boldsymbol{L}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{L}$ は，注意2により，自明である．また，定理1(ii)により，

$$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}^{\mathrm{L}}=(-\boldsymbol{L}^{\mathrm{R}})\cap\boldsymbol{L}^{\mathrm{R}}\Leftrightarrow -\boldsymbol{x}+\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{L}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{L}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\Leftrightarrow \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}. \|$$

定義 5　凸集合の直系

凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ は，$\dim\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}=\boldsymbol{r}(\in\boldsymbol{Z})$ であるとき，$\boldsymbol{r}$ 直系であるといい，$\operatorname{lin}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{r}$ と書く．すなわち，$\operatorname{lin}\boldsymbol{C}:=\dim\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$.

定理 6　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}\neq\emptyset$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$ に含まれる任意所与の線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$, $\boldsymbol{L}$ の直系補空間 $\boldsymbol{L}^{\perp}$ 及び $\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$ の直交補空間 $(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}$ に対して，次の関係が成立する.

(i)　$\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$ は $\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ に含まれる最大の線形部分空間である.

(ii)　$\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\}=\{\boldsymbol{x}\mid\exists\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}:\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_0\subset\boldsymbol{C}\}$.

(iii)　$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{L}+(\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{L}^{\perp})=\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}+[\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}]$.

(iv)　$\dim\boldsymbol{C}=\dim\boldsymbol{L}+\dim(\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{L}^{\perp})=\operatorname{lin}\boldsymbol{C}+\dim[\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}]$.

証明　(i)．〔2〕の定理10(ii)により，明らかである.

(ii)．$\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$ の定義，定理1及び定理4により，明らかである.

(iii)．$\underline{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}+\boldsymbol{C}\text{ であること}}$．(ii)により，自明である．$\underline{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{L}+(\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{L}^{\perp})\text{ であること}}$．$\boldsymbol{L}+(\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{L}^{\perp})\subset\boldsymbol{L}+\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}$．一方，〔2〕の定理12により，$\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\perp}=\boldsymbol{R}^n$ であることに注目し，任意所与の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{L}^{\perp}$ とおくと，

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}-\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}=\boldsymbol{C}$$

であるから，$\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{L}^{\perp}$ であり，結局，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{L}+(\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{L}^{\perp})$．$\underline{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}+[\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}]\text{ であること}}$．(i)を考慮して，上述の結果に対し，特に $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$ を代入すればよい.

1)　$\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$ の上付き文字Lは直線 line の語頭文字である.

(iv). 前の等号が成立すれば，後の等号は自明であるので，前の等号のみを示す．$\tilde{\boldsymbol{C}}:=\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{L}^{\perp}$ とおき，また，〔2〕の定理23に基づいて，$\tilde{\boldsymbol{C}}$ のアフィン包 $\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}$ に平行な線形部分空間を $\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$ とおく．(iii)と〔2〕の定理20により，

$$① \quad \mathcal{A}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{a}=\mathcal{A}(\boldsymbol{L}+\tilde{\boldsymbol{C}})-\boldsymbol{a}=\mathcal{A}\boldsymbol{L}+\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{L}+(\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a})$$

は，$\boldsymbol{C}$ のアフィン包 $\mathcal{A}\boldsymbol{C}$ に平行な線形部分空間である．また，$0\in\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a}$, かつ，〔2〕の注意 4 により，$\boldsymbol{L}^{\perp}$ は線形部分空間であることから，$\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}\subset\mathcal{A}\boldsymbol{L}^{\perp}=\boldsymbol{L}^{\perp}$ である結果，〔2〕の定理12により，

$$\boldsymbol{L}\cap(\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a})\subset\boldsymbol{L}\cap(\boldsymbol{L}^{\perp}-\boldsymbol{L}^{\perp})=\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{L}^{\perp}=\{0\}.$$

一方，$\{0\}\subset\boldsymbol{L}\cap(\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a})$ は自明である．よって，

$$② \quad \boldsymbol{L}\cap(\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a})=\{0\}.$$

さて，①と②に注目すると，〔2〕の定理 9 と凸集合の次元の定義により，

$$\begin{aligned}\dim\boldsymbol{C}&:=\dim(\mathcal{A}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{a})=\dim(\boldsymbol{L}+\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a})\\&=\dim\boldsymbol{L}+\dim(\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a})-\dim[\boldsymbol{L}\cap(\mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{a})]\\&=\dim\boldsymbol{L}+\dim\tilde{\boldsymbol{C}}.\ \|\end{aligned}$$

系 1　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　$\boldsymbol{C}$ がアフィン集合である．

(ii)　$\dim\boldsymbol{C}=\mathrm{lin}\,\boldsymbol{C}$. すなわち，$\dim[\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}]=0$.

証明　$\hat{\boldsymbol{C}}:=\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}$ とおく．

(i)⇒(ii). 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\hat{\boldsymbol{C}}$ に対して，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ となることを示すことにより，$\hat{\boldsymbol{C}}$ はただ 1 点のみからなる集合であることを示す．〔2〕の注意 4 により，$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}$ は線形部分空間であるから，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}$. 一方，注意 2 により，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$ は $\boldsymbol{C}$ に平行な線形部分空間であるから，

$$\exists\,\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{R}^n:\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$$

であることに注目すると，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$, $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}_0\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}$. よって，〔2〕の定理12により，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}\cap(\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})^{\perp}=\{0\}$. すなわち，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. あとは，定理 6 (iv)によって，結論を得る．

(ii)⇒(i). $\dim\hat{\boldsymbol{C}}=0$ ならば，$\hat{\boldsymbol{C}}$ はただ1点 $\boldsymbol{a}$ のみからなる集合 $\{\boldsymbol{a}\}$ である．定理6(iii)により，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{L}+\{\boldsymbol{a}\}=\boldsymbol{C}^{L}+\boldsymbol{a}$，すなわち，$\boldsymbol{C}\,/\!/\,\boldsymbol{C}^{L}$ である．よって，定理6(i)及び〔2〕の定理22により，$\boldsymbol{C}$ はアフィン集合である.‖

系2　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^{n}$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，$\boldsymbol{C}$ が閉集合または開集合ならば，次の関係が成立する．

$$[\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{L})^{\perp}]^{L}=\{\boldsymbol{0}\},\ \text{すなわち，}\ \mathrm{lin}[\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{L})^{\perp}]=\boldsymbol{0}.$$

証明　$\bar{\boldsymbol{C}}:=(\boldsymbol{C}^{L})^{\perp}$，$\hat{\boldsymbol{C}}:=\boldsymbol{C}\cap\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{L})^{\perp}$ とおく．ⓐ定理6(iii)により，$\hat{\boldsymbol{C}}\neq\emptyset$ であること，ⓑ定理6(i)及び〔2〕の注意4により，$\bar{\boldsymbol{C}}$ は線形部分空間であるから，注意6により，$\bar{\boldsymbol{C}}=\bar{\boldsymbol{C}}^{R}=\bar{\boldsymbol{C}}^{L}$ であること，また，ⓒ$\bar{\boldsymbol{C}}$ はアフィン集合であるから，$\bar{\boldsymbol{C}}=\bar{\boldsymbol{C}}^{a}=\bar{\boldsymbol{C}}^{I}$ であること——に注目しておく．$\boldsymbol{C}$ が閉集合であるとき．定理4系2及び〔2〕の定理12(i)により，

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{C}}^{L}&=(-\hat{\boldsymbol{C}}^{R})\cap\hat{\boldsymbol{C}}^{R}=[-\{\boldsymbol{C}\cap\bar{\boldsymbol{C}}\}^{R}]\cap\{\boldsymbol{C}\cap\bar{\boldsymbol{C}}\}^{R}\\&=[-(\boldsymbol{C}^{R}\cap\bar{\boldsymbol{C}}^{R})]\cap(\boldsymbol{C}^{R}\cap\bar{\boldsymbol{C}}^{R})=[(-\boldsymbol{C}^{R})\cap\boldsymbol{C}^{R}]\cap[(-\bar{\boldsymbol{C}})\cap\bar{\boldsymbol{C}}]\\&=\boldsymbol{C}^{L}\cap\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}^{L}\cap(\boldsymbol{C}^{L})^{\perp}=\{\boldsymbol{0}\}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{C}$ が開集合であるとき．〔3〕の定理21により，$\emptyset\neq\hat{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}^{I}\cap\bar{\boldsymbol{C}}=(\boldsymbol{C}\cap\bar{\boldsymbol{C}})^{I}=\hat{\boldsymbol{C}}^{I}$ に留意して，定理4，〔3〕の定理2，定理4系2及び〔2〕の定理12(i)を順次利用すると，

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{C}}^{L}&=(-\hat{\boldsymbol{C}}^{R})\cap\hat{\boldsymbol{C}}^{R}=[-\{\hat{\boldsymbol{C}}^{a}\}^{R}]\cap\{\hat{\boldsymbol{C}}^{a}\}^{R}\\&=[-\{(\boldsymbol{C}\cap\bar{\boldsymbol{C}})^{a}\}^{R}]\cap\{(\boldsymbol{C}\cap\bar{\boldsymbol{C}})^{a}\}^{R}=[-\{\boldsymbol{C}^{a}\cap\bar{\boldsymbol{C}}^{a}\}^{R}]\cap\{\boldsymbol{C}^{a}\cap\bar{\boldsymbol{C}}^{a}\}^{R}\\&=[-(\{\boldsymbol{C}^{a}\}^{R}\cap\bar{\boldsymbol{C}}^{R})]\cap[\{\boldsymbol{C}^{a}\}^{R}\cap\bar{\boldsymbol{C}}^{R}]\\&=[(-\boldsymbol{C}^{R})\cap\boldsymbol{C}^{R}]\cap[(-\bar{\boldsymbol{C}})\cap\bar{\boldsymbol{C}}]=\boldsymbol{C}^{L}\cap\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}^{L}\cap(\boldsymbol{C}^{L})^{\perp}=\{\boldsymbol{0}\}.\ \|\end{aligned}$$

定義6　凸集合の階数

凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^{n}$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，

$$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{C}:=\dim[\boldsymbol{C}\cap(\boldsymbol{C}^{L})^{\perp}]=\dim\boldsymbol{C}-\mathrm{lin}\,\boldsymbol{C}$$

を $\boldsymbol{C}$ の階数という．$\boldsymbol{C}$ の階数は，$\boldsymbol{C}$ の非線形性を測る1つの測度である．

注意6　閉凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^{n}$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{C}=\dim\boldsymbol{C}$，すなわち，$\mathrm{lin}\,\boldsymbol{C}=0$.

(ii)　$\boldsymbol{C}$ がいかなる直線も含まない．

証明　定理6(i)(ii)により，明らかである．||

§3　凸集合の特性錐・直系空間の適用例

定理7　凸集合$\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ と線形変換 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ に対して，

(＊)　$\{\boldsymbol{C}^a\}^R\cap\{\boldsymbol{x}\,|\,g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}\subset\{\boldsymbol{C}^a\}^L$

ならば，したがって，特に

($\overset{*}{*}$)　$\{\boldsymbol{C}^a\}^R\cap\{\boldsymbol{x}\,|\,g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{0}\}$,

あるいは，

($\overset{*}{**}$)　$\boldsymbol{C}$ が有界集合

ならば，次の関係が成立する．

(i)　$[g(\boldsymbol{C})]^a=g(\boldsymbol{C}^a)$.

(ii)　$\{g(\boldsymbol{C}^a)\}^R=g(\{\boldsymbol{C}^a\}^R)$.

証明　($\overset{*}{*}$)が(＊)の特殊事例であることは自明であるが，($\overset{*}{**}$)が(＊)の特殊事例であることは，定理5による．

(i)．〔3〕の定理23により，$g(\boldsymbol{C}^a)\subset[g(\boldsymbol{C})]^a$ であるから，$[g(\boldsymbol{C})]^a\subset g(\boldsymbol{C}^a)$ であること，すなわち，

$$① \quad \forall \boldsymbol{y}\in[g(\boldsymbol{C})]^a\ \exists \boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{C}^a:\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x}_0),$$

であることを示せばよい．そこで，以下，$\bar{\boldsymbol{y}}\in[g(\boldsymbol{C})]^a$ は任意所与であるとし，$\boldsymbol{L}:=\{\boldsymbol{C}^a\}^R\cap\{\boldsymbol{x}\,|\,g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$，$\tilde{\boldsymbol{C}}:=\boldsymbol{C}^a\cap\boldsymbol{L}^\perp$ とおく．まず，(＊)とgが線形変換であることにより，

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\cap\{\boldsymbol{C}^a\}^L=\{\boldsymbol{C}^a\}^L\cap\{\boldsymbol{x}\,|\,g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}\subset\{\boldsymbol{C}^a\}^L$$

は，$\{\boldsymbol{C}^a\}^L$ に含まれる線形部分空間であるから，定理6(iii)とgが線形変換であることにより，

$$② \quad g(\boldsymbol{C}^a)=g(\boldsymbol{L}+\tilde{\boldsymbol{C}})=g(\boldsymbol{L})+g(\tilde{\boldsymbol{C}})=g(\tilde{\boldsymbol{C}}).$$

また，定理6(i)及び〔2〕の注意4により，$\boldsymbol{L}^\perp$ は線形部分空間，したがって，

アフィン集合であり，$\boldsymbol{L}^{\perp}=(\boldsymbol{L}^{\perp})^{a}$ である結果，〔3〕の定理21(ｉ)により，$\tilde{\boldsymbol{C}}:=\boldsymbol{C}^{a}\cap\boldsymbol{L}^{\perp}=(\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{L}^{\perp})^{a}$．すなわち，$\tilde{\boldsymbol{C}}$ は閉集合である．ここで，〔3〕の定理23(ｉ)により，$[g(\boldsymbol{C})]^{a}=[g(\boldsymbol{C}^{a})]^{a}$ であること，及び②に注目して，$\bar{\boldsymbol{y}}=g(\bar{\boldsymbol{x}})\in[g(\boldsymbol{C})]^{a}=[g(\tilde{\boldsymbol{C}})]^{a}$，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\tilde{\boldsymbol{C}}$(閉)とおくと，

③ $\forall\delta\in\boldsymbol{R}_{+}:\tilde{\boldsymbol{C}}\cap\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}};\delta)\neq\emptyset.$

次に，定理４系３の証明過程で示したように，g は連続関数，すなわち，

$$\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+}\,\exists\delta_{\varepsilon}\in\boldsymbol{R}_{+}:g(\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}};\delta_{\varepsilon}))\subset\boldsymbol{B}(g(\bar{\boldsymbol{x}});\varepsilon),$$

であるから，

④ $\forall\nu\in\boldsymbol{N}\,\exists\delta_{\nu}\in\boldsymbol{R}_{+}:\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}};\delta_{\nu})\subset\boldsymbol{D}_{\nu}:=\{\boldsymbol{x}\mid\|g(\boldsymbol{x})-\bar{\boldsymbol{y}}\|\leqq\nu^{-1}\}.$

よって，③と④により，任意所与の $\nu\in\boldsymbol{N}$ に対して，$\boldsymbol{A}_{\nu}:=\tilde{\boldsymbol{C}}\cap\boldsymbol{D}_{\nu}\neq\emptyset$ であり，また，$\boldsymbol{D}_{\nu}$ は閉集合であるから，$\boldsymbol{A}_{\nu}$ は閉集合である．さて，任意所与の $\nu\in\boldsymbol{N}$に対して，定理４系２及び〔2〕の定理12(ｉ)により，

$$\boldsymbol{A}_{\nu}^{R}=(\tilde{\boldsymbol{C}}\cap\boldsymbol{D}_{\nu})^{R}=\tilde{\boldsymbol{C}}^{R}\cap\boldsymbol{D}_{\nu}^{R}=(\boldsymbol{C}^{a}\cap\boldsymbol{L}^{\perp})^{R}\cap\{\boldsymbol{x}\mid g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$$
$$=\boldsymbol{L}^{\perp}\cap\{\boldsymbol{C}^{a}\}^{R}\cap\{\boldsymbol{x}\mid g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}=\boldsymbol{L}^{\perp}\cap\boldsymbol{L}=\{\boldsymbol{0}\}$$

であるから，定理５により，$\boldsymbol{A}_{\nu}$ は有界である．よって，集合列 $\langle\boldsymbol{A}_{\nu}\rangle$，$\boldsymbol{A}_{\nu}\neq\emptyset$，$\boldsymbol{A}_{1}\supset\boldsymbol{A}_{2}\supset\cdots$，は有界閉集合の減少列であるから，カントールの共通部分定理[1)]により，

$$\cap_{\nu\in\boldsymbol{N}}\boldsymbol{A}_{\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\boldsymbol{A}_{\nu}\neq\emptyset,$$
$$\forall\boldsymbol{z}\in\cap_{\nu\in\boldsymbol{N}}\boldsymbol{A}_{\nu}:\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}^{a},\ \bar{\boldsymbol{y}}=g(\boldsymbol{z})$$

であるが，これは①の成立を意味する．

(ii)．$\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{C}^{a}$ とおく．線形変換

$$h:\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})\to\boldsymbol{R}^{m+1},\quad h(\theta,\boldsymbol{x}):=(\theta,g(\boldsymbol{x}))$$

を考える．注意２，注意４，定理３(ｉ)及び(＊)により，

$$\{[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})]^{a}\}^{R}\cap\{(\theta,\boldsymbol{x})\mid h(\theta,\boldsymbol{x})=(0,\boldsymbol{0})\}$$
$$=[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})]^{a}\cap\{(0,\boldsymbol{x})\mid g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$$

1) cf. 文献〔6〕の定理 13. 7 (p. 87).

$$=(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\cap\{(0,\boldsymbol{x})\mid g(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\}\subset(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}})$$
$$=\{-(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\}\cap(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})=\{-[\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\}\cap[\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}$$
$$=[-\{[\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}]\cap\{[\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}=\{[\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{L}}$$

であるから，(i)の帰結により，

⑤ $[h(\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C}))]^{\mathrm{a}}=h([\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}).$

ところで，定理3(i)により，

⑥ $[h(\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C}))]^{\mathrm{a}}=\{h(\theta,\boldsymbol{x})\mid(\theta,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})\}^{\mathrm{a}}$

$$=\{(\theta,g(\boldsymbol{x}))\mid\theta\in\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{x}\in\theta\boldsymbol{C}\}^{\mathrm{a}}$$
$$=\{(\theta,\boldsymbol{y})\mid\theta\in\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\in g(\theta\boldsymbol{C})=\theta g(\boldsymbol{C})\}^{\mathrm{a}}$$
$$=[\boldsymbol{R}_+(1,g(\boldsymbol{C}))]^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{R}_+(1,g(\boldsymbol{C}))\cup(0,\{g(\boldsymbol{C})\}^{\mathrm{R}}),$$

⑦ $h([\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}})=\{h(\theta,\boldsymbol{x})\mid(\theta,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})\cup(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\}$

$$=\{h(\theta,\boldsymbol{x})\mid(\theta,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C})\}\cup\{h(\theta,\boldsymbol{x})\mid(\theta,\boldsymbol{x})\in(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\}$$
$$=\{(\theta,g(\boldsymbol{x}))\mid\theta\in\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{x}\in\theta\boldsymbol{C}\}\cup\{(\theta,g(\boldsymbol{x}))\mid\theta=0,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\}$$
$$=\{(\theta,\boldsymbol{y})\mid\theta\in\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\in g(\theta\boldsymbol{C})=\theta g(\boldsymbol{C})\}$$
$$\cup\{(0,\boldsymbol{y})\mid\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\in g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\}$$
$$=\boldsymbol{R}_+(1,g(\boldsymbol{C}))\cup(0,g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})).$$

よって，⑤，⑥及び⑦により，$\{g(\boldsymbol{C})\}^{\mathrm{R}}=g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})$ となって，結論を得る.‖

系1 凸集合 $\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_2\neq\emptyset$ に対して，

(＊) $[\{\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}\times\{\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}]\cap\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\mid\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}\}\subset\{\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{L}}\times\{\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{L}}$

ならば，したがって，特に

(⁑) $[\{\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}\times\{\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}]\cap\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\mid\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}\}=\{\mathbf{0}\},$

あるいは，

(⁂) $\boldsymbol{C}_1$ と $\boldsymbol{C}_2$ が共に有界集合

ならば，次の関係が成立する.

(i) $(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}+\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}.$

(ii) $\{(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}+\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}+\{\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}.$

証明 (⁑)が(＊)の特殊事例であることは，自明である，(⁂)が(＊)の特殊

事例であることは，定理5による．Eはn次単位行列，Mは$(n,2n)$型行列$[E,E]$とし，線形変換$g:C_1\times C_2\to R^n$を

$$g(x_1,x_2):=M(x_1,x_2)=x_1+x_2,\ \ g(C_1\times C_2)=C_1+C_2$$

によって定義しておく．定理1系及び〔3〕の定理22により，

① $\{C_1^a\}^R\times\{C_2^a\}^R=\{C_1^a\times C_2^a\}^R=\{(C_1\times C_2)^a\}^R$

であるから，(＊)は，

$$\{(C_1\times C_2)^a\}^R\cap\{(x_1,x_2)\,|\,g(x_1,x_2)=(0,0)\}\subset\{(C_1\times C_2)^a\}^L$$

を意味する．よって，定理7，〔3〕の定理22及び①により，

$$\begin{aligned}(C_1+C_2)^a&=[g(C_1\times C_2)]^a=g([C_1\times C_2]^a)\\&=g(C_1^a\times C_2^a)=C_1^a+C_2^a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{C_1^a+C_2^a\}^R&=\{g(C_1^a\times C_2^a)\}^R=\{g([C_1\times C_2]^a)\}^R\\&=g(\{[C_1\times C_2]^a\}^R)=g(\{C_1^a\}^R\times\{C_2^a\}^R)=\{C_1^a\}^R+\{C_2^a\}^R.\ \|\end{aligned}$$

系1′　凸集合$C_i\subset R^n$，$C_i\neq\emptyset$，$i=1,\cdots,m$に対して，

(＊)　$\Pi_{i=1}^m\{C_i^a\}^R\cap\{(x_1,\cdots,x_m)\,|\,\sum_{i=1}^m x_i=0\}\subset\Pi_{i=1}^m\{C_i^a\}^L$

ならば，次の関係が成立する．

(i)　$(\sum_{i=1}^m C_i)^a=\sum_{i=1}^m C_i^a.$

(ii)　$\{(\sum_{i=1}^m C_i)^a\}^R=\{\sum_{i=1}^m C_i^a\}^R=\sum_{i=1}^m\{C_i^a\}^R.$

証明　系1のMの代りに，(n,mn)型行列$[E,\cdots,E]$を使用し，系1の証明法と同様にすればよい．‖

系2　凸集合$C_1,C_2\subset R^n$，$C_1,C_2\neq\emptyset$に対して，

(＊)　$(C_1^R\times C_2^R)\cap\{(x_1,x_2)\,|\,x_1+x_2=0\}\subset C_1^L\times C_2^L$

ならば，次の関係が成立する．

$$[R_\oplus(1,C_1)+R_\oplus(1,C_2)]^a=[R_\oplus(1,C_1)]^a+[R_\oplus(1,C_2)]^a.$$

証明　注意2及び定理3(i)により，$i=1,\ 2$に対して，

$$\begin{aligned}\{[R_\oplus(1,C_i)]^a\}^L&=(-\{[R_\oplus(1,C_i)]^a\}^R)\cap\{[R_\oplus(1,C_i)]^a\}^R\\&=(-[R_\oplus(1,C_i)]^a)\cap[R_\oplus(1,C_i)]^a\end{aligned}$$

$$=(-[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}_i)\cup(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})])\cap[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}_i)\cup(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})]$$

$$=(-(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}))\cap(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})=(0,(-\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})\cap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})=(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{L}})$$

であることに注目し，注意2，定理3(i)及び(*)を利用すると，

$$\Pi_{i=1}^{2}\{[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}\cap\{((\theta_1,\boldsymbol{x}_1),(\theta_2,\boldsymbol{x}_2))\mid\textstyle\sum_{i=1}^{2}(\theta_i,\boldsymbol{x}_i)=(0,\boldsymbol{0})\}$$

$$=\Pi_{i=1}^{2}[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}$$
$$\cap\{((\theta_1,\boldsymbol{x}_1),(\theta_2,\boldsymbol{x}_2))\mid(\theta_1+\theta_2,\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=(0,\boldsymbol{0})\}$$
$$=\Pi_{i=1}^{2}[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}_i)\cup(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})]\cap\{((0,\boldsymbol{x}_1),(0,\boldsymbol{x}_2)\mid\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}\}$$

$$=\Pi_{i=1}^{2}(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})\cap\{((0,\boldsymbol{x}_1),(0,\boldsymbol{x}_2)\mid\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}\}$$

$$\subset\Pi_{i=1}^{2}(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{L}})=\Pi_{i=1}^{2}\{[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{L}}$$

であるから，$[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}$，$i=1$，2 に関して，定理7系1の(*)が成立している．よって，定理7系1により，直ちに結論を得る．‖

系3　$\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{R}^n$ を含まない閉凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$(\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{C})^{\mathrm{a}}=(\boldsymbol{R}_{+}\boldsymbol{C})\cup\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}$.

(ii)　$\boldsymbol{C}$ が有界ならば，$\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{C}$ は閉集合である．

証明　(i)．Eはn次単位行列，Mは $(n,n+1)$ 型 $[\boldsymbol{0},E]$ とし，線形変換 $g:\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})\to\boldsymbol{R}^n$ を，

① $g(\theta,\boldsymbol{x}):=M(\theta,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$，$g(\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}))=\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{C}$

によって定義しておく，注意2，定理3(i)及び $\boldsymbol{0}\notin\boldsymbol{C}$ により，

$$\{[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}\cap\{(\theta,\boldsymbol{x})\mid g(\theta,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$$
$$=[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\cap\{(\theta,\boldsymbol{x})\mid\theta\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$
$$=[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C})\cup(0,\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})]\cap\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\{\boldsymbol{0}\})=\{(0,\boldsymbol{0})\}$$

となって，$[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}$ に関して，定理7の(⁑)が成立している．よって，①，定理7，定理3(i)及び $\boldsymbol{C}$ が閉集合であることから，

$$(\boldsymbol{R}_{\oplus}\boldsymbol{C})^{\mathrm{a}}=[g(\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}))]^{\mathrm{a}}=g([\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}})=\boldsymbol{R}_{+}\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}.$$

(ii)．定理5により，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\{\boldsymbol{0}\}$ であるから，(i)により，直ちに結論を得

る.‖

注意 8 定理 7 は，仮定(＊)がないならば，たとえ $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ が閉凸集合であっても，一般に成立しない.

証明 (i)が成立しないこと. $\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{C}_1$ (注意 2)，$pr:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{R}_+$，$pr(\xi_1,\xi_2):=\xi_1$ とすると，$pr(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{R}_+\neq[pr(\boldsymbol{C})]^a=\boldsymbol{R}_\oplus$. (ii)が成立しないこと. $\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{C}_2$ (注意 2)，$pr:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{R}$，$pr(\xi_1,\xi_2):=\xi_1$ とすると，$\{pr(\boldsymbol{C})\}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{R}\neq pr(\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})=\{0\}$.‖

定理 8 閉凸集合 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\neq\emptyset$ に対して，

(＊) $(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}})\cap\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\,|\,\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}\}\subset\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{L}}\times\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{L}}$

ならば，$\chi:\{0\}\to\{0,1\}$ を $\{0\}$ の定義関数，すなわち，$\chi(0)=1$，$\chi(\{0\}^c)=\{0\}$ とするとき，凸包 $\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)$ に関して，次の関係が成立する.

(i) $[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^a=\{\sum_{i=1}^2[\theta_i\boldsymbol{C}_i+\chi(\theta_i)\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}]\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_\oplus\}$.

(ii) $\{[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^a\}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}+\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}}$.

証明 定理 7 系 2 により，

① $[\sum_{i=1}^2\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C}_i)]^a\cap(1,\boldsymbol{R}^n)=(\sum_{i=1}^2[\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C}_i)]^a)\cap(1,\boldsymbol{R}^n)$

であることに注目しておく.

(i). 定理 2，〔3〕の定理21系 1，〔3〕の定理22(i)及び〔3〕の定理 5 系を順次利用すると，

② ①式左辺$=(\sum_{i=1}^2\boldsymbol{R}_\oplus(1,\boldsymbol{C}_i)\cap(1,\boldsymbol{R}^n))^a$

$=\{\sum_{i=1}^2\theta_i(1,\boldsymbol{C}_i)\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_\oplus\}^a$

$=(\{1\}\times\{\sum_{i=1}^2\theta_i\boldsymbol{C}_i\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_\oplus\})^a=\{1\}\times[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^a$

であり，また，定理 3 (i)により，

①式右辺$=(\sum_{i=1}^2[\boldsymbol{R}_+(1,\boldsymbol{C}_i)\cup(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})]\cap(1,\boldsymbol{R}^n)$

$=\{\sum_{i=1}^2(\theta_i,\boldsymbol{x}_i)\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_\oplus,\boldsymbol{x}_i\in\theta_i\boldsymbol{C}_i+\chi(\theta_i)\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}\}$

$=\{1\}\times\{\sum_{i=1}^2[\theta_i\boldsymbol{C}_i+\chi(\theta_i)\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}]\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_\oplus\}$

であるから，結論を得る.

(ii). ①により，

③ $[\boldsymbol{R}_{\oplus}\{[\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}\cap(1,\boldsymbol{R}^n)\}]^{\mathrm{a}}$

$$=[\boldsymbol{R}_{\oplus}\{(\textstyle\sum_{i=1}^{2}[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}})\cap(1,\boldsymbol{R}^n)\}]^{\mathrm{a}}$$

であるが，②及び定理 3 (i)により，

$$③式左辺=[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^{\mathrm{a}})]^{\mathrm{a}}$$

$$=\boldsymbol{R}_{+}(1,[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^{\mathrm{a}})\cup(0,\{[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}})$$

であり，また，〔 3 〕の定理11(i)，及び定理 3 (i)により，

$$③式右辺=[\boldsymbol{R}_{\oplus}(\textstyle\sum_{i=1}^{2}[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}})\cap\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{R}^n)]^{\mathrm{a}}$$

$$=[(\textstyle\sum_{i=1}^{2}[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}})\cap\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{R}^n)]^{\mathrm{a}}$$

$$=\textstyle\sum_{i=1}^{2}[\boldsymbol{R}_{\oplus}(1,\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}=\sum_{i=1}^{2}[\boldsymbol{R}_{+}(1,\boldsymbol{C}_i)\cup(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})]$$

であるから，

$$(0,\{[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}})=\textstyle\sum_{i=1}^{2}(0,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})=(0,\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}+\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}})$$

となって結論を得る.‖

定理8′ 閉凸集合 $\boldsymbol{C}_i\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}_i\neq\emptyset$，$i=1,\cdots,m$ に対して，

(*) $(\Pi_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}})\cap\{(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\mid\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}\}\subset\Pi_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{L}}$

ならば，次の関係が成立する.

(i) $[\mathcal{C}(\cup_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}=\{\sum_{i=1}^{m}[\theta_i\boldsymbol{C}_i+\chi(\theta_i)\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}]\mid(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\Delta_{\oplus}^{m-1}\}$.[1)]

(ii) $\{[\mathcal{C}(\cup_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}\}^{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}$.

証明 定理 8 の証明法と同様にすればよい.‖

系 1 閉凸集合 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\neq\emptyset$ に対して，$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}}$ ならば，次の関係が成立する.

(i) $\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)=[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^{\mathrm{a}}$.

(ii) $\{\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)\}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}}$.

証明 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}:=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}}$ とおく.

$$(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{R}})\cap\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\mid\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}\}$$

---

1) $\Delta_{\oplus}^{m-1}:=\{(\theta_1,\cdots,\theta_m)\mid\sum_{i=1}^{m}\theta_i=1,\ \theta_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}$.

$$=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\cap\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\,|\,\boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{x}_1\}$$

$$\subset[\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}\cap(-\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})]\times[(-\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\cap\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}]=\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}\times\boldsymbol{C}^{\mathrm{L}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{L}}\times\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{L}}$$

であるから，定理８の(＊)が成立していることに注目しておく．

(ｉ)．定理８(ｉ)，定理１(iii)及び〔３〕の定理５系により，

$$[\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)]^{\mathrm{a}}=\{\textstyle\sum_{i=1}^{2}[\theta_i\boldsymbol{C}_i+\chi(\theta_i)\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}]\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_{\oplus}\}$$

$$=\{\theta_1\boldsymbol{C}_1+\theta_2\boldsymbol{C}_2\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_+\}\cup(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}})\cup(\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}+\boldsymbol{C}_2)$$

$$=\{\theta_1\boldsymbol{C}_1+\theta_2\boldsymbol{C}_2\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_+\}\cup\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2$$

$$=\{\theta_1\boldsymbol{C}_1+\theta_2\boldsymbol{C}_2\,|\,(\theta_1,\theta_2)\in\Delta_{\oplus}\}=\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2).$$

(ii)．上の結果(ｉ)と定理８(ii)により，直ちに結論を得る.‖

系1′　閉凸集合 $\boldsymbol{C}_i\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}_i\neq\emptyset$，$i=1,\cdots,m$ に対して，$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}=\cdots=\boldsymbol{C}_m^{\mathrm{R}}$ ならば，次の関係が成立する．

(ｉ)　$\mathcal{C}(\cup_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i)=[\mathcal{C}(\cup_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i)]^{\mathrm{a}}$.

(ii)　$\{\mathcal{C}(\cup_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i)\}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}=\cdots=\boldsymbol{C}_m^{\mathrm{R}}$.

証明　(ｉ)のみを示す．まず，〔３〕の定理５系の証明法と同様にすることにより，関係

①　$\mathcal{C}(\cup_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i)=\{\sum_{i=1}^{m}\theta_i\boldsymbol{C}_i\,|\,(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\Delta_{\oplus}^{m-1}\}$

が得られることに注目しておく，次に，$(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\Delta_{\oplus}^{m-1}$ は任意所与，更に，一般性を失うことなく，番号 $k(1\leqq k\leqq m)$ は任意所与として，$\theta_1,\cdots,\theta_k\in\boldsymbol{R}_+$，$\theta_{k+1}=\cdots=\theta_m=0$ としておく．また，$\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{R}}=\cdots=\boldsymbol{C}_m^{\mathrm{R}}$ とおく．定理１(iii)を途中で利用すると，

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m}[\theta_i\boldsymbol{C}_i+\chi(\theta_i)\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}]=\sum_{i=1}^{k}\theta_i\boldsymbol{C}_i+\sum_{i=k+1}^{m}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{R}}$$

$$\textstyle=\sum_{i=1}^{k}\theta_i\boldsymbol{C}_i+(m-k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}=\sum_{i=1}^{k}\theta_i[\boldsymbol{C}_i+(m-k)\boldsymbol{C}^{\mathrm{R}}]$$

$$\textstyle=\sum_{i=1}^{k}\theta_i\boldsymbol{C}_i=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\boldsymbol{C}_i.$$

よって，①及び定理8′(ｉ)により，結論を得る.‖

系２　有界閉集合 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\neq\emptyset$ に対して，$\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)$ もまた有界閉集合である．

証明　定理5により，$C_1^R = C_2^R = \{0\}$ であるから，定理8の(*)が成立している．よって，定理8(i)により，

$$[\mathcal{C}(C_1 \cup C_2)]^a = \{\theta_1 C_1 + \theta_2 C_2 \mid (\theta_1, \theta_2) \in \Delta_\oplus\} = \mathcal{C}(C_1 \cup C_2)$$

となるが，この集合が有界であることは自明である.‖

系2′　有界閉集合 $C_i \subset R^n$，$C_i \neq \emptyset$，$i=1, \cdots, m$ に対して，$\mathcal{C}(\cup_{i=1}^m C_i)$ もまた有界閉集合である．

証明　系2の証明法と同様にすればよい.‖

参 考 文 献

〔1〕 福尾洋一『最適経済成長理論』有斐閣，1978年.

〔2〕 ——「アフィン集合」『経済学論究（関西学院大学)』**33**（**3**）(1979)，pp. 97—122.

〔3〕 ——「凸集合」『経済学論究（関西学院大学)』**34**（**1**）(1980)，pp. 29—52.

〔4〕 Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

〔5〕 Stoer, J.-Witzgall, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

〔6〕 竹之内　脩『トポロジー』廣川書店，1962年.